

УДК 531/534 : 57

© 2003 г. И.А. КОПЫЛОВ, П.А. КРУЧИНИН, И.В. НОВОЖИЛОВ

О РЕАЛИЗУЕМОСТИ ДВИЖЕНИЙ ПО Н.А. БЕРНШТЕЙНУ

Н.А. Бернштейном высказан ряд утверждений о характере движения млекопитающих [1]: произвольное движение формируется из набора штампов, стандартных форм движений, так называемых синергий; управление движением организовано по принципу обратных связей с иерархической по быстрдействию системой управления; синергии должны быть “устойчивы”.

В дальнейшем под синергиями будем понимать генетически запрограммированное изменение во времени конфигурации скелетного многозвенника, кинематическая избыточность которого доопределяется наложением своего рода сервосвязей, реализуемых мышцами.

Эти утверждения высказаны в общей форме и не доводятся до рекомендаций расчетно-аналитического свойства.

В литературе о локомоции млекопитающих в качестве силовых факторов, обеспечивающих движение, обычно рассматриваются моменты в шарнирных сочленениях скелетного многозвенника (см., например, [2, 3]). Чтобы при этом реализовать синергетическое движение, требуется задавать весьма строго согласованное управление всеми приводами, создающими моменты.

Между тем, движение млекопитающих реализуется за счет мышечного аппарата, обладающего рядом особенностей: мышца – сократительный элемент, способный создавать лишь стягивающие усилия; значительное число мышц – двухсуставные. Их сухожильные окончания крепятся к элементам скелетного многозвенника, разделенным двумя шарнирными сочленениями. Силовые воздействия таких мышц уже не моделируются моментами в шарнирах; относительные изменения длин мышц малы при изменениях конфигурации многозвенника “в большом”.

Ниже на примере глобальной сгибательной синергии человека показано, что перечисленные выше утверждения Н.А. Бернштейна выполняются, в значительной степени, за счет указанных анатомических и функциональных особенностей скелетно-мышечного аппарата, и реализация синергетического движения не предъявляет жестких требований к управлению.

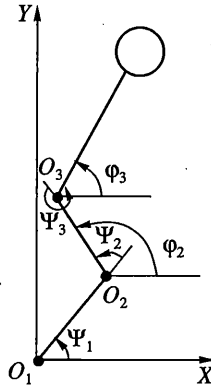
1. Глобальная сгибательная синергия (ГСС) – это простейшая, первая по онтогенезу синергия человека, при которой углы в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах изменяются в противоположных по отношению к соседям направлениях. При этом скелетный многозвенник человека в сагиттальной плоскости изменяется в характерной Z-образной конфигурации (фиг. 1).

В [4, 5] указывается, что движение при ГСС управляется низшими таламо-паллидарными уровнями центральной нервной системы. Поражения высших уровней при детском церебральном параличе (ДЦП) исключают возможность отдельного управления движением в суставах.

Больной ДЦП непроизвольно принимает Z-образную позу, если его ногу принудительно сгибать в коленном суставе в сагиттальной плоскости. Это является одним из основных клинических симптомов при ДЦП [5].

Можно предположить, что ГСС обеспечивает – как у больного, так и у здорового человека – автоматическое, без участия высших уровней, выполнение таких важнейших согласованных движений, как выпрямление, вставание, приседание.

Рассмотрим традиционную плоскую трехзвенную антропоморфную схему скелетного многозвенника: стопа, голень, бедро, корпус (фиг. 1). Голова и руки считаются неподвижными относительно корпуса, моделируемого твердым телом, стопа неподвижна. Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры вращения соответственного голеностопного, коленного и тазобедренного суставов, через $O_1O_2 = L_1, O_2O_3 = L_2$ длины голени и бедра, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углы поворотов звеньев относительно неподвижной системы координат O_1XYZ , через $\psi_1 = \varphi_1, \psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1, \psi_3 = \varphi_3 - \varphi_2$ – углы относительных поворотов.



Фиг. 1

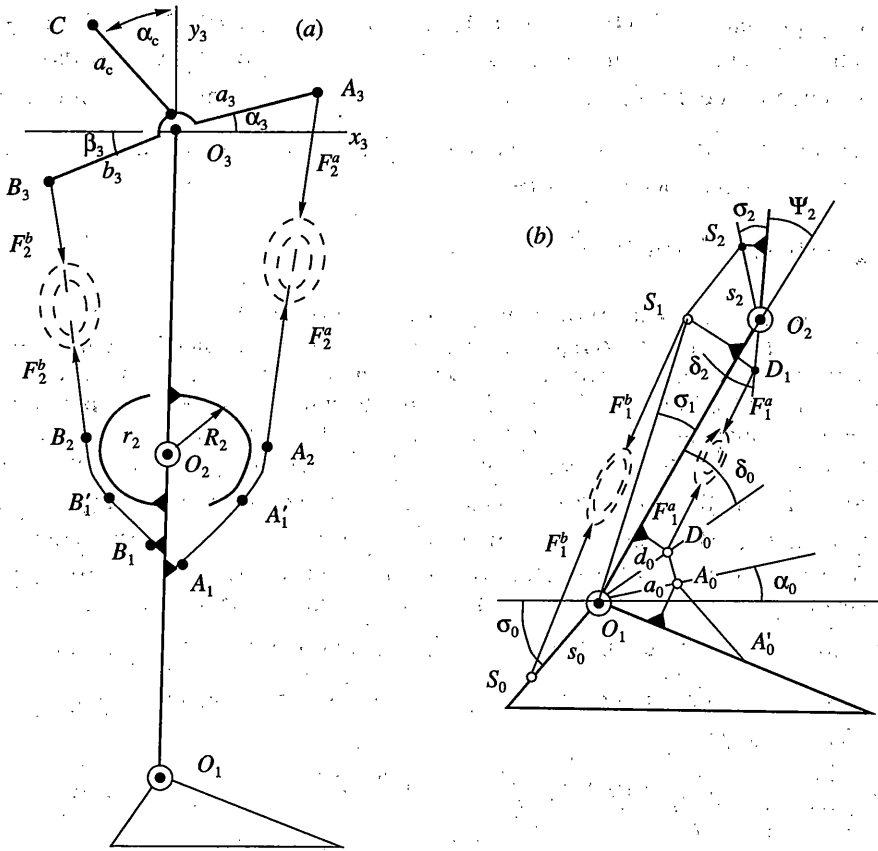
Будем рассматривать задачу реализуемости глобальной сгибательной синергии только за счет части мышц антагонистов, основу которых составляют двухсуставные мышцы голени и бедра. Подход описания движения с помощью только двухсуставных мышц использовался ранее при моделировании антропоморфных систем [6], однако особенности, связанные с наличием мышц антагонистов, в указанной работе не учитывались.

На фиг. 2 представлена расчетная модель основных мышц-антагонистов, посредством которых реализуется ГСС. На фигуре сплошными линиями изображены абсолютно жесткие элементы скелета и сухожильные окончания мышц, моделируемые нерастяжимыми нитями. Деформируемые, силовые элементы мышц изображены штрихами. Обозначения на фигуре поясняются по мере необходимости. В отличие от [6, 7], параметризуем наиболее существенные особенности крепления сухожильных окончаний мышц к костям, воспользовавшись анатомическими данными из [8, 9].

Получим выражения для скоростей изменения длин мышц. Передняя мышца бедра на фиг. 2, *a* моделирует в основном двухсуставную прямую мышцу. Ее верхнее сухожильное окончание крепится к передней ости подвздошной кости – точке A_3 . Зададим точку A_3 полярными координатами $a_3, \alpha_3 = \text{const}$ в системе координат $O_3X_3Y_3Z_3$, связанной с корпусом, как указано на фиг. 2, *a*. Нижнее сухожильное окончание крепится в точке A_1 к бугру в верхней части большеберцовой кости голени. Это окончание образовано сухожилием, включающим костный надколенник, который будем моделировать дугой A'_1A_2 окружности радиуса R_2 с центром в точке O_2 .

Скорость изменения длины l_2^a этой мышцы равна сумме скоростей ее слагаемых

$$\frac{d}{dt}l_2^a = \frac{d}{dt}A_1A'_1 + \frac{d}{dt}(\cup A'_1A_2) + \frac{d}{dt}A_2A_3 \quad (1.1)$$



Фиг. 2

В силу предположения о нерастяжимости сухожилий

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 = 0 \quad \frac{d}{dt} (\cup \mathbf{A}'_1 \mathbf{A}_2) = \psi_2 R \quad (1.2)$$

Третье слагаемое в (1.1) равно проекции на направление $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$ разности скоростей точек \mathbf{A}_3 и \mathbf{A}_2 . Параметры рассматриваемой антропоморфной модели отвечают соотношениям $R_2, a_3 \ll L_2$. Поэтому отрезки $\mathbf{O}_2 \mathbf{O}_3$ и $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$ близки по направлению. Пренебрегая в ходе выкладок их малым угловым рассогласованием, получим

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \psi_3 a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3) \quad (1.3)$$

Подстановка (1.2), (1.3) в (1.1) дает

$$\frac{d}{dt} l_2^a = \psi_2 R + \psi_3 a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3) \quad (1.4)$$

Заднюю группу двухсуставных мышц бедра (полусухожильную, полуперепончатую и длинную головку двуглавой мышцы бедра) моделируем мышцей, верхнее сухожилие которой крепится в точке \mathbf{B}_3 ниже оси тазобедренного сустава в районе седа-

лищного бугра (фиг. 2, а). Нижнее сухожилие крепится в точке B_1 к бугру в верхней части большеберцовой кости голени. Это сухожилие огибает снизу выпуклость верхнего конца большеберцовой кости по дуге $B_1^1 B_2$, моделируемой окружностью радиуса r_2 с центром в точке O_2 . Обозначим через l_2^b длину этой мышцы. Точно такие же вычисления, как ранее, дают выражение

$$\frac{d}{dt}l_2^b = -\psi_2 r_2 - \psi_3 b_3 \cos(\psi_3 + \beta_3) \quad (1.5)$$

Фигурирующие в (1.5) параметры b_3, β_3 введены на фиг. 2, а.

Группу передних мышц голени составляют передняя большеберцовая мышца и длинный разгибатель большого пальца. Эти мышцы сверху крепятся к верхним частям большой и малой берцовых костей голени. Нижние сухожилия этих мышц проходят через фиброзные каналы верхних и нижних голеностопных связок, а затем крепятся к костям стопы и пальцев. На фиг. 2, в точки крепления к стопе и голени обозначены через A_0^1 и D_1 . Связи, налагаемые в голеностопном суставе, моделируются двумя кольцами нулевого размера в точках A_0 и D_0 , жестко скрепленных соответственно со стопой и голенью. Положение этих точек относительно стопы и голени зададим расстояниями a_0, d_0 и углами α_0, δ_0 , как указано на фиг. 2, в.

Дуги $A_0^1 A_0$ и $D_0 D_1$ имеют неизменяемые длины, поэтому скорость изменения длины l_1^a этой мышцы равна проекции скорости точки D_0 на направление $A_0 D_0$. Прделав выкладки, получим

$$\frac{d}{dt}l_1^a = \frac{(\mathbf{V}_{D_0}, \mathbf{A}_0 \mathbf{D}_0)}{|\mathbf{A}_0 \mathbf{D}_0|} = \frac{a_0 d_0 \psi_1 \sin(\psi_1 - \alpha_0 - \delta_0)}{|\mathbf{A}_0 \mathbf{D}_0|} \quad (1.6)$$

В задней группе мышц голени основную роль играют двухсуставные головки икроножной мышцы. Ее верхнее сухожильное окончание крепится к нижнему концу бедренной кости в точке S_2 и огибает верхний конец большеберцовой кости голени. В случае полностью согнутой в колене ноги сухожилие теряет контакт с голенью. Нижнее сухожильное окончание переходит в ахиллово сухожилие, которое крепится в точке S_0 к задней поверхности бугра пяточной кости стопы. Изменение направления сухожилия в колене моделируется блоком нулевого радиуса в точке S_1 , жестко скрепленной с голенью. Положение точек S_0, S_1, S_2 относительно стопы, голени и бедра зададим расстояниями s_0, s_1, s_2 и углами $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, как указано на фиг. 2, в. Для антропоморфной модели величины $s_0, \Delta_1 = (L_1 - s_1) \ll L_1$ и $\sigma_1 \ll 1$.

Скорость изменения длины l_1^b этой мышцы вычисляется как сумма проекции на направление $S_0 S_1$ скорости V_{s_1} точки S_1 за счет вращения голени и проекции на направление $S_1 S_2$, скорости V_{s_2} точки S_2 за счет вращения бедра относительно голени. Пренебрегая в ходе выкладок величинами второго порядка малости по $s_0/L_1, \Delta_1/L_1, \sigma_1$, получим для значений ψ_2 , при которых сохраняется контакт сухожилия в точке S_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}l_1^b &= \frac{1}{|\mathbf{S}_0 \mathbf{S}_1|} (\mathbf{V}_{s_1}, \mathbf{S}_0 \mathbf{S}_1) + \frac{1}{|\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2|} (\mathbf{V}_{s_2}^r, \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2) = \\ &= -\psi_1 s_0 \sin(\psi_1 - \sigma_0 + \sigma_1) - \frac{1}{|\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2|} [\psi_2 s_2 (\Delta_1 \sin(\psi_2 + \sigma_2) + L_1 \sin \sigma_1 \cos(\psi_2 + \sigma_2))] \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. Рассматривая в качестве обобщенных координат углы ψ_1, ψ_2, ψ_3 , вычислим обобщенные силы $Q_{\psi_1}, Q_{\psi_2}, Q_{\psi_3}$. В состав активных сил включим силы, развиваемые мышцами, представленные на фиг. 2, а также силы тяжести. Будем полагать, что главный вектор последних приложен в точке C , фиксированной относительно корпуса. Ее положение зададим длиной a_c и углом α_c , как указано на фиг. 2, а.

Возможная мощность активных сил

$$N_v = -mgV_{cyv} - V_{1v}^a F_1^a - V_{1v}^b F_1^b - V_{2v}^a F_2^a - V_{2v}^b F_2^b \quad (2.1)$$

$$V_{cyv} = L_1 \dot{\psi}_{1v} \cos \psi_1 + L_2 (\dot{\psi}_{1v} + \dot{\psi}_{2v}) \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_c (\dot{\psi}_{1v} + \dot{\psi}_{2v} + \dot{\psi}_{3v}) \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c) \quad (2.2)$$

Здесь m – масса системы, V_{cyv} – вертикальная проекция возможной скорости центра масс, $\dot{\psi}_{1v}, \dot{\psi}_{2v}, \dot{\psi}_{3v}$ – возможные скорости обобщенных координат, $V_{1v}^a, \dots, V_{2v}^b$ – возможные скорости удлинения мышц, выражения для которых получаются из (1.4)–(1.7) переиндексацией $\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3$ на $\dot{\psi}_{1v}, \dot{\psi}_{2v}, \dot{\psi}_{3v}$. Из (2.1), (2.2), (1.4)–(1.7) получим

$$Q_{\psi_1} = -mgx_c + M_{\psi_1} \quad (2.3)$$

$$Q_{\psi_2} = -mg[L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_c \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c)] + M_{\psi_2}$$

$$Q_{\psi_3} = -mg[a_c \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c)] + M_{\psi_3}$$

$$x_c = L_1 \cos \psi_1 + L_2 \cos(\psi_1 + \psi_2) + a_c \cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \alpha_c) \quad (2.4)$$

Здесь x_c – координата центра масс C , а $M_{\psi_1}, M_{\psi_2}, M_{\psi_3}$ – моменты в осях шарниров, создаваемые мышечными усилиями

$$M_{\psi_1} = -F_1^a \frac{a_0 d_0}{|A_0 D_0|} \sin(\psi_1 - \alpha_0 - \delta_0) + F_1^b s_0 \sin(\psi_1 - \sigma_0 - \sigma_1) \quad (2.5)$$

$$M_{\psi_2} = -F_2^a R_2 + F_2^b r_2 + F_1^b \frac{s_2}{L_1} [\Delta_1 \sin(\psi_2 + \sigma_2) + L_1 \sin \sigma_1 \cos(\psi_2 + \sigma_2)]$$

$$M_{\psi_3} = -F_2^a a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3) + F_2^b b_3 \cos(\psi_2 + \beta_3)$$

В выражениях трех обобщенных сил (2.4), (2.5) входят четыре силы $F_1^a, F_1^b, F_2^a, F_2^b$. Задача доопределяется через управление посредством задания законов формирования этих сил как функций трех обобщенных координат.

3. В исследовании задачи удастся продвинуться, если принять ряд дополнительных допущений. Из (2.3) видно, что момент силы тяжести на плече x_c и момент в голеностопном суставе M_{ψ_1} входят аддитивно в выражение Q_{ψ_1} . Можно поэтому ожидать, что движение по x_c определяется, главным образом, управлением M_{ψ_1} . Это соображение согласуется с результатами из [10], где приводятся экспериментальные данные, из которых следует, что точность стабилизации по x_c вертикальной равновесной позы – величина порядка долей сантиметра, стабилизация обеспечивается за счет, главным образом, мышечных сил, создающих момент в голеностопе и что эти силы весьма малы. В [10] показано, наконец, что характерное время режима стабилизации – величина порядка десятой доли секунды.

Движение системы в режиме ГСС при, например, вставании или приседе, имеют существенно большие характерные перемещения – порядка долей метра и характерные времена – порядка секунды.

Результат такого “жесткого” управления по x_c будем моделировать сервосвязью $x_c = 0$, налагаемой на систему. В отсутствие внешних возмущений в горизонтальном направ-

лении при этом будем полагать $M_{\psi_1} = 0$, $F_1^a = 0$, $F_1^b = 0$. Такую модель несложно обосновать при помощи методов фракционного анализа [11], если задаться одним из вариантов обратных связей по x_c , обсуждаемых в [10].

Далее будем считать, что ноги безынерционны, длины голени и бедра одинаковы ($L_1 = L_2 = L$), и центр масс – расположен в точке O_3 ($a_c = 0$). Эти предположения несущественны для результатов, но сильно упрощают вычисления.

Наложение сервосвязи $x_c \equiv 0$ оставляет независимыми две координаты. Выбрав за независимые ψ_2, ψ_3 , из (2.4) при $L_1 = L_2 = L$, $a_c = 0$ получим $\psi_1 = \pi/2 - \psi_2/2$.

Найдем равновесные положения сформированной системы. Подставим M_{ψ_2}, M_{ψ_3} из (2.5) в (2.4) и приравняем нулю выражения для Q_{ψ_2}, Q_{ψ_3} :

$$\begin{aligned} -F_2^a R_2 + F_2^b r_2 - mgL \cos(\psi_1 + \psi_2) &= 0 \\ -F_2^a a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3) + F_2^b b_3 \cos(\psi_3 + \beta_3) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Разрешим систему (3.1) относительно F_2^a, F_2^b . Матрица коэффициентов W при этих неизвестных имеет вид

$$W = \begin{vmatrix} -R_2 & r_2 \\ -a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3) & b_3 \cos(\psi_3 + \beta_3) \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Из (3.1) получим

$$\begin{aligned} F_2^a &= \frac{mgL \cos(\psi_1 + \psi_2) b_3 \cos(\psi_3 + \beta_3)}{\Delta} \\ F_2^b &= \frac{mgL \cos(\psi_1 + \psi_2) a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3)}{\Delta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\Delta = |W| = -R_2 b_3 \cos(\psi_3 + \beta_3) + r_2 a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3)$$

Из (3.3) вытекает оценка условия, при котором $F_2^a, F_2^b > 0$, т.е. мышцами развиваются стягивающие усилия. На Z -образных (см. фиг. 1) движениях ГСС в (3.3) будет $\psi_1 + \psi_2 = \varphi_2 \geq \pi/2$. Ограничимся конфигурациями, для которых $|\psi_3 + \alpha_3|, |\psi_3 + \beta_3| \leq \pi/2$.

Тогда $F_2^a, F_2^b > 0$, если

$$\Delta = -R_2 b_3 \cos(\psi_3 + \beta_3) + r_2 a_3 \cos(\psi_3 + \alpha_3) < 0 \quad (3.4)$$

Считая для простоты $\beta_3 = \alpha_3$, что соотносится и с анатомическими данными здорового человека [5], получим

$$R_2 b_3 > r_2 a_3 \quad (3.5)$$

Чтобы оценить возможность реализации равновесных значений в (3.3), необходимо задать зависимость сил F_2^a, F_2^b от позиционных переменных. Воспользуемся моделью мышечной силы из [12]. Идеализированная статическая зависимость силы F от длины l мышцы записывается в виде

$$F(l, \lambda) = \begin{cases} 0, & l < \lambda \\ K(l - \lambda), & l \geq \lambda \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь $K = \text{const}$ – крутизна характеристики. Ее величина определяется так называемым стретч-эффектом – иннервацией мышечных волокон за счет внутримышечных обратных связей. Величина λ – сдвиг нуля характеристики – определяется высшими отделами нервной системы и является управляющим параметром силы мышцы.

Приравняем величины потребных сил F_2^a, F_2^b из (3.3) величинам сил, задаваемых в соответствии с характеристиками вида (3.6):

$$\begin{aligned} F_2^a(\psi_2, \psi_3) &= F_2^a(l_2^a(\psi_2, \psi_3), \lambda_2^a) \\ F_2^b(\psi_2, \psi_3) &= F_2^b(l_2^b(\psi_2, \psi_3), \lambda_2^b) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где λ_2^a, λ_2^b – управляющие параметры активности мышц. Предполагается, что зависимости l_2^a, l_2^b от ψ_2, ψ_3 в правых частях (3.7) известны: получены либо геометрическим построением, либо интегрированием уравнений (1.4), (1.5).

Два уравнения (3.7) зависят от четырех величин: ψ_2, ψ_3 и λ_2^a, λ_2^b . В [12] обсуждаются два варианта биометрии мышечных усилий:

1. “Изометрический” режим, когда длина мышцы l фиксирована, а изменяется ее управляющий параметр λ . Применительно к рассматриваемой задаче это выглядит как своего рода обратная постановка, когда задается “поза” – равновесные углы ψ_2^0, ψ_3^0 , и по (3.7) определяются управления λ_2^a, λ_2^b .

2. “Изотонический” режим, когда задается параметр λ и определяется l . При этом в (3.7) по заданным управлениям λ_2^a, λ_2^b находятся равновесные углы ψ_2^0, ψ_3^0 .

Будем далее считать, что равновесные значения $\psi_2^0, \psi_3^0, \lambda_2^a, \lambda_2^b$, удовлетворяющие уравнениям (3.7) так или иначе, в “изометрическом” либо “изотоническом” режиме, определены.

Исследуем устойчивость положения равновесия. При этом будем учитывать так называемую динамическую составляющую параметра λ , которая по [12] считается пропорциональной скорости удлинения мышцы. При этом в (3.6):

$$\lambda = \lambda^0 - \mu dl/dt \quad (3.8)$$

где $\mu = \text{const}$, а λ^0 – равновесное значение параметра.

Введем малые отклонения $\Delta\psi_2, \Delta\psi_3$ углов ψ_2, ψ_3 от их равновесных значений. Проинтегрируем уравнения (1.4), (1.5) принимая равновесные значения переменных за начальные. Полученные зависимости вариаций длин мышц $\Delta l_2^a, \Delta l_2^b$ от $\Delta\psi_2, \Delta\psi_3$, а также вариации по (2.3), (2.4), (2.5), (3.6) обобщенных сил и мышечных усилий запишем в матричной форме

$$\Delta l = V\Delta\psi, \quad \Delta F = K(\Delta l + M d\Delta l/dt) \quad (3.9)$$

$$\Delta Q = W\Delta F + \Delta W F^0 + G\Delta\psi$$

$$\Delta\psi = \begin{Bmatrix} \Delta\psi_2 \\ \Delta\psi_3 \end{Bmatrix}, \quad \Delta l = \begin{Bmatrix} \Delta l_2^a \\ \Delta l_2^b \end{Bmatrix}, \quad \Delta F = \begin{Bmatrix} \Delta F_2^a \\ \Delta F_2^b \end{Bmatrix}, \quad \Delta Q = \begin{Bmatrix} \Delta Q_{\psi_2} \\ \Delta Q_{\psi_3} \end{Bmatrix}$$

$$K = \begin{Bmatrix} K_2^a & 0 \\ 0 & K_2^b \end{Bmatrix}, \quad M = \begin{Bmatrix} \mu_2^a & 0 \\ 0 & \mu_2^b \end{Bmatrix}, \quad F^0 = \begin{Bmatrix} F_2^a(\psi_2^0, \psi_3^0) \\ F_2^b(\psi_2^0, \psi_3^0) \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$G = 0.5mgL \sin \varphi_2^0 \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad V = -W^T, \quad \varphi_2^0 = \psi_2^0 + \psi_3^0$$

где T – знак транспонирования.

Исключив в (3.9), (3.10) промежуточные величины, запишем

$$\Delta Q = [WKV + G]\Delta\psi + WKMV\frac{d}{dt}\Delta\psi \quad (3.11)$$

Здесь WKV по (3.10) – симметричная, отрицательно определенная матрица, задающая систему потенциальных сил вблизи устойчивого положения равновесия, матрица $WKMV$ задает систему сил линейного трения с полной диссипацией.

Если в (3.11) за счет большой величины коэффициентов K_2^a , K_2^b перечисленные силы доминируют, то равновесное положение системы асимптотически устойчиво. Слагаемые с G в (3.11), вообще говоря, могут изменить характер устойчивости, если они соизмеримы со слагаемыми с WKV . Порог соизмеримости дается по (3.10) оценкой

$$K_* a_*^2 \sim mgL \quad (3.12)$$

где K_* , a_* – характерные значения коэффициентов жесткости мышечных сил и геометрических параметров R_2 , r_2 , a_3 , b_3 . Приняв $L \sim 0.5$ м, $m \sim 70$ кг, $a_* \sim 0.05$ м, получим из (3.12):

$$K_* \sim mgL/a_*^2 \sim 10^5 \text{ Н/м} \quad (3.13)$$

что по порядку величины совпадает с данными из [12].

Легко получить оценку ω_* собственной частоты малых колебаний вблизи равновесных положений для полученной оценки величины K_* . Для чисел из (3.13) имеем $\omega_* \sim (K_*/m_*)^{0.5} \sim 40$ 1/сек, что близко к частотам их называемого физиологического тремора из [10, 12]. Характерное время T_1 таких высокочастотных движений – величина порядка 0.1 секунды. Таким образом, предположение Н.А. Бернштейна об “устойчивости” синергетических движений может быть сформулировано в терминах ляпуновской устойчивости.

Заметим, что в рамках модели (3.6) теперь можно было бы отказаться от предположения о сервосвязи $x_c \equiv 0$, принятого ранее. При этом равновесное положение системы будет определяться не только соотношениями (3.7), но и дополнительным уравнением $x_c = 0$. Размерность системы уравнений увеличится, а действующие силы будут иметь такую же структуру, что и в (3.11). Поэтому высказанные соображения об устойчивости равновесного положения остаются в силе.

Выскажем соображения о возможности переноса полученных статических оценок на случай движения в режиме ГСС. Эти движения, как было сказано, совершаются на характерных временах T_2 порядка секунды. При помощи методов фракционного анализа можно показать (см. похожую задачу в [11]), что медленные движения ГСС могут рассматриваться как квазистатические и описываться “вырожденными” по А.Н. Тихонову уравнениями, совпадающими с (3.7). Быстрые движения вблизи квазистатического режима при этом описываются “присоединенной” по А.Н. Тихонову системой, совпадающей с уравнениями малых колебаний, правая часть которых задается (3.11). Погрешность такого раздельного описания медленных и быстрых составляющих оценивается величиной порядка отношения характерных времен этих составляющих [11]. Для рассматриваемой задачи – это величина порядка $T_1/T_2 \sim 0.1$.

3. Оценим характер изменения во времени конфигурации многозвенника в квазистатическом движении. Пусть за счет изменения управляющих параметров λ_2^a , λ_2^b в (3.7) длины l_2^a , l_2^b мышц изменяются во временном масштабе T_2 со скоростями V_2^a , V_2^b . Примем, как и ранее, $\alpha_3 = \beta_3$. Разрешив уравнения (1.4), (1.5) относительно ψ_2 , ψ_3 , получим

$$\begin{aligned} \psi_2 &= -\cos(\psi_3 + \alpha_3)[V_2^a b_3 + V_2^b a_3]/\Delta \\ \psi_3 &= [V_2^a r_2 + V_2^b R_2]/\Delta, \quad \Delta = \det V \end{aligned} \quad (4.1)$$

Характер изменения конфигурации зависит от соотношения знаков величин ψ_2 , ψ_3 . При разных знаках конфигурация изменяется Z-образно, при одинаковых – нет. Поделив почленно уравнения из (4.1), получим

$$\frac{\dot{\psi}_2}{\dot{\psi}_3} = -\cos(\psi_3 + \alpha_3)\Psi, \quad \Psi = \frac{V_2^a b_3 + V_2^b a_3}{V_2^a r_2 + V_2^b R_2} \quad (4.2)$$

Поскольку в п. 3 принималось $\cos(\psi_3 + \alpha_3) > 0$, то знак отношения $\dot{\psi}_2/\dot{\psi}_3$ по (4.2) определяется знаком величины Ψ .

Дальнейшие оценки ситуации невозможны без дополнительных предположений о виде dl_2^a/dt , dl_2^b/dt . Примем для них пропорциональную зависимость

$$V_2^a = \Lambda V_2^b \quad (4.3)$$

$$\Psi = (b_3 + \Lambda a_3)/(r_2 + \Lambda R_2) \quad (4.4)$$

Исследуем условия выполнения неравенств $\Psi > 0$ или $\Psi < 0$ в зависимости от величины Λ . При $\Lambda > 0$ по (4.3) мышцы-антагонисты бедра удлинятся либо сократятся одновременно, а при $\Lambda < 0$ – одна из мышц сокращается, а другая удлиняется. Будем учитывать, что параметры b_3 , a_3 , r_2 , R_2 должны удовлетворять неравенству (3.5). Несложный анализ перечисленных неравенств показывает, что случай $\Psi > 0$ (Z-образное изменение) реализуется либо при $\Lambda > -r_2/R_2$, либо при $\Lambda < -b_3/a_3$, что предоставляет весьма широкие возможности варьирования скоростей удлинения мышц. Запретным для случая $\Psi > 0$ является лишь диапазон

$$-b_3/a_3 < \Lambda < -r_2/R_2 \quad (4.5)$$

ограниченный по сравнению с предыдущим случаем.

Противоположный случай $\Psi < 0$ (не Z-образное изменение) реализуем только в диапазоне (4.5). Отсюда видно, что Z-образная конфигурация предпочтительна по возможностям, представляемым для управления движением посредством мышц.

Особенно простой становится задача, если в (4.3) принять $\Lambda = \text{const}$. Тогда в (4.4), (4.2) будет $\Psi = \text{const}$, и уравнение (4.2) после интегрирования принимает вид

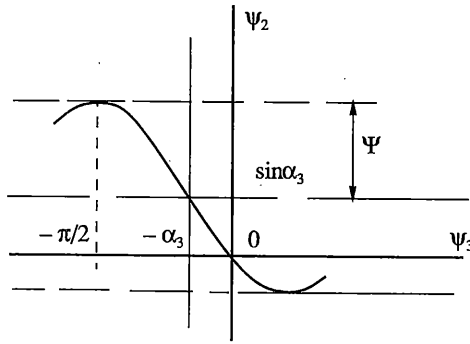
$$\psi_2 - \psi_2(0) = -\Psi[\sin(\psi_3 + \alpha_3) - \sin(\psi_3(0) + \alpha_3)] \quad (4.6)$$

Здесь $\psi_2(0)$, $\psi_3(0)$ – начальные значения углов.

Примем для определенности, что скелетным многозвенником совершается движение типа приседания, из первоначально выпрямленного положения. Тогда в (4.6) будет $\psi_2(0) = \psi_3(0) = 0$. Вид зависимости $\psi_2 = \psi_2(\psi_3)$ для этого случая представлен на фиг. 3. При анализе этого графика следует учитывать, что значения $\psi_2 < 0$ не допускаются “конструкцией” коленного сустава.

По графику фиг. 3 можно сделать выводы: при сделанных предположениях скелетный многозвенник обладает своеобразной Z-образной инвариантностью своей конфигурации для весьма широкого диапазона своих движений. Эта особенность характерна для синергий; значение параметра $\alpha_3 > 0$ расширяет диапазон движений, допускаемых ограничениями $\psi_2 > 0$, $\psi_3 < 0$.

5. Приведем результаты численного счета, подтверждающего правдоподобность оценок, полученных выше для принятой модели скелетно-мышечного аппарата. Рассматривается приседание многозвенника из вертикального положения. Числовые значения параметров многозвенника выбраны такими: $m_1 = 12$ кг, $m_2 = 18$ кг, $m_3 = 50$ кг,



Фиг. 3

$L_1 = 0.5$ м, $L_2 = 0.45$ м, $L_3 = 0.6$ м, $R_2 = 0.07$ м, $r_2 = 0.06$ м, $\alpha_3 = \beta_3 = 0.07$ м, $a_3 = 0.06$ м, $b_3 = 0.09$ м (m_1, m_2, m_3 – массы звеньев). Звенья считались однородными стержнями. Выбор R_2, r_2, a_3, b_3 обеспечивает выполнение условий (3.5) и (4.5). Для рассматриваемого многозвенника составляются динамические уравнения движения. Поставим обратную задачу динамики. Будем считать, что центр масс многозвенника движется вертикально с постоянным ускорением A_c : $x_c = 0, A_c = -0.5$ м/с².

Ускорение выбрано относительно малым, что определяет время приседания порядка секунды, как оговорено выше. В качестве третьего условия обратной постановки потребуем, чтобы кинетический момент многозвенника оставался нулевым во время движения. Положим момент в голеностопном суставе равным нулю. В начальный момент времени все звенья вертикальны, и скорость центра масс многозвенника равна нулю. Набор соотношений обратной постановки определяет зависимости углов ψ_1, ψ_2, ψ_3 от времени, а по (1.4), (1.5) находятся изменения длин l_2^a, l_2^b двухсуставных мышц бедра. Усилия F_1^a, F_1^b мышц голени полагаются равными нулю и из (2.5)

вычисляются усилия F_2^a, F_2^b мышц бедра. Конфигурация многозвенника на заданном движении имела Z-образный характер. Все угловые переменные изменялись монотонно: за одну секунду угол ψ_1 изменял значения от 90° до 66°, ψ_2 – от 0° до 86°, ψ_3 – от 0° до 97°. Длина передней мышцы бедра увеличилась на 0.006 м, длина задней – на 0.043 м. Отношение Λ скоростей изменения длин мышц за время движения менялось в относительно малом интервале от 0.14 до 0.22, что по (4.2) отвечает положительному значению величины Ψ и, следовательно, Z-образности движения.

Далее определялись силовые характеристики на заданном движении. Усилия F_2^a, F_2^b вычисляются из (2.3), (2.5) в предположении, что F_1^a, F_1^b равны нулю. Найденные величины F_2^a, F_2^b на каждом шаге $\Delta T = 10^{-3}$ с. вычислений подставлялись в левые части уравнений (3.7). Каждому положению многозвенника отвечает свое значение параметра λ в модели (3.6). Разность $l - \lambda$ в (3.7) представлялась для каждой мышцы в виде

$$l - \lambda = \Delta l_0 + vt + \Delta l \quad (5.1)$$

где Δl_0 – значение разности $l - \lambda$ в начале движения, vt – скоростная составляющая управляющего параметра ($v = d\lambda/dT = \text{const}$), Δl – изменение длины мышцы во время

движения за счет конфигурации. Методом наименьших квадратов на всем времени движения были определены параметры K , Δl_0 , v для каждой из двух мышц бедра. В результате получены следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} K^a &= 7.5 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, & \Delta l_0^a &= 0.022 \text{ м}, & v^a &= 0.021 \text{ м/с} \\ K^b &= 2.7 \cdot 10^4 \text{ Н/м}, & \Delta l_0^b &= 0.057 \text{ м}, & v^b &= 0.024 \text{ м/с} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Значения коэффициентов жесткости совпадают по порядку с оценкой (3.12). Для каждого момента времени во время движения усилия в мышцах, вычисляемые по (2.3), (2.5), отличаются от величин, вычисляемых с помощью модели (3.6), (5.1) с коэффициентами (5.2), не более чем на 3%.

Решалась также и прямая задача динамики. Мышечные усилия моделировались в соответствии с (3.6), (3.7) и (5.1). “Числовые” значения параметров взяты из решения (5.2) задачи идентификации. За начальное положение принималась вертикальная стойка. За первую секунду движения ускорение центра масс многозвенника в прямой задаче отклонялось от 0.5 м/с^2 , заданного в обратной задаче, не более чем на 0.03 м/с^2 . Угловые переменные ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 при решении прямой задачи отличались от соответствующих величин при решении обратной задачи не более чем на 0.4° .

Таким образом, в работе показано, что в рамках рассматриваемой постановки:

1. Движение на ГСС иерархично и складывается из “медленного” изменения конфигурации скелетного многозвенника и “быстрых” по отклонениям от нее.
2. ГСС реализуется простым набором (5.2) параметров управления.
3. ГСС устойчива по Ляпунову для положения равновесия и устойчива в смысле А.Н. Тихонова для медленных составляющих движения.
4. На ГСС выполняются ограничения о сократительном характере усилия мышцы и относительно малом ее удлинении.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00755).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берништейн Н.А. Физиология движений и активность. М.: Наука, 1990. 495 с.
2. Белецкий В.В. Двухногая ходьба М.: Наука, 1984. 286 с.
3. Болотин Ю.В., Новожилов И.В. Управление походкой двуногого шагающего аппарата // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 3. С. 47–52.
4. Журавлев А.М. и др. Хирургическая коррекция позы и ходьбы при детском церебральном параличе. Ереван: Айастан, 1986. 229 с.
5. Перхурова И.С., Лузинович В.М., Сологубов Е.Г. Регуляция позы и ходьбы при детском церебральном параличе и некоторые способы коррекции. М.: Кн. палата, 1996. 248 с.
6. Blickhan R. Elastic mechanisms in fast legged locomotion // Proc. Europ. Mechanics Colloq. Euro-mech 373. Biology and Technology of Walking. Munich, Germany, 1998. P. 3–10.
7. Redoty A. Motor coordination and neuromuscular activities in human locomotion // Biomechanics of Motion. CISM courses and lectures № 263. Wien; NYork: Springer, 1980. P. 79–129.
8. Привес М.Г., Лысенков Н.К., Бушкович В.И. Анатомия человека. Л.: Медицина, 1974. 672 с.
9. Иваницкий М.Ф. Анатомия человека. М.: Физкультура и спорт, 1969. 280 с.
10. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека. М.: Наука, 1965. 256 с.
11. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во мех. мат. факультета МГУ, 1991. 188 с.
12. Фельдман А.Г. Центральные и рефлекторные механизмы управления движениями. Наука, 1979. 184 с.