**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2003**

УДК 539.3

© 2003 г. **Н.А. БАЗАРЕНКО**

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе используется конформное отображение $z = c\,\mathrm{sh}\,\zeta$ $(\zeta = u + i\upsilon)$ прямоугольника D^* на область D_0, ограниченную симметричными частями эллипса и гиперболы. Для этой области в системе эллиптических координат u, υ решается плоская задача теории упругости. Бигармоническая функция F разыскивается в виде $F = F_0 + xF_1 + yF_2$, где $F_k = C(\upsilon)\psi_k(u) + S(\upsilon)\psi_k^*(u)$ – неизвестные гармонические функции, $C(\upsilon)$, $S(\upsilon)$ – оператор-функции, описанные в [1] и определяемые соотношением $(C(\upsilon) + iS(\upsilon))\psi(u) = \psi(u + i\upsilon)$. Следуя операторному методу, неизвестные функции ψ_1, ψ_2 находятся из системы двух операторных уравнений, а ψ_0, ψ_0^* являются решениями дифференциальных уравнений первого порядка. Произвол, входящий в ψ_0^*, ψ_k, позволяет функции F удовлетворить всем граничным условиям на границе области D_0. Подобная задача рассматривалась в [2]. Однако найденное там решение соответствует частному случаю загружения пластинки, когда гиперболическая часть границы свободна от нагрузки, а на эллиптической части учитываются лишь результирующие усилия и момент.

1. Исходные уравнения операторного метода. Пусть аналитическая функция комплексного переменного

$$z = f(\zeta) \quad (z = x + iy \equiv x^1 + ix^2, \quad \zeta = u + i\upsilon \equiv u^1 + iu^2) \tag{1.1}$$

конформно отображает прямоугольную область D^* $(|u| \le u_0, |\upsilon| \le \upsilon_0)$ в ζ-плоскости на заданную область D в z-плоскости. Для области D в ортогональной системе изометрических координат u, υ решается плоская задача теории упругости, которая сводится к отысканию бигармонической функции F по граничным условиям:

$$\text{при} \quad \upsilon = \upsilon_j\colon \partial_u F = P_{2j}(u), \quad \partial_\upsilon F = P_{1j}(u) \quad (\upsilon_j = u_j^2 = (-1)^j \upsilon_0) \tag{1.2}$$

$$\text{при} \quad u = u_j\colon F = Q_{2j}(\upsilon), \quad \partial_u F = Q_{1j}(\upsilon) \quad (u_j \equiv u_j^1 = (-1)^j u_0 \ (j = 1, 2)) \tag{1.3}$$

Интегрируя на линиях $u = u_j$, $\upsilon = \upsilon_j$, соотношения

$$\partial_\upsilon(\partial_x F) = \sigma_u \partial_\upsilon x - \tau_{u\upsilon}\partial_\upsilon y, \quad \partial_\upsilon(\partial_y F) = \sigma_u \partial_\upsilon y + \tau_{u\upsilon}\partial_\upsilon x$$

$$\partial_u(\partial_x F) = \sigma_\upsilon \partial_u x + \tau_{u\upsilon}\partial_u y, \quad \partial_u(\partial_y F) = \sigma_\upsilon \partial_u y - \tau_{u\upsilon}\partial_u x$$

$$\partial_\upsilon F = (\partial_x F)\partial_\upsilon x + (\partial_y F)\partial_\upsilon y, \quad \partial_u F = (\partial_x F)\partial_u x + (\partial_y F)\partial_u y$$

и учитывая при этом условия

$$\text{при} \quad u = u_j\colon \sigma_u = \sigma_{1j}(\upsilon), \quad \tau_{u\upsilon} = \tau_{1j}(\upsilon) \quad (j = 1, 2) \tag{1.4}$$

$$\text{при} \quad \upsilon = \upsilon_j\colon \sigma_\upsilon = \sigma_{2j}(u), \quad \tau_{u\upsilon} = \tau_{2j}(u) \tag{1.5}$$

для функций $P_{kj}(u)$, $Q_{kj}(v)$ получены выражения

$$
\begin{aligned}
P_{kj}(u) &= (\delta_j x_{s1} + Y_{kj}(u))\partial_u x(u, v_j) + (-1)^k(\delta_j x_{k1} + Y_{sj}(u))\partial_u y(u, v_j)\\
Q_{1j}(v) &= (\delta_j y_{21} + X_{1j}(v))\partial_v y(u_j, v) - (\delta_j y_{11} + X_{2j}(v))\partial_v x(u_j, v)\\
Q_{2j}(v) &= \delta_j(x(u_2, v)y_{21} + y(u_2, v)y_{11} - m_{21}) + x(u_j, v)X_{1j}(v) + y(u_j, v)X_{2j}(v) - M_{1j}(v)\\
&(\delta_1 = 0, \delta_2 = 1) \quad (j, k, s = 1, 2; \quad k \neq s)
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Здесь σ_u, σ_v, τ_{uv} – компоненты тензора напряжений, $\sigma_{kj}(u^s)$, $\tau_{kj}(u^s)$ – функции интенсивности внешних усилий, $\partial_u \equiv \partial/\partial u$, ..., $\partial_y \equiv \partial/\partial y$ – операторы дифференцирования, а также используются следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
Y_{kj}(u) &= \int_{u_1}^{u}(\sigma_{2j}(u)\partial_u x^s(u, v_j) + (-1)^k\tau_{2j}(u)\partial_u x^k(u, v_j))du \quad (j, k, s = 1, 2; \quad k \neq s)\\
X_{kj}(v) &= \int_{v_1}^{v}(\sigma_{1j}(v)\partial_v x^k(u_j, v) + (-1)^k\tau_{1j}(v)\partial_v x^s(u_j, v))dv \quad (\partial_s \equiv \partial/\partial u^s)\\
2M_{kj}(u^s) &= \int_{u_1^s}^{u^s}(\sigma_{kj}(u^s)\partial_s(x^2 + y^2) - \tau_{kj}(u^s)\partial_k(x^2 + y^2))\Big|_{u^k = u_j^k} du^s\\
Y_{kj}(u_2) &= y_{kj}, \quad X_{kj}(v_2) = x_{kj}, \quad M_{kj}(u_2^s) = m_{kj}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Формулы (1.6), (1.7) получены при условии, что в точке $O(u_1, v_1)$ выполняются равенства $F = \partial_x F = \partial_y F = 0$, а внешние усилия удовлетворяют уравнениям равновесия

$$
y_{22} - y_{21} = x_{12} - x_{11}, \quad x_{22} - x_{21} = y_{12} - y_{11}, \quad m_{22} - m_{21} = m_{12} - m_{11} \tag{1.8}
$$

Бигармоническая функция F разыскивается в виде

$$
\begin{aligned}
F &= C(v)\psi_0(u) + S(v)\psi_0^*(u) + x(u, v)(C(v)\psi_1(u) - S(v)\psi_2(u)) +\\
&+ y(u, v)(C(v)\psi_2(u) + S(v)\psi_1(u))
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Здесь ψ_0^*, ψ_i $(i = 0, 1, 2)$ – функции, подлежащие определению, $C(v)$, $S(v)$ – оператор-функции, определенные на множестве ω аналитических функций $\psi(u)$ следующим образом:

$$
C(v)\psi(u) = \mathrm{Re}\{\psi(u + iv)\}, \quad S(v)\psi(u) = \mathrm{Im}\{\psi(u + iv)\}
$$

где точка $u + iv$ принадлежит области аналитичности функции $\psi(\zeta)$.

Для частного случая, когда ω – множество целых функций, справедливо представление $C(v) \equiv \cos v\partial_u$, $S(v) \equiv \sin v\partial_u$.

Неизвестные функции $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ находятся из системы двух операторных уравнений:

$$
S(2v_0)\psi_1 + W_2\partial_u\psi_1 + W_1\partial_u\psi_2 = f_1, \quad S(2v_0)\psi_2 - W_2\partial_u\psi_2 + W_1\partial_u\psi_1 = f_2 \tag{1.10}
$$

где функции $W_k = W_k(u), f_k = f_k(u)$ имеют вид

$$
g_0 W_1 = \partial_u x_0 S(2v_0)y_0 + \partial_u y_0 S(2v_0)x_0, \quad g_0 W_2 = \partial_u x_0 S(2v_0)x_0 - \partial_u y_0 S(2v_0)y_0 \tag{1.11}
$$

$$
\begin{aligned}
2(-1)^s f_k &= x_{s1} + C(v_0)(Y_{k2} - Y_{k1}) + (-1)^s S(v_0)(Y_{s1} + Y_{s2}) \quad (k \neq s = 1, 2)\\
x_0 &= x(u, 0), \quad y_0 = y(u, 0), \quad g_0 = (\partial_u x_0)^2 + (\partial_u y_0)^2
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Функции $\psi_0(u)$ и $\psi_0^*(u)$ находятся интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\partial_u\psi_0 &= -\partial_u x_0 C(2v_0)\psi_1 - C(2v_0)x_0\partial_u\psi_1 - \\ &-\partial_u y_0 C(2v_0)\psi_2 - C(2v_0)y_0\partial_u\psi_2 + f_1^*\partial_u x_0 + f_2^*\partial_u y_0 \\ \partial_u\psi_0^* &= \partial_u y_0 C(2v_0)\psi_1 - C(2v_0)y_0\partial_u\psi_1 - \\ &-\partial_u x_0 C(2v_0)\psi_2 + C(2v_0)x_0\partial_u\psi_2 + f_2^*\partial_u x_0 + f_1^*\partial_u y_0\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$2f_k^* = x_{k1} + C(v_0)(Y_{s1}+Y_{s2}) + (-1)^s S(v_0)(Y_{k1}-Y_{k2}) \quad (k \neq s = 1, 2) \tag{1.14}$$

2. Решение задачи для области D_0, задаваемой конформным отображением $z = c\,\mathrm{sh}\,\zeta$. В этом случае

$$x = c\,\mathrm{sh}u\cos v, \quad y = c\,\mathrm{ch}u\sin v \quad (v_0 < \pi/2, c = \mathrm{const})$$

и, следовательно, симметричные части эллипса $x^2/\mathrm{sh}^2 u_0 + y^2/\mathrm{ch}^2 u_0 = c^2$ и гиперболы $y^2/\sin^2 v_0 - x^2/\cos^2 v_0 = c^2$ составляют границу L области D_0. Пусть функции $\sigma_{2j}(u)$, $\tau_{2j}(u)$, входящие в (1.5) и определяющие загружение гиперболической части границы, заданы рядами

$$\begin{aligned}\sigma_{2j} &= \sigma_0^j + \sum_{n=1}^{\infty}(\sigma_n^j\cos n_0 u + \sigma_n^{jj}\sin n_0 u), \quad \tau_{2j} = \tau_0^j + \sum_{n=1}^{\infty}(\tau_n^j\cos n_0 u + \tau_n^{jj}\sin n_0 u) \\ n_0 &= n\pi/u_0\end{aligned} \tag{2.1}$$

Опишем процедуру нахождения бигармонической функции F, учитывая, например, в рядах (2.1) только коэффициенты σ_n^j ($j = 1, 2$; $n = 0, 1, \ldots$) Прежде всего по формулам (1.7) находятся функции

$$Y_{kj}(u) \quad (k, j = 1, 2)$$

$$(-1)^j Y_{1j}(c\sin v_0)^{-1} = \sigma_j^{(1)}\mathrm{ch}u_0 - \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^j(\mathrm{ch}u\cos n_0 u + n_0\mathrm{sh}u\sin n_0 u)/(n_0^2+1)$$

$$(-1)^j Y_{2j}(c\cos v_0)^{-1} = \sigma_j^{(1)}\mathrm{sh}u_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^j(\mathrm{sh}u\cos n_0 u + n_0\mathrm{ch}u\sin n_0 u)/(n_0^2+1)$$

$$\sigma_j^{(i)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sigma_n^j/(n_0^2+i^2)$$

Затем по формулам (1.12), (1.14) находятся функции f_j, f_j^*:

$$2c^{-1}f_1 = c^{-1}x_{21} - (\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)})\sin v_0\mathrm{ch}u_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^+ T_n(u)$$

$$2c^{-1}f_2 = -c^{-1}x_{11} + (\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)})\cos v_0\mathrm{sh}u_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^- R_n(u)$$

$$2c^{-1}f_1^* = c^{-1}x_{11} + (\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)})\cos\upsilon_0 \operatorname{sh}u_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^+ R_n(u)$$

$$2c^{-1}f_2^* = c^{-1}x_{21} + (\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)})\sin\upsilon_0 \operatorname{ch}u_0 - \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^- T_n(u)$$

$$T_n(u) = \operatorname{ch}u\cos n_0 u(a\operatorname{ch}n_0\upsilon_0 + n_0 b\operatorname{sh}n_0\upsilon_0) + \operatorname{sh}u\sin n_0 u(n_0 a\operatorname{ch}n_0\upsilon_0 - b\operatorname{sh}n_0\upsilon_0)$$

$$R_n(u) = \operatorname{sh}u\cos n_0 u(b\operatorname{ch}n_0\upsilon_0 - n_0 a\operatorname{sh}n_0\upsilon_0) + \operatorname{ch}u\sin n_0 u(a\operatorname{ch}n_0\upsilon_0 + n_0 b\operatorname{ch}n_0\upsilon_0)$$

$$\sigma_n^{\pm} = (\sigma_n^1 \pm \sigma_n^2)/(n_0^2 + 1) \quad (n = 0, 1, \ldots), \quad a = \sin 2\upsilon_0, \quad b = \cos 2\upsilon_0$$

Далее, определяя по формулам (1.11) функции $W_j(u)$ ($W_1 = 0$, $W_2 = a$) и подставляя их в (1.10), получим два операторных уравнения относительно функций $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$:

$$S(2\upsilon_0)\psi_1(u) + a\partial_u\psi_1(u) = f_1(u), \quad S(2\upsilon_0)\psi_2(u) - a\partial_u\psi_2(u) = f_2(u)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} 2c^{-1}\psi_1 &= A_0^+\operatorname{sh}u + B_0^+ u + a^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^+(A_n^+\operatorname{sh}u\cos n_0 u + B_n^+\operatorname{ch}u\sin n_0 u) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(C_{n2}^*\operatorname{sh}\delta_{n2}w + D_{n2}^*\operatorname{ch}\delta_{n2}w) \\ 2c^{-1}\psi_2 &= A_0^- u\operatorname{sh}u + B_0^- u + \operatorname{ch}u C^-/\Delta + a^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^-(A_n^-\operatorname{sh}u\sin n_0 u + B_n^-\operatorname{ch}u\cos n_0 u) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(C_{n1}^*\operatorname{ch}\delta_{n1}w + D_{n1}^*\operatorname{sh}\delta_{n1}w) \quad (w = u/\upsilon_0) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$A_0^+ = \sigma_0^+/2, \quad B_0^+ = (c^{-1}x_{21} - (\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)})\sin\upsilon_0\operatorname{ch}u_0)/\Delta^+, \quad \Delta^{\pm} = a \pm 2\upsilon_0$$

$$A_0^- = b\sigma_0^-/2, \quad B_0^- = (c^{-1}x_{11} + (\sigma_2^{(1)} - \sigma_1^{(1)})\cos\upsilon_0\operatorname{sh}u_0)/\Delta^-, \quad \Delta = 2\upsilon_0 b - a$$

$$A_n^+ = (a(2 - n_0^2)\operatorname{ch}n_0\upsilon_0 + (s_n + n_0 b)\operatorname{sh}n_0\upsilon_0)/\Delta_n^+, \quad \Delta_n^{\pm} = a_n \pm b_n$$

$$B_n^+ = n_0(3a\operatorname{ch}n_0\upsilon_0 + (s_n + n_0 b)\operatorname{sh}n_0\upsilon_0)/\Delta_n^+, \quad a_n = s_n^2 + n_0^2 + 2$$

$$A_n^- = (a(n_0^2 - 2)\operatorname{sh}n_0\upsilon_0 + (s_n - n_0 b)\operatorname{ch}n_0\upsilon_0)/\Delta_n^-, \quad b_n = 2(n_0 b s_n + c_n)$$

$$B_n^- = n_0(3a\operatorname{sh}n_0\upsilon_0 + (n_0 b - s_n)\operatorname{ch}n_0\upsilon_0)/\Delta_n^-, \quad s_n = a^{-1}\operatorname{sh}2n_0\upsilon_0, \quad c_n = \operatorname{ch}2n_0\upsilon_0$$

В формулах (2.2) C^-, C_{nk}^*, D_{nk}^* – произвольные действительные и комплексные постоянные, числа δ_{nk} – корни уравнений

$$\sin 2\delta_{nk} + (-1)^k \nu 2\delta_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2; \quad \nu = \sin 2\upsilon_0/(2\upsilon_0))$$

Заметим, что корни $z_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n > 0)$ уравнения $\sin z_n + \rho z_n = 0$ при $\alpha_{0n} \to \infty$ можно разложить в асимптотический ряд

$$x_n \sim \alpha_n - \beta_n/\alpha_{0n} + \left(\frac{1}{2}\gamma_n^2 - \frac{1}{6}\beta_n^2 - \frac{3}{2}\gamma_n + 1\right)\beta_n/\alpha_{0n}^3 + \ldots$$

$$y_n \sim \beta_n + \left(\frac{1}{2}\gamma_n - 1\right)\beta_n/\alpha_{0n}^2 + \ldots \tag{2.3}$$

$$\alpha_n = 2\pi n - \pi/2\,\mathrm{sign}\rho, \quad \beta_n = \mathrm{arcch}(|\rho|\alpha_n), \quad \alpha_n|\rho| > 1$$

$$\alpha_{0n} = \sqrt{\alpha_n^2 - \rho^{-2}}, \quad \gamma_n = \beta_n\alpha_n/\alpha_{0n}$$

На основании (2.3) дается улучшенная схема итераций (по сравнению со схемами в [3, 4]) для вычисления корней z_n:

$$x_n^{(i)} = \alpha_n + \varepsilon_n^{(i)}, \quad y_n^{(i)} = \mathrm{arcch}(|\rho|x_n^{(i)}/\cos\varepsilon_n^{(i)}), \quad \varepsilon_n^{(i+1)} = -\arcsin(|\rho|y_n^{(i)}/\mathrm{sh}\,y_n^{(i)})$$

$$\alpha_n = 2\pi n - \pi/2\,\mathrm{sign}\rho, \quad \varepsilon_n^{(0)} = -\mathrm{arcch}(|\rho|\alpha_n)/\sqrt{\alpha_n^2 - \rho^{-2}} \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

Подставляя $f_j^*(u)$, $\psi_j(u)$ $(j = 1, 2)$ в соотношения (1.13) и учитывая, что $x_0 = c\,\mathrm{sh}\,u$, $y_0 = 0$ получим два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функций $\psi_0(u)$ и $\psi_0^*(u)$:

$$2c^{-2}\partial_u\psi_0 = c^{-1}x_{11}\mathrm{ch}\,u + (\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)})\cos\upsilon_0\,\mathrm{sh}\,u_0\,\mathrm{ch}\,u - B_0^+(b\,\mathrm{sh}\,u + u\,\mathrm{ch}\,u) +$$
$$+ (2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^+(B_{n1}\mathrm{ch}2u\sin n_0u + B_{n2}\mathrm{sh}2u\cos n_0u + B_{n3}\sin n_0u) +$$
$$+ \upsilon_0(2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(C_{n2}^*\partial_uM_{n2}(w) - D_{n2}^*\partial_uL_{n2}(w)) \tag{2.4}$$
$$2c^{-2}\partial_u\psi_0^* = c^{-1}x_{21}\mathrm{ch}\,u + (\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)})\sin\upsilon_0\,\mathrm{ch}\,u_0\,\mathrm{ch}\,u + \sigma_0^-(\mathrm{ch}2u - \cos 4\upsilon_0)/(2\Delta) -$$
$$- 2bC^-/\Delta + B_0^-(b\,\mathrm{sh}\,u - u\,\mathrm{ch}\,u) + \upsilon_0(2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(D_{n1}^*\partial_uM_{n1}(w) - C_{n1}^*\partial_uL_{n1}(w)) -$$
$$- (2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^-(A_{n1}\mathrm{ch}2u\cos n_0u + A_{n2}\mathrm{sh}2u\sin n_0u + A_{n3}\cos n_0u)$$

$$L_{nk}(w) = \mathrm{sh}\,\delta_{nk}^-w\sin 2\delta_{nk}^+/\delta_{nk}^- + \mathrm{sh}\,\delta_{nk}^+w\sin 2\delta_{nk}^-/\delta_{nk}^+, \quad \delta_{nk}^{\pm} = \upsilon_0 \pm \delta_{nk}$$

$$M_{nk}(w) = \mathrm{ch}\,\delta_{nk}^-w\sin 2\delta_{nk}^+/\delta_{nk}^- - \mathrm{ch}\,\delta_{nk}^+w\sin 2\delta_{nk}^-/\delta_{nk}^+$$

$$B_{n1} = a(\mathrm{sh}\,n_0\upsilon_0 - A_n^+as_n) + b(n_0(\mathrm{ch}\,n_0\upsilon_0 + A_n^+) - B_n^+(1 + c_n))$$

$$B_{n2} = a(B_n^+as_n - n_0\mathrm{sh}\,n_0\upsilon_0) + b(\mathrm{ch}\,n_0\upsilon_0 - n_0B_n^+ - A_n^+(1 + c_n))$$

$$B_{n3} = a(\mathrm{sh}\,n_0\upsilon_0 - A_n^+as_n) + b(n_0(\mathrm{ch}\,n_0\upsilon_0 - A_n^+) + B_n^+(1 - c_n))$$

$$A_{n1} = a(\operatorname{ch}n_0 v_0 - A_n^- a s_n) + b(n_0(\operatorname{sh}n_0 v_0 - A_n^-) + B_n^-(c_n - 1))$$

$$A_{n2} = a(n_0 \operatorname{ch}n_0 v_0 + B_n^- a s_n) + b(A_n^-(c_n - 1) - \operatorname{sh}n_0 v_0 + n_0 B_n^-)$$

$$A_{n3} = a(\operatorname{ch}n_0 v_0 - A_n^- a s_n) + b(n_0(\operatorname{sh}n_0 v_0 + A_n^-) + B_n^-(c_n + 1))$$

Интегрируя уравнения (2.4), находим

$$\begin{aligned}
2c^{-2}\psi_0 &= c^{-1}x_{11}\operatorname{sh}u + (\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)})\cos v_0 \operatorname{sh}u_0 \operatorname{sh}u - B_0^+(b\operatorname{ch}u + u\operatorname{sh}u - \operatorname{ch}u) + \\
&+ (2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^+(B_n^1 \operatorname{sh}2u\sin n_0 u) + B_n^2 \operatorname{ch}2u\cos n_0 u + B_n^3\cos n_0 u) + \\
&+ v_0(2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(C_{n2}^* M_{n2}(w) - D_{n2}^* L_{n2}(w)) + C^+ \\
2c^{-2}\psi_0^* &= c^{-1}x_{21}\operatorname{sh}u + (\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)})\sin v_0 \operatorname{ch}u_0 \operatorname{sh}u + \sigma_0^-(\operatorname{sh}2u - 2u\cos 4v_0)/(4\Delta) - \\
&- 2buC^-/\Delta - (2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^-(A_n^1 \operatorname{sh}2u\cos n_0 u + A_n^2 \operatorname{ch}2u\sin n_0 u + A_n^3 \sin n_0 u) + \\
&+ B_0^-(b\operatorname{ch}u - u\operatorname{sh}u + \operatorname{ch}u) + v_0(2a)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(D_{n1}^* M_{n1}(w) - C_{n1}^* L_{n1}(w))
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(n_0^2 + 4)B_n^1 = (2d_n - n_0 r_n + 5n_0 - n_0^3)n_0 \operatorname{sh}n_0 v_0/\Delta_n^+, \quad d_n = bs_n + n_0 c_n$$

$$(n_0^2 + 4)B_n^2 = (2 - 4n_0^2 - n_0 d_n - 2r_n)n_0 \operatorname{sh}n_0 v_0/\Delta_n^+, \quad r_n = n_0 b s_n - c_n$$

$$B_n^3 = -((d_n + 2n_0)\operatorname{sh}n_0 v_0 + (2n_0^2 + 2)ab\operatorname{sh}n_0 v_0)/\Delta_n^+$$

$$(n_0^2 + 4)A_n^1 = (n_0 r_n - 2d_n + 5n_0 - n_0^3)n_0 \operatorname{ch}n_0 v_0/\Delta_n^-$$

$$(n_0^2 + 4)A_n^2 = (4n_0^2 - 2 - n_0 d_n - 2r_n)n_0 \operatorname{ch}n_0 v_0/\Delta_n^-$$

$$A_n^3 = ((2n_0 - d_n)\operatorname{ch}n_0 v_0 + (2n_0^2 + 2)ab\operatorname{sh}n_0 v_0)/\Delta_n^-$$

Наконец, подставляя функции ψ_0^*, ψ_i $(i = 0, 1, 2)$, определяемые соотношениями (2.2), (2.5) в формулу (1.9), получим выражение той части бигармонической функции, которая выражается через коэффициенты σ_n^j. Поочередно связывая вышеописанную процедуру построения бигармонической функции с величинами σ_n^j, σ_n^{jj}, τ_n^j, τ_n^{jj} в итоге найдем полное выражение функций F, учитывающее все коэффициенты в рядах (2.1). В результате получим

$$\begin{aligned}
2c^{-2}F &= 2c^{-1}(x_{11}\operatorname{sh}uq(v) + x_{21}\operatorname{ch}up(v)) + C^-(\sin 2v - 2vb)/\Delta + C^+ + \\
&+ \sum_{j=1}^{2}\{(\operatorname{ch}(u + u_0)H_j^1(v) + \operatorname{ch}(u - u_0)H_j^2(v))\sigma_j^{(1)} + (H_j^3(v) + \operatorname{ch}2uH_j^4(v))\sigma_0^j/2 +
\end{aligned}$$

$$+(\mathrm{sh}(u+u_0)H_j^1(v)-\mathrm{sh}(u-u_0)H_j^2(v))\sigma_{jj}^{(1)}+(\mathrm{sh}(u+u_0)G_j^1(v)+\mathrm{sh}(u-u_0)G_j^2(v))\tau_j^{(1)}+$$

$$+(\mathrm{sh}2uG_j^3(v)+auG_j^4(v))\tau_0^j/2+(\mathrm{ch}(u+u_0)G_j^1(v)-\mathrm{ch}(u-u_0)G_j^2(v))\tau_{jj}^{(1)}\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{(\sigma_n^j\cos n_0u+\sigma_n^{jj}\sin n_0u)(\mathrm{ch}2uV_{nj}^2(v)+V_{nj}^3(v))+ \tag{2.6}$$

$$+(\tau_n^{jj}\cos n_0u-\tau_n^j\sin n_0u)(\mathrm{ch}2uW_{nj}^2(v)+W_{nj}^3(v))+\mathrm{sh}2u\times$$

$$\times((\sigma_n^j\sin n_0u-\sigma_n^{jj}\cos n_0u)V_{nj}^1(v)+(\tau_n^j\cos n_0u+\tau_n^{jj}\sin n_0u)W_{nj}^1(v))\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(C_{nk}\Pi_{nk}(w)+D_{nk}E_{nk}(w))\Phi_{nk}(t)\quad(t=v/v_0)$$

$$q(v)=(\cos v_0\sin(v+v_0)-(v+v_0)\cos v)/\Delta^-,\quad p(v)=(\sin v_0\sin(v+v_0)+(v+v_0)\sin v)/\Delta^+$$

$$H_1^1(v)=\{(v-v_0)(a\cos(v+v_0)+2v_0\cos(v-v_0))-\sin(v-v_0)(2v_0+ab)\}/(\Delta^-\Delta^+)$$

$$H_1^2(v)=\{(a+2v_0b)\sin(v-v_0)-(v-v_0)(a\cos(v-v_0)+2v_0\cos(v+v_0))\}/(\Delta^-\Delta^+)$$

$$H_1^3(v)=a^2(v_0\sin2v-av)/\Delta^2+b((\cos2v+b)v-\sin2v)/\Delta-(\cos2v+b)/2$$

$$H_1^4(v)=((\sin2v-2vb)/\Delta+1)/2,\quad G_1^3(v)=(b-\cos2v)/(2a)+(av-v_0\sin2v)/\Delta$$

$$G_1^1(v)=\{a(v-v_0)\sin(v+v_0)-(a^2+2v_0(v-v_0))\sin(v-v_0)\}/(\Delta^-\Delta^+)$$

$$G_1^2(v)=\{2v_0(v-v_0)\sin(v+v_0)-a(v+v_0)\sin(v-v_0)\}/(\Delta^-\Delta^+),\quad G_1^4(v)=-2H_1^4(v)$$

$$\sigma_{jj}^{(i)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sigma_n^{jj}n_0/(n_0^2+i^2),\quad \tau_j^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tau_n^j/(n_0^2+i^2),\quad \tau_{jj}^{(i)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tau_n^{jj}n_0/(n_0^2+i^2)$$

$$2a(n_0^2+1)V_{n1}^1(v)=\cos2v((n_0r_n-2d_n)S_{n2}^-+(5n_0-n_0^3)S_{n2}^+)n_0/(n_0^2+4)+$$

$$+\sin2v((n_0d_n+2r_n)C_{n2}^-+(2-4n_0^2)C_{n2}^+)n_0/(n_0^2+4)+(3aC_{n1}^+-s_nS_{n2}^-+n_0bS_{n2}^+)n_0$$

$$2a(n_0^2+1)V_{n1}^2(v)=\cos2v((n_0d_n+2r_n)S_{n2}^-+(2-4n_0^2)S_{n2}^+)n_0/(n_0^2+4)+$$

$$+\sin2v((2d_n-n_0r_n)C_{n2}^-+(n_0^3-5n_0)C_{n2}^+)n_0/(n_0^2+4)+(2-n_0^2)aC_{n1}^+-s_nS_{n2}^-+n_0bS_{n2}^+$$

$$2a(n_0^2+1)V_{n1}^3(v)=\cos2v((n_0^2-2)aC_{n1}^++s_nS_{n2}^--n_0bS_{n2}^+)+d_nS_{n2}^--2n_0S_{n2}^+-$$

$$-2(n_0^2+1)abC_{n1}^++\sin2v(n_0bC_{n2}^++3aS_{n1}^+-s_nC_{n2}^-)$$

$$2a(n_0^2+1)W_{n1}^1(v)=\cos2v((n_0^2-1)C_{n1}^++r_nC_{n1}^-)+\sin2v(d_nS_{n1}^-+2n_0S_{n1}^+)+$$

$$+(2-n_0^2)bC_{n1}^+-n_0s_nC_{n1}^--n_0aS_{n2}^+$$

$$2a(n_0^2+1)W_{n1}^2(v)=\cos2v(d_nC_{n1}^-+2n_0C_{n1}^+)-\sin2v(r_nS_{n1}^-+(n_0^2-1)S_{n1}^+)-$$

$$-3n_0bC_{n1}^++n_0^2aS_{n2}^+-s_nC_{n1}^-$$

$$2a(n_0^2+1)W_{n1}^3(v) = \cos 2v(3n_0bC_{n1}^+ - n_0^2aS_{n2}^+ + s_nC_{n1}^-) -$$
$$-2(r_nC_{n1}^- + \cos 4v_0C_{n1}^+)/n_0 + \sin 2v((2-n_0^2)bS_{n1}^+ - n_0s_nS_{n1}^- - n_0aC_{n2}^+) +$$
$$+d_nC_{n1}^- - 4n_0b^2C_{n1}^+ + 2(n_0^2+1)abS_{n2}^+$$

$$H_2^s(v) = H_1^s(-v),\quad G_2^s(v) = -G_1^s(-v),\quad V_{n2}^s(v) = V_{n1}^s(-v),\quad W_{n2}^s(v) = -W_{n1}^s(-v)$$

$$S_{nk}^{\pm}(v) = (a_n\operatorname{sh}n_0(v\pm v_0) + (-1)^k b_n\operatorname{sh}n_0(v\mp v_0))/(\Delta_n^-\Delta_n^+)\quad (k=1,2)$$

$$C_{nk}^{\pm}(v) = (a_n\operatorname{ch}n_0(v\pm v_0) + (-1)^k b_n\operatorname{ch}n_0(v\mp v_0))/(\Delta_n^-\Delta_n^+)$$

$$C_{nk}^* = N_n^{(k)}C_{nk},\quad D_{nk}^* = N_n^{(k)}D_{nk},\quad \Phi_{nk}(t) = N_n^{(k)}\tilde{\Phi}_{nk}(t) \tag{2.7}$$

$$\tilde{\Phi}_{nk}(t) = -a^{-1}(\lambda_{nk}\cos(\varepsilon_k + \delta_{nk}^+t) + \mu_{nk}\cos(\varepsilon_k - \delta_{nk}^-t)),\quad \varepsilon_k = k\pi/2$$

$$\Pi_{nk}(w) = \lambda_{nk}\operatorname{ch}\delta_{nk}^+w - \mu_{nk}\operatorname{ch}\delta_{nk}^-w,\quad E_{nk}(w) = \lambda_{nk}\operatorname{sh}\delta_{nk}^+w + \mu_{nk}\operatorname{sh}\delta_{nk}^-w,$$

$$\lambda_{nk} = \sin(\varepsilon_k - \delta_{nk}^-)/\delta_{nk}^+,\quad \mu_{nk} = \sin(\varepsilon_k + \delta_{nk}^+)/\delta_{nk}^-$$

В формулах (2.2)–(2.7) и далее в тексте принята такая нумерация, что выполняются соотношения

$$\bar{\delta}_{2r-1,k} = \delta_{2r,k},\quad \bar{C}_{2r-1,k} = C_{2r,k},\quad \bar{D}_{2r-1,k} = D_{2r,k},\quad \bar{N}_{2r-1}^{(k)} = N_{2r}^{(k)}$$

$$\bar{\Phi}_{2r-1,k}(t) = \Phi_{2r,k}(t) \equiv h_{rk}(t) + ig_{rk}(t)\quad (r = 1, 2, \ldots)$$

Из условий нормировки функций $h_{rk}(t)$ и $g_{rk}(t)$:

$$\int_{-1}^{1} h_{rk}^2(t)dt = 1,\quad \int_{-1}^{1} g_{rk}^2(t)dt = 1$$

получим следующее выражение для нормирующих множителей $N_{2r}^{(k)}$:

$$N_{2r}^{(k)} = (\sqrt{1+\sin\varphi_{rk}} + i\sqrt{1-\sin\varphi_{rk}})/\sqrt{I_{2r,2r-1}^{(k)}} \tag{2.8}$$

$$I_{2r,2r}^{(k)} = \left|I_{2r,2r}^{(k)}\right|\exp(i\varphi_{rk}) \tag{2.9}$$

$$I_{nn}^{(k)} = \int_{-1}^{1}\tilde{\Phi}_{nk}^2(t)dt = (\cos 2(\varepsilon_k + \delta_{nk}) + \nu + \delta_{nk}^2(\nu - b)/v_0^2)(\cos 2(\varepsilon_k + \delta_{nk}) + b)^{-1}(v_0^2 - \delta_{nk}^2)^{-1}$$

$$I_{mn}^{(k)} = \int_{-1}^{1}\tilde{\Phi}_{mk}(t)\tilde{\Phi}_{nk}(t)dt = (-1)^k 32\nu\delta_{mk}\delta_{nk}(4v_0^2 - (\delta_{mk}+\delta_{nk})^2)^{-1}\times$$
$$\times(4v_0^2 - (\delta_{mk}-\delta_{nk})^2)^{-1}(\cos 2\delta_{nk} + \cos 2\delta_{mk})^{-1}\quad (m\neq n)$$

На основании формул (2.3), (2.9) найдена асимптотика нормирующих множителей при $\alpha_{rk}\to\infty$:

$$N_{2r}^{(k)} \sim \sqrt{\beta_{rk}^3/2 + 2v_0^2\beta_{rk}}\{1 + i[\beta_{rk} + (\nu^{-1}\cos 4v_0 - b)/(\nu - b)](2\alpha_{rk})^{-1} + \ldots\}$$
$$\alpha_{rk} = 2\pi r - (-1)^k\pi/2,\quad \beta_{rk} = \operatorname{arch}(\nu\alpha_{rk})\quad (r = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2) \tag{2.10}$$

Далее потребуем, чтобы главный момент на участке границы L от точки $A(u_1, v_2)$ до точки $O(u_1, v_1)$ был равен заданной величине m_{11}, и в точке O выполнялось условие $F(O) = 0$ (условия $\partial_x F(O) = \partial_y F(O) = 0$ выполняются автоматически):

$$m_{11} = -F(A) + x(A)\partial_x F(A) + y(A)\partial_y F(A), \quad F(O) = 0$$

Отсюда, учитывая формулы (2.6), (2.7), находим постоянные C^+, C^-:

$$\begin{aligned}
C^+ &= (\sigma_1^{(2)} + \sigma_2^{(2)})\operatorname{ch}2u_0 + a(\tau_{22}^{(0)} - \tau_{11}^{(0)})/2 - c^{-2}(m_{11} + (m_{22} + m_{21})/2) \\
C^- &= (\sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(2)})\operatorname{ch}2u_0 - a(\tau_{11}^{(0)} + \tau_{22}^{(0)})/2 + c^{-2}(m_{11} + (m_{22} - m_{21})/2) \\
&(c^{-2}m_{2j} = -au_0(-1)^j\tau_0^j - \sigma_{jj}^{(2)}\operatorname{sh}2u_0 \quad (j = 1, 2))
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Описываемая соотношениями (2.6), (2.7), (2.11) бигармоническая функция F и определяемые через нее напряжения σ_v, τ_{uv} удовлетворяют условиям (1.2) и (1.5) соответственно. Распоряжаясь постоянными C_{nk}, D_{nk}, удовлетворим теперь граничным условиям (1.3) (при этом условия (1.4) также будут выполняться). С учетом (1.6) и (2.6) условия (1.3) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_{nk}\Pi_{nk}(w_0)\Phi_{nk}(t) = Z_1(v), \quad \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_{nk}\Pi'_{nk}(w_0)\Phi_{nk}(t) = Z_4(v) \\
&\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}E_{nk}(w_0)\Phi_{nk}(t) = Z_2(v), \quad \sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty} D_{nk}E'_{nk}(w_0)\Phi_{nk}(t) = Z_3(v)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$Z_1(v) = \operatorname{ch}u_0 P(v) - C^-(\sin 2v - 2vb)/\Delta - C^+ + \operatorname{sh}u_0\cos v(X_{12} - X_{11} + y_{21})/c -$$

$$-c^{-2}m_{21} - c^{-2}(M_{12} + M_{11}) - \sum_{j=1}^{2}(H_j^3 + \operatorname{ch}2u_0 H_j^4)\sigma_0^j/2 -$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{\sigma_n^j(\operatorname{ch}2u_0 V_{nj}^2 + V_{nj}^3) + \tau_n^{jj}(\operatorname{ch}2u_0 W_{nj}^2 + W_{nj}^3)\}$$

$$Z_2(v) = \operatorname{sh}u_0 Q(v) + \operatorname{ch}u_0\sin v(X_{22} - X_{21} + y_{11})/c - c^{-2}m_{21} + c^{-2}(M_{11} - M_{12}) -$$

$$-\sum_{j=1}^{2}(\operatorname{sh}2u_0 G_j^3 + au_0 G_j^4)\tau_0^j/2 + \operatorname{sh}2u_0\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sigma_n^{jj}V_{nj}^1 - \tau_n^j W_{nj}^1)$$

$$v_0^{-1}Z_3(v) = \operatorname{ch}u_0 Q(v) + \operatorname{sh}u_0\sin v(X_{22} - X_{21} + y_{11})/c - \sum_{j=1}^{2}(\operatorname{ch}2u_0 G_j^3 + aG_j^4/2)\tau_0^j +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{\sigma_n^{jj}(\operatorname{ch}2u_0(2V_{nj}^1 - n_0V_{nj}^2) - n_0V_{nj}^3) - \tau_n^j(\operatorname{ch}2u_0(2W_{nj}^1 - n_0W_{nj}^2) - n_0W_{nj}^3)\}$$

$$v_0^{-1}Z_4(v) = \operatorname{sh}u_0 P(v) + \operatorname{ch}u_0\cos v(X_{12} - X_{11} + y_{21})/c - \operatorname{sh}2u_0\sum_{j=1}^{2}H_j^4\sigma_0^j -$$

$$-\operatorname{sh}2u_0\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\{\sigma_n^j(2V_{nj}^2 + n_0V_{nj}^1) + \tau_n^{jj}(2W_{nj}^2 + n_0W_{nj}^1)\}$$

$$P(\upsilon) = p(\upsilon)\{2\operatorname{ch}u_0(\sin\upsilon_0\sigma_2^{(1)} + \cos\upsilon_0\tau_{22}^{(1)}) - (2x_{21} + y_{12})/c\} + p(-\upsilon)\{y_{11}/c +$$
$$+ 2\operatorname{ch}u_0(\sin\upsilon_0\sigma_1^{(1)} - \cos\upsilon_0\tau_{11}^{(1)})\} + \sin\upsilon(X_{21} + X_{22} + y_{11})/c$$
$$Q(\upsilon) = q(\upsilon)\{2\operatorname{ch}u_0(\sin\upsilon_0\tau_2^{(1)} - \cos\upsilon_0\sigma_{22}^{(1)}) - (2x_{11} + y_{22})/c\} - q(-\upsilon)\{y_{21}/c +$$
$$+ 2\operatorname{ch}u_0(\sin\upsilon_0\tau_1^{(1)} + \cos\upsilon_0\sigma_{11}^{(1)})\} + \cos\upsilon(X_{11} + X_{12} + y_{21})/c$$
$$w_0 = u_0/\upsilon_0$$

Следует отметить, что функции $Z_s(\upsilon)$ ($s = \overline{1, 4}$) и $\Phi_{nk}(t)$ ($k = 1, 2$; $n = 1, 2, \ldots$) удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_{nk}(\pm 1) = \Phi'_{nk}(\pm 1) = Z_s(\upsilon_j) = Z'_k(\upsilon_j) = 0 \quad (k, j = 1, 2) \tag{2.13}$$

$$Z'_r(\upsilon_j) = 0 \quad (r = 3, 4) \tag{2.14}$$

причем равенства (2.14) выполняются лишь тогда, когда в угловых точках области D_0 внешние касательные усилия взаимно равны.

Рассмотрим теперь задачу о разложении, например, функции $g_{11}(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ по нормированным, но не ортогональным функциям $h_{r1}(t)$ ($r = 1, 2, \ldots$)

$$g_{11}(t) = \sum_{r=1}^{\infty} e_r h_{r1}(t)$$

Помножим обе части этого равенства на $h_{i1}(t)$ и проинтегрируем его, тогда получим систему уравнений

$$\begin{gathered} e_i + \sum_{r=1}^{\infty} c_{ir} e_r = m_i \quad (i = 1, 2, \ldots) \\ c_{ir} = \int_{-1}^{1} h_{i1}(t) h_{r1}(t) dt, \quad m_i = \int_{-1}^{1} h_{i1}(t) g_{11}(t) dt \end{gathered} \tag{2.15}$$

Поскольку выполняются условия

$$\rho_i = 1 - \sum_{r=1}^{\infty} |c_{ir}| > 0, \quad |m_i| \le K\rho_i \quad (i = 1, 2, \ldots; \quad K = 1)$$

то система уравнений (2.15) является регулярной и имеет ограниченное решение $|e_i| \le K$, которое может быть найдено методом редукции [5]. Обобщая этот результат, заключаем, что и любая другая функция системы $\{g_{rk}(t)\}$ может быть разложена в ряд по функциям системы $\{h_{rk}(t)\}$. Поэтому в дальнейшем из двух систем функций будем использовать одну, например, систему $\{h_{rk}(t)\}$. Умножая обе части равенств (2.12) на функции $h_{rk}(t) \equiv (\Phi_{2r-1,k}(t) + \Phi_{2r,k}(t))/2$ и затем интегрируя, получим четыре независимые системы линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $\tilde{C}_{nk}$, $\tilde{D}_{nk}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{nk} I_{nr}^{(k)} = z_{rk}^{1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{nk} \kappa_{nk} I_{nr}^{(k)} = z_{rk}^{4} \tag{2.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_{nk} I_{nr}^{(k)} = z_{rk}^{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_{nk} \omega_{nk} I_{nr}^{(k)} = z_{rk}^{3} \tag{2.17}$$

$$I_{nr}^{(k)} = N_n^{(k)} (N_{2r}^{(k)} I_{n,2r}^{(k)} + N_{2r-1}^{(k)} I_{n,2r-1}^{(k)})/2 \quad (r = 1, 2, \ldots; \quad k = 1, 2)$$

$$z_{rk}^{s} = \int_{-1}^{1} Z_s(\upsilon) h_{rk}(t) dt, \quad \tilde{C}_{nk} = C_{nk} \Pi_{nk}(w_0), \quad \tilde{D}_{nk} = D_{nk} E_{nk}(w_0)$$

$$\kappa_{nk} = \Pi'_{nk}(w_0)/\Pi_{nk}(w_0), \quad \omega_{nk} = E'_{nk}(w_0)/E_{nk}(w_0) \quad (s = \overline{1,4})$$

Ниже приводится вещественная форма записи одной из систем уравнений (2.16) (при $k = 1$) относительно неизвестных A_r, B_r ($r = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{\infty} (A_s h_{rs} - B_s g_{rs}) = \frac{1}{2} z_{r1}^{1} \\ &\sum_{s=1}^{\infty} \{A_s (h_{rs} \eta_s - g_{rs} \theta_s) - B_s (h_{rs} \theta_s + g_{rs} \eta_s)\} = \frac{1}{2} z_{r1}^{4} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\tilde{C}_{2r,1} = A_r + iB_r, \quad \kappa_{2s,1} = \eta_s + i\theta_s = \delta_s + \{\delta_s(1 - \operatorname{th}\delta_s w_0) \times$$

$$\times (\operatorname{tg}\upsilon_0 \operatorname{th}u_0 + \operatorname{tg}\delta_s) + \upsilon_0(\operatorname{tg}\upsilon_0 \operatorname{th}\delta_s w_0 - \operatorname{th}u_0 \operatorname{tg}\delta_s)\}(\operatorname{tg}\upsilon_0 \operatorname{th}u_0 \operatorname{th}\delta_s w_0 - \operatorname{tg}\delta_s)^{-1}$$

$$h_{rs} = \int_{-1}^{1} h_{r1}(t) h_{s1}(t) dt = (N_{2s}^{(1)} I_{2s,r}^{(1)} + N_{2s-1}^{(1)} I_{2s-1,r}^{(1)})/2$$

$$g_{rs} = \int_{-1}^{1} h_{r1}(t) g_{s1}(t) dt = (N_{2s}^{(1)} I_{2s,r}^{(1)} - N_{2s-1}^{(1)} I_{2s-1,r}^{(1)})/(2i)$$

$$(\kappa_{2s,1} \approx \delta_s \equiv \delta_{2s,1})$$

Системы уравнений (2.16)–(2.18) эффективно решаются методом редукции, при этом для величин h_{rs}, g_{rs}, η_s, θ_s имеют место следующие асимптотические оценки (см. (2.3), (2.9), (2.10))

$$h_{rs}, g_{rs} = O(\ln^{3/2} s/s^4), \quad \eta_s = O(s), \quad \theta_s = O(\ln s) \quad (s \to \infty)$$

Подставляя в формулу (2.6) найденные постоянные $C_{nk} = \tilde{C}_{nk}/\Pi_{nk}(w_0)$, $D_{nk} = \tilde{D}_{nk}/E_{nk}(w_0)$ в итоге получим точное решение плоской задачи соответствующее граничным условиям (1.2) и (1.3), заданным на гиперболической и эллиптической частях границы области D_0. Ниже для сравнения приводится частное решение из [2], удовлетворяющее при $\upsilon = \pm\upsilon_0$ условиям $\sigma_\upsilon = \tau_{u\upsilon} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} F^N &= cX \operatorname{ch}u(\sin^2 \upsilon_0 \cos\upsilon + \upsilon \sin\upsilon)/\Delta^+ + cY \operatorname{sh}u(\upsilon \cos\upsilon - \cos^2 \upsilon_0 \sin\upsilon)/\Delta^- + \\ &+ 0.5 M_0 (2\upsilon b - \sin 2\upsilon)/\Delta \end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь $\{X, Y\}$ и M_0 – главный вектор и главный момент от внешней нагрузки $\sigma_{1j}(\upsilon)$, $\tau_{1j}(\upsilon)$ на эллиптической границе.

Решение (2.19) удовлетворяет граничным условиям (1.4) приближенно (в интегральном смысле) и может быть получено из (2.6), если в этой формуле положить $\sigma_n^j = \sigma_n^{jj} = \tau_n^j = \tau_n^{jj} = C_{nk} = D_{nk} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots; k, j = 1, 2$), $x_{11} = -Y$, $x_{21} = X$, $m_{11} = -M_0$, $C^+ = -C^- = c^{-2}M_0$ и отбросить линейную часть $(Xy - Yx + M_0)/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базаренко Н.А.* Операторный метод решения плоской задачи теории упругости // Изв. АН МТТ. 2000. № 3. С. 73–83.
2. *Neuber H.* Kerbspannungslehre. Berlin: Springer, 1958. 226 S.
3. *Ворович И.И., Малкина О.С.* Асимптотический метод решения задачи теории упругости о толстой плите // Тр. 6-ой Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 251–254.
4. *Агарев В.А.* Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 203 с.
5. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.