

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ НОВОГО ГАСИТЕЛЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЫСОТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

С привлечением неголономной механики Апеля численно исследовано динамическое поведение нового гасителя вынужденных низкочастотных колебаний высотных сооружений. Гаситель представляет собой механическую систему “тяжелый шар в сферической выемке”, установленную на массивном несущем теле, причем последнее вместе с выемкой имеет возможность поворачиваться вокруг неподвижной оси на малый угол φ . Показано, что изучаемая механическая система относится к классу неголономных систем Чаплыгина. Выполнен численный анализ вынужденных колебаний исследуемой системы под действием периодической силы при резонансе.

1. Постановка задачи, геометрические и кинематические соотношения. В настоящее время в связи с ростом высоты строящихся зданий и сооружений (в особенности башенного типа) актуальной стала проблема снижения уровня их колебаний, вызванных динамическими нагрузками различной природы: ветровыми, сейсмическими, взрывными, промышленными и т.п. воздействиями. Для снижения уровня таких колебаний используются разнообразные динамические гасители колебаний (ДГК), самыми перспективными из которых являются маятниковые и катковые ДГК [1].

Экспериментальные исследования динамического поведения таких гасителей доказали их эффективность при демпфировании вынужденных низкочастотных колебаний высотных сооружений ($\omega = 0.8-1.6$ рад/с) [1], но широко внедрению в практику виброгашения препятствует отсутствие необходимого теоретического обоснования их применения в составе динамической системы “ДГК – высотное сооружение”.

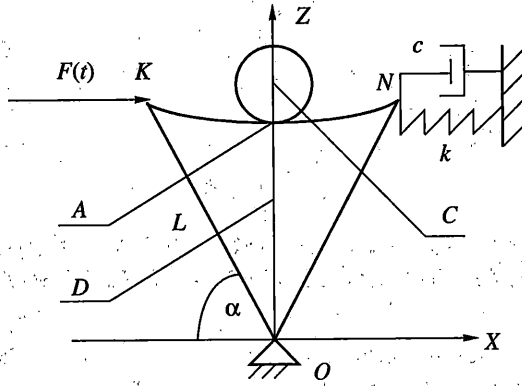
Наиболее интересной и не исследованной в этой части является система виброгашения “тяжелый шар в сферической выемке”, причем последняя вместе с массивным несущим телом массой M может вращаться вокруг неподвижной оси O (фиг. 1).

Таким образом, в статье рассматривается плоская задача о вынужденных колебаниях указанной динамической системы при внешнем силовом воздействии, заданном в виде гармонической функции со стабильной угловой частотой ω_b :

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_b t) \quad (1.1)$$

При этом движение шара в сферической выемке должно осуществляться без скольжения, что является необходимым условием для реализации процесса виброгашения вынужденных колебаний. В вертикальной плоскости несущее тело массой M удерживается упругим элементом k , который в первом приближении моделирует изгибную жесткость вертикального строения типа телебашни. Трение в шарнире O не учитывается. Для учета демпфирования, обусловленного внутренним трением из-за несовершенной упругости материалов высотного сооружения, введем вязкий демпфер с коэффициентом демпфирования c [2].

До этого рассматривались задачи неголономной механики о движении однородного тяжелого шара без скольжения по различным неподвижным поверхностям второ-



Фиг. 1

го порядка (сфера, горизонтальный и вертикальный цилиндры, вертикальный конус, параболоид вращения, трехосный эллипсоид) [3–7]. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что выемка вместе с несущим телом массой M имеет возможность поворачиваться на малый угол φ относительно неподвижной оси O (фиг. 2). При этом основное внимание в этом исследовании уделено численному исследованию влияния движений тяжелого шара в сферической выемке на снижение амплитуды колебаний несущего тела массой M при резонансе.

Перейдем к построению уравнений кинематической связи, стесняющей движение шара в сферической выемке несущего тела массой M . Запишем некоторые геометрические соотношения, которые можно получить непосредственно из фиг. 2 (здесь периодическая сила и упругий элемент с демпфером не показаны).

$$\begin{aligned} \mathbf{OB} &= \mathbf{OO}_1 - \mathbf{BO}_1, \quad |\mathbf{OO}_1| = b \\ OH &= |\mathbf{OO}_1| \cos(\pi/2 - \varphi) = b \sin \varphi, \quad O_1H = b \cos \varphi; \quad OD = \rho, \quad AO_1 = R, \\ BC &= r, \quad \mathbf{BO}_1 = R\mathbf{n} \\ \angle BO_1A &= \eta, \quad \angle ZOO_1 = \varphi, \quad \angle O_1OH = \pi/2 - \varphi \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внутренней нормали в точке B ; ξ – угол поворота шара вокруг своего центра масс C ; ρ – радиус инерции несущего тела массой M , точка B – точка контакта шара и сферической выемки $K'AN'$.

Определим координаты точки B – точки касания шара и сферической выемки:

$$x_B = OH - BE = b \sin \varphi - R \sin(\varphi + \eta) \quad (1.3)$$

$$z_B = EH = O_1H - EO_1 = b \cos \varphi - R \cos(\varphi + \eta) \quad (1.4)$$

Теперь можно записать вектор \mathbf{OB} , который понадобится для дальнейших преобразований:

$$\mathbf{OB} = [b \sin \varphi - R \sin(\varphi + \eta), 0, b \cos \varphi - R \cos(\varphi + \eta)] \quad (1.5)$$

Так как шар движется без проскальзывания, то углы ξ , η связаны между собой следующим соотношением:

$$\cup AB = r\xi = R\eta \rightarrow \xi = (R\eta)/r \quad (1.6)$$

В новых переменных уравнения (1.8), (1.9) выглядят таким образом (здесь независимыми обобщенными скоростями являются \dot{q}_1, \dot{q}_2):

$$\dot{q}_3 = [b \cos q_1 - R \cos(q_1 + q_2)]\dot{q}_1 + R \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2 = \sum_{i=1}^2 b_{1i}\dot{q}_i \quad (1.11)$$

$$\dot{q}_4 = [R \sin(q_1 + q_2) - b \sin q_1]\dot{q}_1 - R \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_2 = \sum_{i=1}^2 b_{2i}\dot{q}_i \quad (1.12)$$

Проверим критерий неинтегрируемости для трехиндексных символов в уравнении (1.11):

$$A_{12}^1 = \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{12}}{\partial q_1} = 2R \sin(q_1 + q_2) \neq 0 \quad (1.13)$$

$$A_{12}^2 = \frac{\partial b_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 2R \cos(q_1 + q_2) \neq 0 \quad (1.14)$$

Как следует из полученных выражений (1.13), (1.14), ни одна пара трехиндексных символов для каждого уравнения (1.11), (1.12) тождественно не равняется нулю. Следовательно, кинематические соотношения (1.8), (1.9), определяющие отсутствие проскальзывания шара относительно подвижной выемки, тоже являются неинтегрируемыми, а связь, реализуемая при этом, – неголономной.

Исходя из общего вида приведенных уравнений неголономной связи, можно сделать вывод о том, что указанная механическая система относится к неголономным системам Чаплыгина. Они отличаются от иных неголономных систем тем, что для них возможно отделение динамических уравнений движения от неинтегрируемых уравнений связи.

2. Вывод динамических уравнений движения шара в сферической выемке с использованием уравнений Аппеля. Перейдем к построению динамических уравнений движения обратного маятника с шаром в сферической выемке на основе неголономной механики Аппеля.

Запишем в общем виде функцию S – энергию ускорений для данной задачи

$$S = 1/2m(\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2) + 1/2J_0\dot{\varphi}^2 + 1/2J_C\dot{\xi}^2 \quad (2.1)$$

где m – масса шара; $J_0 = M\rho^2$ – момент инерции несущего тела массой M ; ρ – радиус инерции несущего тела, $J_C = 2/5mr^2$ – момент инерции однородного шара, $\xi = (R/r)\eta$.

Определим \ddot{x}_C, \ddot{z}_C с использованием однократно продифференцированных выражений (1.8), (1.9):

$$\ddot{x}_C = [R \sin(\varphi + \eta)(\dot{\varphi} + \dot{\eta}) - b\dot{\varphi} \sin \varphi]\dot{\varphi} + [b \cos \varphi - R \cos(\varphi + \eta)]\dot{\varphi} - R \sin(\varphi + \eta)(\dot{\varphi} + \dot{\eta})\dot{\eta} + R \cos(\varphi + \eta)\dot{\eta} \quad (2.2)$$

$$\ddot{z}_C = [R \cos(\varphi + \eta)(\dot{\varphi} + \dot{\eta}) - b\dot{\varphi} \cos \varphi]\dot{\varphi} + [R \sin(\varphi + \eta) - b \sin \varphi]\dot{\varphi} - R \cos(\varphi + \eta)(\dot{\varphi} + \dot{\eta})\dot{\eta} - R \sin(\varphi + \eta)\dot{\eta} \quad (2.3)$$

Подставим полученные выражения (2.2), (2.3) в (2.1) и учтем только те члены энергии ускорений S^* , которые зависят лишь от вторых производных неголономных координат φ, η . После некоторых преобразований получим

$$S^* = 1/2 [m(b^2 + R^2 - 2bR \cos \eta) + M\rho^2]\dot{\varphi}^2 + 7/10 mR^2\dot{\eta}^2 + mR(R - b \cos \eta)\dot{\varphi}\dot{\eta} + mbR \sin(\eta)\dot{\eta}(\dot{\eta} + \dot{\varphi})\dot{\varphi} - mbR \sin(\eta)\dot{\varphi}^2\dot{\eta} \quad (2.4)$$

В качестве независимых обобщенных координат в уравнениях Аппеля выбираем углы φ , η . В дальнейшем будем рассматривать малые углы φ поворота сферической выемки, что имеет место на практике.

Запишем выражение элементарной работы δA , рассматривая движение шара под действием силы тяжести, а несущего тела массой M – под действием силы тяжести, внешней периодической силы $F(t)$, упругих сил F_Y эквивалентной жесткости сооружения и сил F_D вязкого (неупругого) сопротивления:

$$\delta A = -mg\delta z_C - Mg\delta z_D + (F(t) - F_D - F_Y)\delta x_K \quad (2.5)$$

Найдем выражения для всех виртуальных перемещений из (2.5), используя геометрические соотношения из фиг. 2 (здесь x_K – горизонтальное перемещение точки K вдоль оси OX при повороте несущего тела массой M на малый угол φ , $L \gg R$):

$$\delta x_K = L \sin \alpha \delta \varphi \quad (2.6)$$

$$z_D = \rho \cos \varphi, \quad \delta z_D = -\rho \sin \varphi \delta \varphi \quad (2.7)$$

$$\delta z_C = [R \sin(\varphi + \eta) - b \sin \varphi] \delta \varphi + R \sin(\varphi + \eta) \delta \eta \quad (2.8)$$

где $\alpha = \angle KOT$ – угол наклона $KO = L$ до начала вынужденных колебаний несущего тела массой M , $\angle KTO = \pi/2 - (\alpha + \varphi/2)$.

Подставим полученные выражения (2.6)–(2.8) в (2.5)

$$\delta A = -mg\{[R \sin(\varphi + \eta) - b \sin \varphi] \delta \varphi + R \sin(\varphi + \eta) \delta \eta\} + Mg\rho \sin \varphi \delta \varphi + F(t)L \sin \alpha \delta \varphi - cL\dot{\varphi} \sin \alpha \delta \varphi - kL^2 \sin^2 \alpha \varphi \delta \varphi \quad (2.9)$$

С другой стороны, выражение для элементарной работы в вариациях независимых обобщенных координат имеет следующий вид:

$$\delta A = P_\varphi \delta \varphi + P_\eta \delta \eta \quad (2.10)$$

Используя уравнения (2.6)–(2.10), получим выражения для обобщенных сил (правых частей уравнений Аппеля):

$$P_\varphi = mg[b \sin \varphi - R \sin(\varphi + \eta)] + Mg\rho \sin \varphi + F(t)L \sin \alpha - kL^2 \sin^2 \alpha \varphi - cL\dot{\varphi} \sin \alpha \quad (2.11)$$

$$P_\eta = -mgR \sin(\varphi + \eta) \quad (2.12)$$

Учитывая, что углы φ малы, перепишем обобщенные силы (2.11), (2.12) таким образом:

$$P_\varphi = mg[b\varphi - R(\varphi \cos \eta + \sin \eta)] + Mg\rho \varphi - kL^2 \sin^2 \alpha \varphi - cL\dot{\varphi} \sin \alpha + F(t)L \sin \alpha \quad (2.13)$$

$$P_\eta = -mgR(\varphi \cos \eta + \sin \eta) \quad (2.14)$$

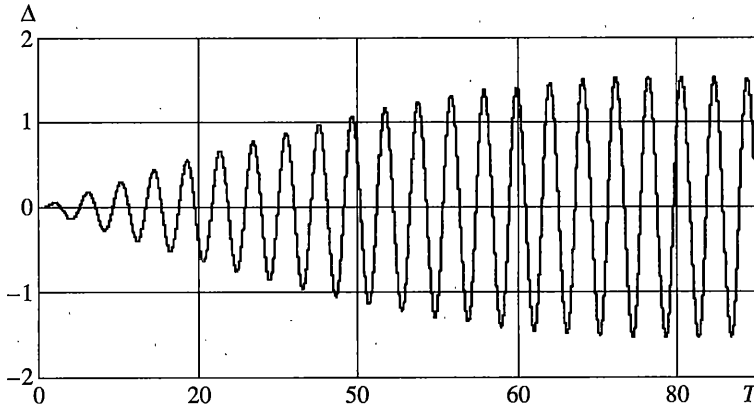
Запишем уравнения Аппеля в общем виде

$$\partial S^*/\partial \dot{\varphi} = P_\varphi, \quad \partial S^*/\partial \dot{\eta} = P_\eta \quad (2.15)$$

После выполнения дифференцирования в соответствии с (2.15) и проведения некоторых преобразований получим следующие уравнения плоского движения рассматриваемой неголономной системы в общем виде:

$$[m(b^2 + R^2 - 2bR \cos \eta) + M\rho^2] \ddot{\varphi} + m(R^2 - bR \cos \eta) \ddot{\eta} = -mbR \sin \eta \dot{\eta} (\dot{\eta} + 2\dot{\varphi}) + mg[b\varphi - R(\varphi \cos \eta + \sin \eta)] + Mg\rho \varphi - kL^2 \varphi \sin^2 \alpha - cL \sin \alpha \dot{\varphi} + F(t)L \sin \alpha \quad (2.16)$$

$$(R - b \cos \eta) \ddot{\varphi} + 7/5 R \ddot{\eta} = -g(\varphi \cos \eta + \sin \eta) + b \sin \eta \dot{\varphi}^2 \quad (2.17)$$



Фиг. 3

Динамические уравнения Аппеля (2.16), (2.17) сами по себе дают полное описание плоского движения изучаемой механической системы. В этих уравнениях на этапе их построения уже учтены уравнения кинематической связи и поэтому уравнения движения отделены от уравнений (1.8), (1.9). Таким образом, рассматриваемая механическая система относится к классу неголономных систем Чаплыгина.

Окончательная система дифференциальных уравнений (2.16), (2.17) легко приводима к виду, допускающему полную алгоритмизацию задачи для последующего проведения численного эксперимента

$$\ddot{\varphi} = dd\varphi(t, \varphi, \eta, \dot{\varphi}, \dot{\eta}) \quad (2.18)$$

$$\ddot{\eta} = \frac{5}{7\beta} [\sin(\eta)\dot{\varphi}^2 - G_b(\sin(\eta) + \varphi \cos(\eta)) - (\beta - \cos(\eta))dd\varphi(t, \varphi, \eta, \dot{\varphi}, \dot{\eta})] \quad (2.19)$$

$$dd\varphi(t, \varphi, \eta, \dot{\varphi}, \dot{\eta}) = \frac{TCH(t, \varphi, \eta, \dot{\varphi}, \dot{\eta})}{Z(\eta)}, \quad \beta = R/b, \quad G_b = g/b, \quad \nu = m/M,$$

$$\gamma = \rho/b, \quad n = c\gamma/(2Mb)$$

$$TCH(t, \varphi, \eta, \dot{\varphi}, \dot{\eta}) = -\nu(\beta - \cos(\eta))(\sin(\eta)\dot{\varphi}^2 - G_b(\sin(\eta) + \varphi \cos(\eta))) + \\ + 1.4[\nu G_b(\varphi - \beta(\varphi \cos(\eta) + \sin(\eta))) + \gamma G_b \varphi - \nu \beta \sin(\eta)\dot{\eta}(\dot{\eta} + 2\dot{\varphi}) + \Delta F(t, \varphi, \dot{\varphi})]$$

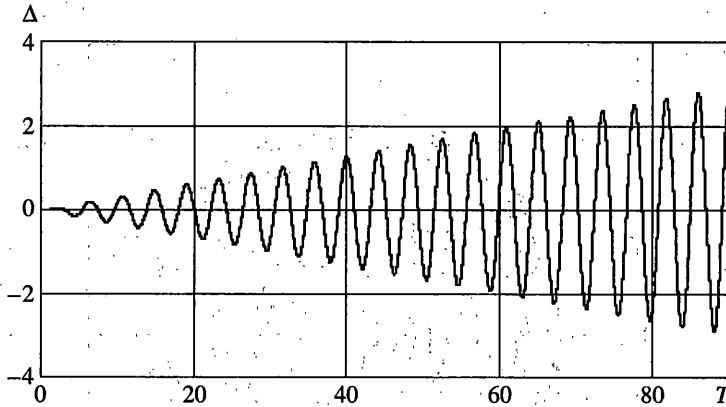
$$Z(\eta) = 1.4\gamma^2 + \nu(0.4 + \sin^2(\eta) + 0.4\beta^2 - 0.8\beta \cos(\eta))$$

$$\Delta F(t, \varphi, \dot{\varphi}) = B_0 \sin(\omega_b t) - \gamma^2(\omega_{cb}^2 + g/\rho)(1 + \nu)\varphi - 2n\dot{\varphi}, \quad \omega_{cb} = \sqrt{kI/(M(1 + \nu))} - G_b,$$

$$B_0 = F_0\gamma/Mb$$

где $\rho \cong L \sin(\alpha)$, поскольку $L \gg R$.

3. Результаты численных исследований. Интегрирование полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.18), (2.19) и исследование динамического поведения неголономной механической системы выполнялось с использованием сертифицированного пакета прикладных программ "MATHCAD". При этом в исследовании не делалось никаких предположений относительно изменения угла η , определяющего положение шара в сферической выемке. Основной вопрос, который ставился при проведении численного эксперимента, заключался в определении поведения сис-



Фиг. 4

темы в области резонансной частоты, т.е. в случае совпадения вынужденной и собственной частот ($\omega_b = \omega_{cb} = \sqrt{k/(M(1 + \nu)) - G_b}$) [2].

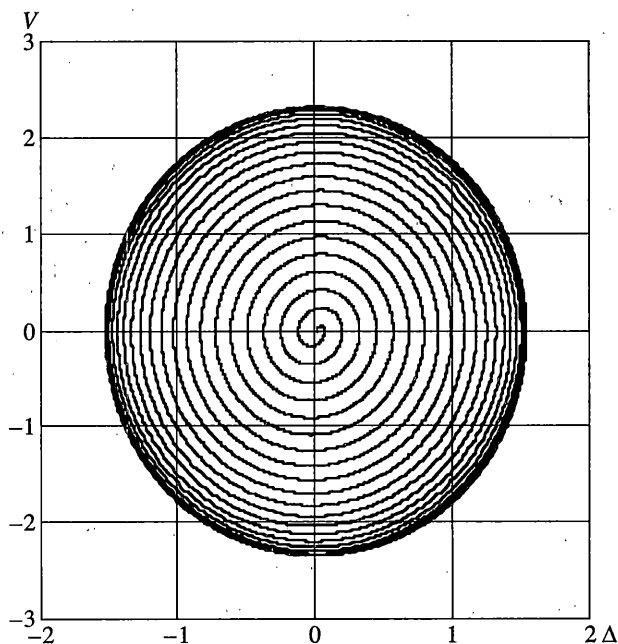
На фиг. 3 показано, как изменяются во времени T (в секундах) амплитуды Δ (в метрах) точки A несущего тела (на фиг. 1) для одного из реальных наборов параметров виброподавляющей системы и вынуждающей силы: $b = 203$ м, $R = 3$ м, $F_0/M = 0.01g$, $n = 0$, $\omega_b = \omega_{cb} = 1.5$ рад/с, $\rho = b - R = 200$ м с учетом движения тяжелого шара ($\nu = 0.075$).

Чтобы оценить эффективность функционирования гасителя, приведем график изменения во времени T (в секундах) амплитуды Δ (в метрах) той же точки A несущего тела при отсутствии гасителя, т.е. при $\nu = 0$ (фиг. 4).

Сравнивая поведение графиков на фиг. 3 и 4, можно сделать вывод о достаточно эффективном виброподавлении вынужденных колебаний несущего тела массой M при резонансе. Амплитуды Δ точки A в системе с гасителем достигают своего максимума приблизительно через 1.5 мин. после начала вынужденных колебаний. Его значение не превышает величины $\Delta_{MAX} = 1.532$ м, в то время как эта же амплитуда без гасителя через то же время равняется $\Delta = 2.933$ м, и продолжает возрастать линейно пропорционально времени колебаний. Однако для высотных строительных объектов существуют нормативные ограничения по максимальным перемещениям их верхних сечений (до 1% от высоты самого строения). Как следует из численного эксперимента, применение гасителя позволяет обеспечить указанные ограничения ($\Delta_{MAX} < 2.0$ м). Численный анализ динамического поведения рассматриваемой механической системы показал также, что с целью эффективного виброгашения вынужденных колебаний высотного объекта между тяжелым шаром и сферической выемкой необходимо вводить вязкое сопротивление, реализуемое воздушными демпфирами.

Для более полного отражения картины колебаний виброзащитаемого тела массой M приведен их фазовый портрет (фиг. 5). Фазовый портрет позволяет определить область на фазовой плоскости, в которой сосредоточены все движения несущего тела. В данном случае это есть предельный цикл в виде эллипса с ограниченными полуосями $a = 1.532$ м, $b = 2.329$ м/с и центром в начале координат.

4. Выводы. Разработанная математическая модель динамики рассматриваемой виброзащитной системы теоретически обосновывает существующие экспериментальные данные о правомерности использования перекачивающихся тяжелых шаров или цилиндров в соответствующих выемках на высотных сооружениях в качестве катковых гасителей их низкочастотных колебаний. Проведенный численный анализ дина-



Фиг. 5

мического поведения системы показал, что предложенный способ виброподавления вынужденных колебаний позволяет с помощью определенной настройки параметров гасителя на частоту колебаний высотного сооружения исключить возможность возникновения резонансных явлений в виброзащитной системе. Для эффективного функционирования таких гасителей в необходимом диапазоне частот в механической системе “тяжелый шар – сооружение” следует использовать воздушные демпферы, которые реализуют силы вязкого сопротивления.

Результаты исследований, полученные в статье, представляют научный и практический интерес для специалистов в области неголономной механики и теории колебаний. Они могут быть использованы разработчиками гасителей для вибро- и сейсмозащиты разнообразных низкочастотных механических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барштейн М.Ф., Бородачев Н.М., Блюмина Л.Х. и др. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика. М.: Стройиздат, 1981. 215 с.
2. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
3. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк, 1970. 270 с.
4. Легеза В.П. Численный анализ движения шара в эллипсоидальной полости с подвижной верхней опорой // Прикл. механика. 1987. Т. 23. № 2. С. 96–100.
5. Легеза В.П. Вывод уравнений движения тяжелого шара в полости трехосного эллипсоида и их численный анализ // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 39–43.
6. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.