

УДК 531.5

© 2003 г. М.Ю. ОВЧИННИКОВ

СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖЕСТКОЙ ЛОПАСТЬЮ В ОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

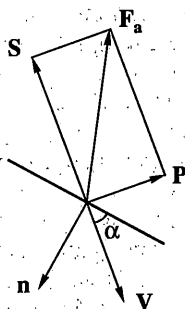
Рассматривается задача о стационарных движениях твердого тела с лопастью в атмосфере. Ищутся стационарные движения, при которых вообще говоря, центр масс вращающегося с постоянной угловой скоростью тела перемещается с установившейся скоростью по винтовой линии, ось которой вертикальна и параллельна вектору угловой скорости тела. Вначале рассматриваются два частных случая такого стационарного движения: когда центр масс невращающегося тела движется по наклонной прямой, названное плоским движением, и когда центр масс теперь уже вращающегося тела движется вдоль вертикальной прямой, названное тривиальным движением. И, наконец, рассматривается общий случай винтового движения, когда центр масс тела движется по спирали. Приведены численные примеры.

1. Введение. Альтернативой постановке задачи о динамике авторотирующего тела в атмосфере, при которой силы со стороны набегающего потока воздуха приложены в его центре давления, служит рассмотрение взаимодействия тела с атмосферой при помощи сил, сосредоточенных на лопастях. В частности, в работе [1] рассмотрено движение цилиндрического твердого тела с упругой прямоугольной пластиной и грузом на конце. Учитывается аэродинамическое воздействие на пластину и тело. При вычислении скорости потока относительно пластины учитывалась индуктивная скорость, возникающая вследствие вращения пластины [2]. Там же рассчитаны и характеристики установившегося винтового движения.

В настоящей работе рассматривается задача о стационарных движениях твердого тела с жесткой аэродинамической лопастью в атмосфере. Лопасть моделируется круглой пластиной, соединенной с телом тонким жестким стержнем. Считается, что основная часть аэродинамического воздействия связана с лопастью и сводится к одной равнодействующей силе, приложенной в ее геометрическом центре. Исследуется стационарное движение, при котором центр масс вращающегося с постоянной угловой скоростью тела перемещается с установившейся скоростью по винтовой линии, ось которой вертикальна и параллельна вектору угловой скорости. При этом угловая скорость вращения кратчайшей линии, соединяющей центр масс тела с осевой линией (для краткости эту угловую скорость будем называть угловой скоростью вращения центра масс вокруг осевой линии), вокруг оси винтовой линии равна его угловой скорости. Вначале рассматриваются два частных случая этого стационарного движения. Предельный случай винтового движения – плоское движение, когда центр масс невращающегося тела и центр пластины движутся по параллельным наклонным прямым, лежащим в вертикальной плоскости, и тривиальное движение, когда центр масс вращающегося тела движется по вертикальной прямой, а центр пластины движется по спирали вокруг этой вертикальной прямой. И, наконец, рассматривается общий случай винтового движения. Показано существование этих режимов в рамках принятой модели взаимодействия с атмосферой. Приведены численные примеры.

2. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим движение в однородной атмосфере твердого тела с жесткой лопастью, моделирующего плод клена или ли-

пы. Лопасть, жестко связанная с телом, представляет собой круглую пластину, прикрепленную к телу тонким жестким стержнем. На систему действует сила тяжести и аэродинамическая сила. Сила тяжести приложена в центре масс тела. Считаем, что аэродинамическое воздействие в рамках модели квазистационарного обтекания сводится к равнодействующей силе F_a , приложенной к центру давления лопасти [3, 4]. Сила F_a воздействия потока воздуха на лопасть пропорциональна аэродинамическому напору $\rho v_D^2/2$ (ρ – плотность атмосферы, v_D – скорость центра давления). Коэффициент пропорциональности зависит от формы лопасти и от угла атаки $\bar{\alpha}$, который образу-



Фиг. 1

ет вектор v_D с плоскостью лопасти. Линия действия силы F_a в общем случае не совпадает с вектором v_D . Поэтому силу F_a представим в виде суммы (фиг. 1) силы сопротивления S , направленной вдоль потока, и подъемной силы P , перпендикулярной потоку

$$F_a = S + P \quad (2.1)$$

$$S = -\rho S_m s(\bar{\alpha}) v_D v_D / 2, \quad P = -\rho S_m p(\bar{\alpha}) v_D \times n \times v_D / (2 \cos \bar{\alpha})$$

Здесь S_m – площадь пластины, $s(\bar{\alpha})$ и $p(\bar{\alpha})$ – ее аэродинамические коэффициенты, $\sin \alpha = v_D n / v_D$, n – единичный вектор нормали к пластине.

Для описания движения тела введем следующие правые прямоугольные системы координат: $O_a XYZ$ – абсолютная система, ось $O_a X$ направлена вертикально вверх; точка O_a лежит на поверхности Земли; $Oxyz$ – система, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции тела; $O\xi\eta\zeta$ – связанная с телом система координат. Введение дополнительной системы $O\xi\eta\zeta$ вызвано удобством представления с ее помощью стационарных движений тела (ее ось $O\xi$ будет направлена вертикально при стационарном движении). Переход от абсолютной системы координат $O_a XYZ$ к связанной с телом системе $O\xi\eta\zeta$ определяется с помощью самолетных углов α, β, γ (фиг. 2), элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) соответствующей матрицы перехода A имеют вид

$$a_{11} = \cos \alpha \cos \beta, \quad a_{21} = \sin \beta$$

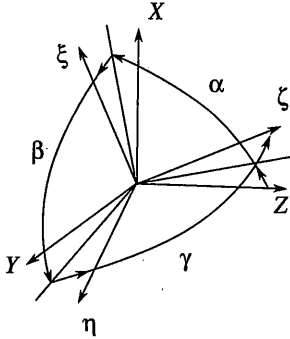
$$a_{12} = \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma, \quad a_{22} = \cos \beta \cos \gamma$$

$$a_{13} = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad a_{23} = -\cos \beta \sin \gamma \quad (2.2)$$

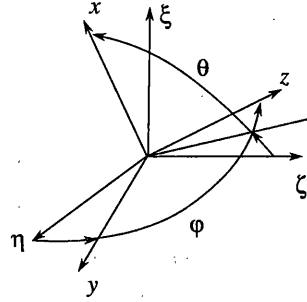
$$a_{31} = -\sin \alpha \cos \beta$$

$$a_{32} = \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$a_{33} = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Положение системы $Oxuz$ относительно $O\xi\eta\zeta$ определяется двумя постоянными углами θ и φ (фиг. 3), принимающими значения из интервала $(0, \pi/2)$. Элементы b_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матрицы перехода \mathbf{B} от системы $O\xi\eta\zeta$ к системе $Oxuz$ имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \cos\theta, & b_{21} &= 0, & b_{31} &= -\sin\theta \\ b_{12} &= \sin\theta\sin\varphi, & b_{22} &= \cos\varphi, & b_{32} &= \cos\theta\sin\varphi \\ b_{31} &= \sin\theta\cos\varphi, & b_{23} &= -\sin\varphi, & b_{33} &= \cos\theta\cos\varphi \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{I}_0 = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции в системе координат $Oxuz$. Тогда при переходе к системе $O\xi\eta\zeta$ получаем

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= I_1 \cos^2 \theta + I_2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + I_3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \\ B &= I_2 \cos^2 \varphi + I_3 \sin^2 \varphi \\ C &= I_1 \sin^2 \theta + I_2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + I_3 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \\ D &= (I_3 - I_2) \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ E &= [I_1 - I_3 - (I_2 - I_3) \sin^2 \varphi] \cos \theta \sin \theta \\ F &= (I_3 - I_2) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения движения рассматриваемой механической системы запишем в виде:

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= m\mathbf{g} + A\mathbf{F}_a, & \mathbf{I}\dot{\mathbf{w}} &= -\mathbf{w} \times \mathbf{I}\mathbf{w} + \mathbf{d} \times \mathbf{F}_a, & \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\alpha} &= (w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma) / \cos \beta, & \dot{\beta} &= w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma \\ \dot{\gamma} &= w_1 - (w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma) \tan \beta \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь m – масса тела, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ – радиус-вектор и скорость центра масс, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ – вектор абсолютной угловой скорости, $\mathbf{g} = (-5, 0, 0)^T$ –

вектор ускорение свободного падения, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)^T$ – радиус-вектор центра давления пластины относительно центра масс тела. Полагаем, что центр давления совпадает с геометрическим центром пластины и не зависит от угла атаки. Точкой обозначена производная по времени t . Векторы \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{g} заданы в системе O_aXYZ ; векторы \mathbf{w} , \mathbf{d} , \mathbf{n} , \mathbf{F}_a – в системе $O\xi\eta\zeta$. При этом $\mathbf{n} = (-n_1, n_2, n_3)^T$, $\mathbf{F}_a = (F_{a1}, F_{a2}, F_{a3})^T$, $\mathbf{v}_D = \mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{d}$.

3. Стационарное движение. Будем искать движение, при котором центр масс тела перемещается с постоянной по величине скоростью v_0 вдоль винтовой линии, ось которой вертикальна¹. Наглядным примером движений такого типа служит движение плодов клена и ясеня при их снижении в воздухе. При этом тело вращается с постоянной угловой скоростью, вектор которой направлен вертикально и совпадает с осью $O\xi$ системы координат $O\xi\eta\zeta$. Угловая скорость вращения центра масс вокруг оси винтовой линии равна угловой скорости тела. Такое движение назовем *винтовым* и представим его в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 = \text{const}, & w_2 &= w_3 = 0 \\ \alpha &= \beta = 0, & \gamma &= w_0 t + \gamma_0 = T \\ v_1 &= -v_{10} \\ v_2 \cos T + v_3 \sin T &= C_2, & -v_2 \sin T + v_3 \cos T &= C_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь v_{10} , C_2 , C_3 – постоянные, T – фаза углового вращения тела. Из (2.4), (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} v_2 &= C_2 \cos T - C_3 \sin T, & v_3 &= C_2 \sin T + C_3 \cos T \\ r_2 &= (C_2 \sin T + C_3 \cos T)/w_0, & r_3 &= (-C_2 \cos T + C_3 \sin T)/w_0 \end{aligned}$$

и поэтому справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v_{10}^2 + v_2^2 + v_3^2 &= v_{10}^2 + C_2^2 + C_3^2 = v_0^2 \\ r_2^2 + r_3^2 &= (C_2^2 + C_3^2)/w_0^2 = R^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где R – радиус винтовой линии.

Из выражения $\sin \bar{\alpha} = v_D \mathbf{n} / v_D$ и из (3.1) следует, что при винтовом движении угол атаки остается постоянным

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 = \text{const} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1) и (3.3) в (2.1) и (2.4), вводя безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} \tau &= v_0 t / d, & V_j &= v_j / v_0, & W_j &= w_j d / v_0 \quad (j = 1, 2, 3), & V_{10} &= v_{10} / v_0, & W_0 &= w_0 d / v_0 \\ q &= g d / v_0^2, & \delta_j &= d_j / d, & \theta_i &= i / I_1 \quad (i = A, B, C, D, E, F) \\ \mu &= \rho S_m d / (2m), & \eta &= m d^2 / I_1, & c_k &= C_k / v_0 \quad (k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹ Сарычев В.А., Овчинников М.Ю., Бондаренко В.Н. Стационарные движения тела с лопастью в атмосфере: Препринт № 4. М.: ИПМ им. Келдыша АН. 1992. 30 с.

и опуская промежуточные выкладки, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 q &= \mu s(\bar{\alpha}_0) V_{D0} [V_{10} + k(\bar{\alpha}_0)(n_1 V_{D0} - V_{10} \sin \bar{\alpha}_0) / \cos \bar{\alpha}_0] \\
 c_2 W_0 &= -\mu s(\bar{\alpha}_0) V_{D0} \{ (c_3 + W_0 \delta_2) + k(\bar{\alpha}_0) [n_3 V_{D0} - (c_3 + W_0 \delta_2) \sin \bar{\alpha}_0] / \cos \bar{\alpha}_0 \} \\
 c_3 W_0 &= \mu s(\bar{\alpha}_0) V_{D0} \{ (c_2 - W_0 \delta_3) + k(\bar{\alpha}_0) [n_2 V_{D0} - (c_2 - W_0 \delta_3) \sin \bar{\alpha}_0] / \cos \bar{\alpha}_0 \} \\
 \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3 &= 0 \\
 W_0^2 \theta_E &= \eta (\delta_3 q - \delta_1 c_2 W_0), \quad W_0^2 \theta_F = \eta (\delta_2 q + \delta_1 c_3 W_0) \\
 \sin \bar{\alpha}_0 &= [V_{10} n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3 + W_0 (\delta_2 n_3 - \delta_3 n_2)] / V_{D0} \\
 n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \quad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 1, \quad V_{10}^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

для определения параметров $\bar{\alpha}_0, q, W_0, V_{10}, c_2, c_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, n_1, n_2, n_3, \mu, \eta, \theta_E, \theta_F$ винтового движения. Уравнения (3.5) представляют собой трансцендентную систему алгебраических уравнений, в которой $V_{D0} = [1 + 2W_0(\delta_2 c_3 + \delta_3 c_2) + W_0^2(\delta_2^2 + \delta_3^2)]^{1/2}$, а $k(\bar{\alpha}_0)$ – аэродинамическое качество, определяемое экспериментально или из решения задачи обтекания.

Функция $k(\bar{\alpha})$ для круглой пластины построена с помощью кубического сплайна на основе экспериментальных данных в [5]. Так как профиль круглой пластины симметричен относительно любого направления обдува, то свойства функции качества $k(\bar{\alpha})$ не изменяются при смене направления. Функция $k(\bar{\alpha})$ является 2π -периодической, нечетной по $\bar{\alpha}$ и $k(0) = k(\pi/2) = k(\pi) = 0$. Величина $k(\bar{\alpha})$ при $\bar{\alpha} \in [0, \pi/2]$ достигает своего максимума при сравнительно малых углах атаки ($\approx 5.5^\circ$), а затем, с ростом $\bar{\alpha}$ монотонно убывает до нуля. Отметим, что $k(\bar{\alpha}) \approx \text{ctg } \bar{\alpha}$ для $\bar{\alpha} \in [\approx 17^\circ, 90^\circ]$, хотя и большинство значений $k(\bar{\alpha})$, вычисленных на основе экспериментальных данных из этого промежутка, меньше значений $\text{ctg } \bar{\alpha}$ для тех же $\bar{\alpha}$ (табл. 1). Для $\bar{\alpha} \in [0; \approx 17^\circ]$ имеем $k(\bar{\alpha}) < \text{ctg } \bar{\alpha}$.

Рассмотрим два частных случая винтового движения. В первом случае $c_2^2 + c_3^2 \neq 0, W_0 = 0$ и центр масс невращающегося тела движется по наклонной прямой. Такое движение назовем *плоским*. Во втором случае $c_2^2 + c_3^2 = 0, W_0 \neq 0$ и центр масс вращающегося тела движется по вертикальной прямой. Такое движение назовем *тривиальным*. Плоское и тривиальное движения можно рассматривать как два предельных случая винтового движения. В первом случае радиус спирали бесконечно большой, во втором – равен нулю.

4. Плоское движение. Подставляя условие $W_0 = 0$ в (3.5), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 q/\mu &= s(\bar{\alpha}_0) [V_{10} + k(\bar{\alpha}_0)(n_1 - V_{10} \sin \bar{\alpha}_0) / \cos \bar{\alpha}_0] \\
 c_3 + k(\bar{\alpha}_0)(n_3 - c_3 \sin \bar{\alpha}_0) / \cos \bar{\alpha}_0 &= 0 \\
 c_2 + k(\bar{\alpha}_0)(n_2 - c_2 \sin \bar{\alpha}_0) / \cos \bar{\alpha}_0 &= 0 \\
 \sin \bar{\alpha}_0 &= n_1 V_{10} + n_2 c_2 + n_3 c_3 \\
 \delta_1^2 &= 1, \quad \delta_2 = \delta_3 = 0 \\
 n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \quad V_{10}^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Таблица 1

$\bar{\alpha}$, [град]	c_y	c_x	k	$\text{ctg } \bar{\alpha}$
0.0	0.0	0.0203	0.0	∞
9.9	0.405	0.0874	4.6339	5.7297
19.9	0.827	0.299	2.7659	2.7625
29.8	1.193	0.680	1.7544	1.7461
34.8	1.28	0.888	1.4448	1.4388
37.3	1.323	0.998	1.3557	1.3127
38.3	1.328	1.033	1.2856	1.2662
38.5	1.322	1.040	1.2712	1.2572
38.8	1.330	1.050	1.2667	1.2437
39.3	1.332	1.066	1.2495	1.2218
38.6	1.067	0.859	1.2421	1.2527
38.9	0.998	0.802	1.2444	1.2393
39.4	0.926	0.743	1.2463	1.2174
39.9	0.870	0.723	1.2033	1.1960
41.9	0.834	0.729	1.1440	1.1145
49.9	0.759	0.891	0.8519	0.8421
56.7	0.639	0.972	0.6574	0.6569
70.7	0.393	1.085	0.3622	0.3502
80.0	0.209	1.137	0.1838	0.1763
90.0	0.0	1.160	0.0	0.0

для определения параметров $\bar{\alpha}_0$, q , W_{10} , c_2 , c_3 , n_1 , n_2 , n_3 , μ плоского движения. Первое уравнение служит для определения отношения q/μ . Используя второе и третье уравнения, определяем стационарное значение угла атаки $\bar{\alpha}_0$. Предварительно для этих двух уравнений рассмотрим четыре частных случая.

1. Пусть $k(\bar{\alpha}_0) = 0$, тогда $c_2 = c_3 = 0$. При этом, если $n_2 = n_3 = 0$, то $\bar{\alpha}_0 = \pi/2$; если $n_1 = 0$, то $\bar{\alpha}_0 = 0$.

2. Пусть $c_2 = n_2 = 0$, тогда $k(\bar{\alpha}_0) = \cos \bar{\alpha}_0 / (\sin \bar{\alpha}_0 - n_3/c_3)$.

3. Пусть $c_3 = n_3 = 0$, тогда $k(\bar{\alpha}_0) = \cos \bar{\alpha}_0 / (\sin \bar{\alpha}_0 - n_2/c_2)$.

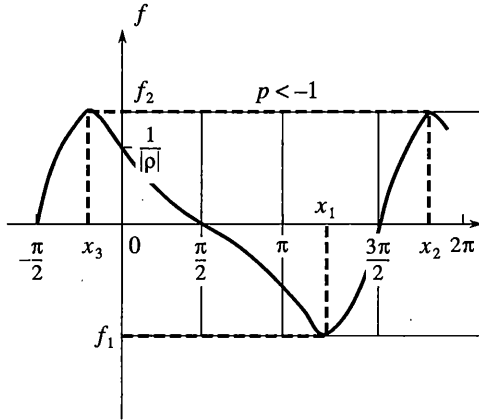
4. Пусть $n_2 = n_3 = 0$, тогда имеем систему двух уравнений

$$c_2[k(\bar{\alpha}_0)\text{ctg } \bar{\alpha}_0 - 1] = 0, \quad c_3[k(\bar{\alpha}_0)\text{tg } \bar{\alpha}_0 - 1] = 0$$

Здесь возможны два варианта: (а) $c_2 = c_3 = 0$ и, следовательно, имеем первый частный случай; (б) c_2 и c_3 принимают произвольные значения, а $k(\bar{\alpha}_0) = \text{ctg } \bar{\alpha}_0$. Еще раз отметим, что экспериментальная зависимость аэродинамического качества $k(\bar{\alpha}_0)$ при $\bar{\alpha}_0 \rightarrow \pi/2$ близка $\text{ctg } \bar{\alpha}_0$ [3] и ее можно аппроксимировать этой функцией. Тогда решением последнего уравнения является любое значение угла $\bar{\alpha}$ на интервале аппроксимации.

Пусть теперь c_2 , c_3 , n_2 , n_3 не равны нулю. Тогда второе и третье уравнения из (4.1) можно записать в виде

$$k(\bar{\alpha}_0) = \cos \bar{\alpha}_0 / (\sin \bar{\alpha}_0 - n_2/c_3), \quad c_2/c_3 = n_2/n_3 \tag{4.2}$$



Фиг. 4

Задавая n_2 и c_2 и находя точки пересечения функции $f(\bar{\alpha}_0) = \cos \bar{\alpha}_0 / (\sin \bar{\alpha}_0 - n_2/c_2)$, стоящей в правой части первого уравнения системы (4.2), с экспериментальной зависимостью $k(\bar{\alpha}_0)$, определяем стационарное значение угла атаки $\bar{\alpha}_0$. С помощью второго уравнения системы (4.2), из которого следует, что вектор $\mathbf{V}_0 = (-V_{10}, c_2, c_3)$ и $\mathbf{n} = (-n_1, n_2, n_3)$ должны лежать в одной вертикальной плоскости, получаем $n_3 = n_2 c_3 / c_2$. Из двух последних уравнений системы (4.1) определяем $n_1 = (1 - n_2^2 - n_3^2)^{1/2}$ и $V_{10} = (1 - c_2^2 - c_3^2)^{1/2}$. Подставляя n_1, n_3, V_{10} в выражение для $\sin \bar{\alpha}_0$ в (4.1), получаем уравнение

$$\sin \bar{\alpha}_0 - c_2 n_2 - n_2 c_3^2 / c_2 = [(1 - c_2^2 - c_3^2)(1 - n_2^2 - n_2^2 c_3^2 / c_2^2)]^{1/2}$$

для определения параметра c_3 . Возводя обе его части в квадрат и разрешая относительно c_3^2 , получаем выражение

$$c_3^2 = c_2^2 \frac{1 - c_2^2 - n_2^2 - \sin^2 \bar{\alpha}_0 + 2n_2 c_2 \sin \bar{\alpha}_0}{n_2^2 + c_2^2 - 2n_2 c_2 \sin \bar{\alpha}_0}$$

Рассмотрим более подробно первое уравнение из (4.2). Перепишем его в виде

$$f(x) = \cos x / (\sin x - p) \tag{4.3}$$

и исследуем поведение 2π -периодической функции $f(x)$ в зависимости от значений аргумента x и параметра p . Параметр $p = n_2/c_2$ может принимать любые значения. При всех p для $f(x)$ справедливы равенства $f(0) = f(2\pi) = -1/p, f(\pi/2) = 0$.

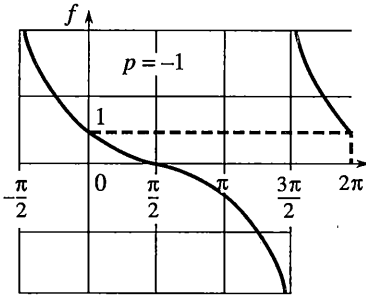
Если $p \in]-\infty, -[$, то функция $f(x)$ непрерывна, в точке $x = 3\pi/2$ равна нулю и имеет минимум $f_1 < 0$ в точке x_1 (фиг. 4):

$$x_1 = \pi + \arcsin 1/|p|, \quad f_1 = -|p| \cos x_1 / (1 - p^2)$$

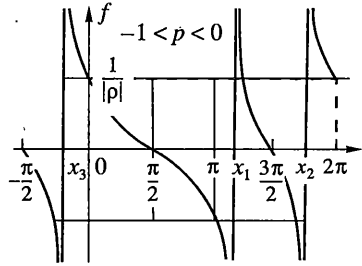
и максимум $f_2 > 0$ в точках x_2 и x_3 :

$$x_2 = 2\pi - \arcsin 1/|p|, \quad x_3 = -\arcsin 1/|p|, \quad f_2 = -|p| \cos x_2 / (1 - p^2)$$

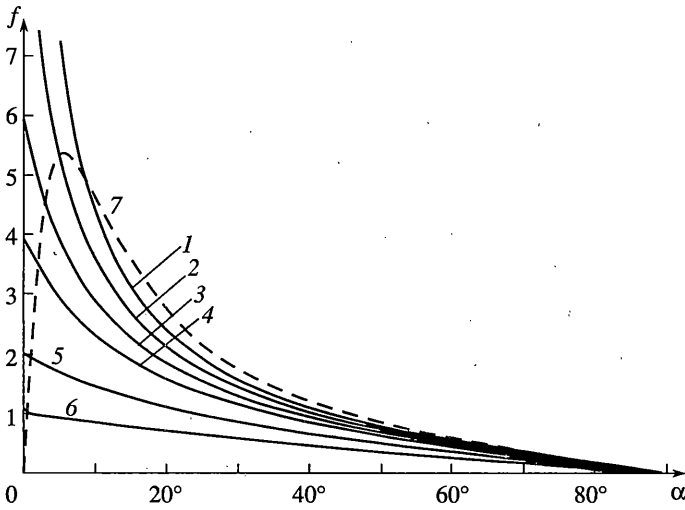
На фиг. 4–6 результаты исследования представлены на интервале $[-\pi/2, 2\pi]$.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Если $|p| \rightarrow \infty$, то $x_1 \rightarrow \pi$, $x_2 \rightarrow 2\pi$, $f_1 \rightarrow 0$, $f_2 \rightarrow 0$ и функция $f(x)$ вырождается в прямую $f=0$. Пусть $p \rightarrow -1$, тогда $x_1, x_2 \rightarrow 3\pi/2$, $x_3 \rightarrow -\pi/2$, $f_1 \rightarrow -\infty$, $f_2 \rightarrow +\infty$.

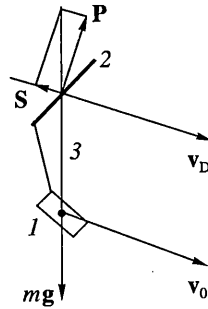
Если $p = -1$, то $f(x)$ имеет разрыв при $x = -\pi/2$ и $x = 3\pi/2$ (фиг. 5). В этих точках функция $f(x)$ имеет вертикальные асимптоты, между которыми она убывает с ростом x .

Если $p \in] -1, 0[$, то $f(x)$ имеет разрывы при $x_1 = \pi + \arcsin|p|$, $x_2 = 2\pi - \arcsin|p|$, $x_3 = -\arcsin|p|$ (фиг. 6). В этих точках функция $f(x)$ имеет вертикальные асимптоты, между которыми она убывает. Если $p \rightarrow -1$, то $x_1, x_2 \rightarrow 3\pi/2$, $x_3 \rightarrow -\pi/2$. Если $|p| \rightarrow 0$, то $f(x) \rightarrow \operatorname{ctg} x$.

Для $p > 0$ функция $f(x)$ получается путем ее сдвига при $p < 0$ на π вправо или влево. Тем самым, функция $f(x)$ исследована на всем интервале изменения параметра p .

Из второго уравнения (4.2) следует, что векторы \mathbf{V}_0 и \mathbf{n} лежат в одной плоскости. Если $p < 0$, то горизонтальные проекции векторов \mathbf{V}_0 и \mathbf{n} направлены в противоположные стороны. При этом первое уравнение системы (4.2) имеет ненулевое относительно k решение только для $\bar{\alpha}_0 \in [0, \pi]$, причем, если $\bar{\alpha}_0 \in [0, \pi/2]$, то $|k(\bar{\alpha}_0)| = |k(\pi - \bar{\alpha}_0)|$. Ре-

шения $\bar{\alpha}_0$ и $\pi - \bar{\alpha}_0$ соответствуют направленным в противоположных направлениях горизонтальным проекциям скорости движения центра масс тела. В связи с этим точное значение $\bar{\alpha}_0$ при численном исследовании достаточно искать только на промежутке от нуля до $\pi/2$. На фиг. 7 в качестве примера изображены графики функции (4.3) при $p = -0.05, -0.1, -0.15, -0.25, -0.5, -1.0$ (кривые 1–6, соответственно). Там же представлена экспериментальная зависимость $k(\bar{\alpha})$ (кривая 7). Точки пересечения кривой (4.3) с экспериментальной кривой $k(\bar{\alpha})$ дают стационарное значение угла атаки $\bar{\alpha}$. Отметим также, что всегда имеется решение $\bar{\alpha} = 0$, если векторы V_0 и \mathbf{p} параллельны. Заметим, что при $p \rightarrow 0$ функция $f(x)$ стремится к $\text{ctg } \alpha$.



Фиг. 8

Отличие случая $p > 0$ от случая $p < 0$ состоит в том, что вектор \mathbf{p} меняет свое направление на противоположное и решения уравнения (4.2), не обращающие функцию k в нуль, теперь существуют в диапазоне от π до 2π . Но так как лопасть является симметричной и плоской, то с физической точки зрения описанное выше остается верным и для этого случая.

На фиг. 8 приведена структура сил, действующих на тело (1) и лопасть (2) при плоском движении. Центр масс тела снижается по вертикали (3).

Для осесимметричного твердого тела режим плоского движения при ненулевом балансирующем угле атаки был исследован в [6]. Обнаружена неустойчивость такого режима снижения, что связано с наличием плоскости симметрии обтекания.

5. Тривиальное движение. Подставляя условие $c_2^2 + c_3^2 = 0$ в (3.5), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 q/\mu &= s(\bar{\alpha}_0)V_{DT}[1 + k(\bar{\alpha}_0)(n_1V_{DT} - \sin\bar{\alpha}_0)/\cos\bar{\alpha}_0] \\
 \delta_2 W_0 + k(\bar{\alpha}_0)(n_3V_{DT} - V_0\delta_2 \sin\bar{\alpha}_0)/\cos\bar{\alpha}_0 &= 0 \\
 -\delta_3 W_0 + k(\bar{\alpha}_0)(n_2V_{DT} - W_0\delta_3 \sin\bar{\alpha}_0)/\cos\bar{\alpha}_0 &= 0 \\
 W_0^2\theta_E &= \eta\delta_3 q, \quad W_0^2\theta_F &= \eta\delta_2 q \\
 \sin\bar{\alpha}_0 &= [n_1 + W_0(\delta_2 n_3 - \delta_3 n_2)]/V_{DT} \\
 n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, \quad \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 &= 1, \quad V_{DT} = [1 + W_0^2(\delta_2^2 + \delta_3^2)]^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

для определения параметров $\bar{\alpha}_0, q, W_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, n_1, n_2, n_3, \mu, \eta, \theta_E, \theta_F$ тривиального движения. Первое уравнение служит для определения отношения q/μ , четвертое и пятое для

определения θ_E, θ_F . Для второго и третьего уравнений предварительно рассмотрим четыре частных случая.

(1). Если $k(\bar{\alpha}_0) = 0$, то $\delta_2 = \delta_3 = 0$, и, следовательно, отсутствует вращающий момент для поддержания вращения.

(2). Если $n_2 = \delta_3 = 0$, то из второго уравнения следует равенство $k(\bar{\alpha}_0) = \cos \bar{\alpha}_0 / (\sin \bar{\alpha}_0 - n_3 V_{DT} / (\delta_2 W_0))$.

(3). Если $n_3 = \delta_2 = 0$, то из третьего уравнения следует равенство $k(\bar{\alpha}_0) = \cos \bar{\alpha}_0 / (\sin \bar{\alpha}_0 - n_2 V_{DT} / (\delta_3 W_0))$.

(4). Если $n_2 = n_3 = 0$, то имеем систему $\delta_2 W_0 (1 - k(\bar{\alpha}_0) \operatorname{tg} \bar{\alpha}_0) = 0, \delta_3 W_0 (1 - k(\bar{\alpha}_0) \operatorname{tg} \bar{\alpha}_0) = 0$. Здесь возможны два варианта: (а) $\delta_2 = \delta_3 = 0$ и, следовательно, имеем первый частный случай; (б) δ_2 и δ_3 принимают произвольные значения, а $k(\bar{\alpha}_0) = \operatorname{ctg} \bar{\alpha}_0$.

Пусть теперь δ_2, δ_3, n_2 и n_3 не равны нулю. Подставляя $k(\bar{\alpha}_0)$, выраженное из второго уравнения (5.1), в третье уравнение, получаем соотношение

$$n_2 \delta_2 + n_3 \delta_3 = 0 \quad (5.2)$$

из которого следует, что проекции векторов \mathbf{n} и δ на горизонтальную плоскость взаимно перпендикулярны. Это означает, что горизонтальная прямая, проходящая через центр давления лопасти и траекторию центра масс тела должна лежать в плоскости лопасти.

Подставляя $n_3 = -n_2 \delta_2 / \delta_3$, выраженное из (5.2), в третье и шестое уравнения системы (5.1) и вводя обозначения

$$p_1 = n_2 / \delta_3, \quad p_2 = \delta_2^2 + \delta_3^2 \quad (5.3)$$

запишем эти уравнения в виде

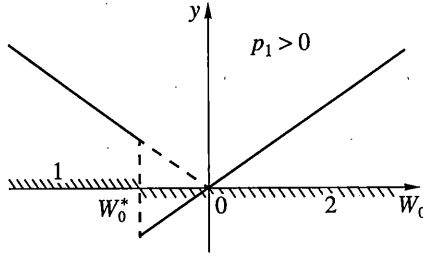
$$k = \frac{\cos \bar{\alpha}_0}{\sin \bar{\alpha}_0 + p_1 [1 + W_0^2 p_2]^{1/2} / W_0}, \quad \sin \bar{\alpha}_0 = \frac{n_1 - W_0 p_1 p_2}{[1 + W_0^2 p_2]^{1/2}} \quad (5.4)$$

Здесь $n_1^2 = 1 - p_1^2 p_2$ и знаменатель в первом уравнении не обращается в нуль, иначе $\delta_2 = \delta_3 = 0$, и, следовательно, $n_2 = n_3 = 0$. Этот случай был рассмотрен выше. Также отметим, что для p_1 и p_2 справедливы неравенства

$$0 < p_1^2 \leq 1/p_2, \quad 0 < p_2 < 1 \quad (5.5)$$

Первое неравенство из (5.5) получено подстановкой $n_3 = -n_2 \delta_2 / \delta_3$ в неравенство $0 < n_2^2 + n_3^2 \leq 1$. Параметры p_1 и p_2 выражены через три величины n_2, δ_2, δ_3 . Задаем δ_3 ($\delta_3^2 \leq p_2$), тогда $n_2 = \delta_3 p_1, \delta_2^2 = p_2 - \delta_3^2, \delta_1^2 = 1 - \delta_2^2 - \delta_3^2$.

Перейдем к исследованию уравнений (5.4). Для определенности будем считать $n_1 \geq 0$, тогда $-\pi/2 \leq \bar{\alpha}_0 \leq \pi/2$ и, следовательно, $\cos \bar{\alpha}_0 \geq 0$. Исключая переменную $\bar{\alpha}_0$ из первого уравнения (5.4) с помощью выражения для $\sin \bar{\alpha}_0$ из второго уравнения, выделяя полный квадрат, получаем преобразованное первое уравнение $k = W_0 \sqrt{p_2} \operatorname{sign}(n_1 W_0 + p_1)$.



Фиг. 9

Построим график $y(W_0) = W_0 \sqrt{p_2} \operatorname{sign}(n_1 W_0 + p_1)$ и исследуем его вид в зависимости от аргумента и параметров. При $n_1 = 0$ знак выражения $n_1 W_0 + p_1$ определяется знаком p_1 . Пусть $n_1 > 0$, тогда рассмотрим случаи положительных значений параметра p_1 . Если $p_1 > 0$, то $n_1 W_0 + p_1 > 0$ при $W_0 > W_0^* = -p_1/n_1$. В точке $W_0 = W_0^*$ график терпит разрыв (фиг. 9). Если $p_1 < 0$, то $n_1 W_0 - |p_1| > 0$ при $W_0 > W_0^* = |p_1|/n_1$. Тогда $W_0 = W_0^*$ здесь также является точкой разрыва. График исследуемой функции представляется зеркальным отображением графика, изображенного на фиг. 9, относительно оси ординат. Параметр p_2 может изменяться в пределах от нуля до единицы. Поэтому угол наклона прямых к оси W_0 на представленных рисунках не превышает $\pi/4$. В соответствии с (2.2) $\max p_1^2 p_2 = p_2/p_2 - 1$ и поэтому верно неравенство $0 \leq 1 - p_1^2 p_2 < 1$, из которого следует, что при изменении p_1^2 в пределах $]0; 1/p_2[$ величина $|W_0^*|$ изменяется в пределах $]0; \infty[$.

Исходя из вида графиков на фиг. 9, рассмотрим четыре случая, два из которых представлены в виде цепочек соотношений:

$$(1) \quad p_1 > 0, \quad W_0 > -p_1/n_1; \quad \Rightarrow k = W_0 \sqrt{p_2} \quad \text{и} \quad W_0 = k/\sqrt{p_2} \Rightarrow k > -p_1 \sqrt{p_2}/n_1;$$

$$(2) \quad p_1 > 0, \quad W_0 < -p_1/n_1; \quad \Rightarrow k = W_0 \sqrt{p_2} \quad \text{и} \quad W_0 = -k/\sqrt{p_2} \Rightarrow k > p_1 \sqrt{p_2}/n_1,$$

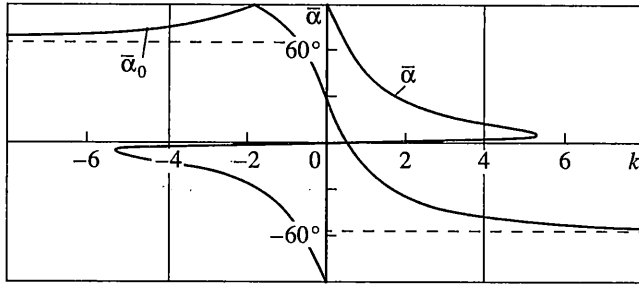
а оставшиеся два случая:

$$(3) \quad p_1 < 0, \quad W_0 > |p_1|/n_1; \quad \Rightarrow k = W_0 \sqrt{p_2} \quad \text{и} \quad W_0 = k/\sqrt{p_2} \Rightarrow k > |p_1| \sqrt{p_2}/n_1;$$

$$(4) \quad p_1 < 0, \quad W_0 < |p_1|/n_1; \quad \Rightarrow k = -W_0 \sqrt{p_2} \quad \text{и} \quad W_0 = -k/\sqrt{p_2} \Rightarrow k > -|p_1| \sqrt{p_2}/n_1$$

как уже отмечалось выше, могут быть представлены зеркальным отображением графиков, изображенных на фиг. 9, относительно оси ординат. Соответствующие этим случаям области изменения W_0 обозначены на рисунке штриховкой с указанием номера, причем случай (3) отвечает случаю (1), а случай (4) случаю (2). Подставляя выраженные таким образом W_0 во второе уравнение системы (5.4), получаем в первом и четвертом случаях

$$\bar{\alpha}_0 = \arcsin \frac{n_1 - k|p_1| \sqrt{p_2}}{\sqrt{1 + k^2}} \tag{5.6}$$



Фиг. 10

втором и третьем случаях

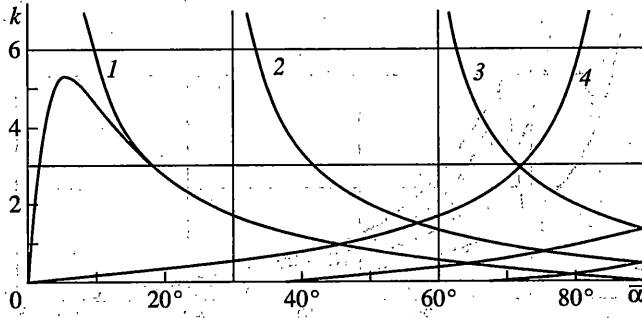
$$\bar{\alpha}_0 = \arcsin \frac{n_1 + k|p_1|\sqrt{p_2}}{\sqrt{1+k^2}} \quad (5.7)$$

График функции $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0(k)$ в соответствии с (5.6) представлен на фиг. 10. Она непрерывна, имеет горизонтальные асимптоты $\bar{\alpha}_0 = \arcsin(p_1\sqrt{p_2})$ и $\bar{\alpha}_0 = \arcsin(-p_1\sqrt{p_2})$. Кривая $\bar{\alpha}_0(k)$ имеет две точки пересечения с осями координат: $k = n_1(p_1/\sqrt{p_2})$, $\bar{\alpha}_0 = 0$ и $k = 0$, $\bar{\alpha}_0 = \arcsin n_1 > 0$. Функция (5.6) имеет максимум $\bar{\alpha}_0 = \pi/2$ при $k = -|p_1|\sqrt{p_2}/n_1$. Точки пересечения кривой $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0(k)$ в соответствии с (5.6) с кривой $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(k)$, полученной обращением функции качества, определяют стационарные значения $\bar{\alpha}_0$ и W_0 . Напомним, что зависимость $k = k(\bar{\alpha})$ получена интерполяцией экспериментальных данных.

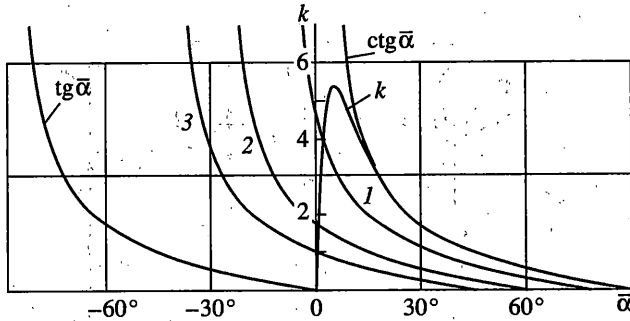
График функции $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0(k)$ из (5.7) получается зеркальным отображением соответствующего графика на фиг. 10.

Проверив соответствие полученных стационарных значений выписанным выше четырем условиям, видим, что точки пересечения при отрицательных k для функции (5.7) решением не являются. В случае положительных k максимум функции (5.7) должен лежать внутри области, ограниченной осью $\bar{\alpha}_0 = 0$ и кривой $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(k)$. Этот случай также не реализуется, так как максимум функции (5.7) находится в точке $\bar{\alpha}_0 = \pi/2$; $k = |p_1|\sqrt{p_2}/n_1$, которая совпадает с $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(k)$ только когда $p_1 = 0$ или $p_2 = 0$. При этом из (5.7) получаем $k = \text{ctg } \bar{\alpha}$ (фиг. 11, кривая 1). Для наглядности интерпретации результатов на фиг. 11 поменяем местами оси Ok и $O\bar{\alpha}$ и проведем несколько характерных кривых. При увеличении p_1 и p_2 максимум удаляется от оси $O\bar{\alpha}$ (фиг. 11, кривая 2 ($p_1 = 1$, $p_2 = 0.16$) и кривая 3 ($p_1 = 2.5$, $p_2 = 0.16$)). Когда p_1 принимает максимально возможное значение для данного p_2 (см. (5.5)), то из (5.7) получаем $k = -\text{tg } \bar{\alpha}$ (фиг. 11, кривая 4 ($p_1 = 2.5$, $p_2 = 0.16$)).

Точки пересечения кривой $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0(k)$ и экспериментальной кривой $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(k)$ удовлетворяют упомянутым условиям. Определим их количество. С этой целью исследуем поведение функции (5.6) в зависимости от параметров p_1 и p_2 . Если $p_1 = 0$ и $p_2 = 0$, то из



Фиг. 11



Фиг. 12

(5.6) получаем $k = \text{ctg } \bar{\alpha}$. При $p_1 = 0$ и $p_2 = \text{const}$ также имеем $k = \text{ctg } \bar{\alpha}$ (фиг. 12, $p_2 = 1$). Если и $p_1 \neq 0$, то функция (5.6), которая на фиг. 12 представлена в координатах $(\bar{\alpha}, k)$, лежит ниже $\text{ctg } \bar{\alpha}$. Но так как функция качества $k(\bar{\alpha})$ при $\bar{\alpha} \in [17^\circ; 90^\circ]$ практически совпадает с $\text{ctg } \bar{\alpha}$, то при $p_1 \neq 0$ и $p_2 \neq 0$ всегда имеется одна точка пересечения кривой (5.6) и кривой $k(\bar{\alpha})$ (фиг. 12, кривая 1 ($p_1 = 0.2, p_2 = 1$), кривая 2 ($p_1 = 0.5, p_2 = 1$), кривая 3 ($p_1 = 0.7, p_2 = 1$)). Когда $|p_1|$ принимает максимально возможное значение для данного p_2 (см. (5.5)), то из (5.6) получаем $k = \text{tg } \bar{\alpha}$ (фиг. 12, $p_1 = 1, p_2 = 1$). Если увеличивать параметр p_2 при $p_1 = \text{const}$, то кривая (5.6), удаляется от $\text{ctg } \bar{\alpha}$ и приближается к $\text{tg } \bar{\alpha}$.

Рассмотрим входящие в систему (5.1) уравнения для определения параметров q, θ_E, θ_F . Используя (5.4) и полученное выше равенство

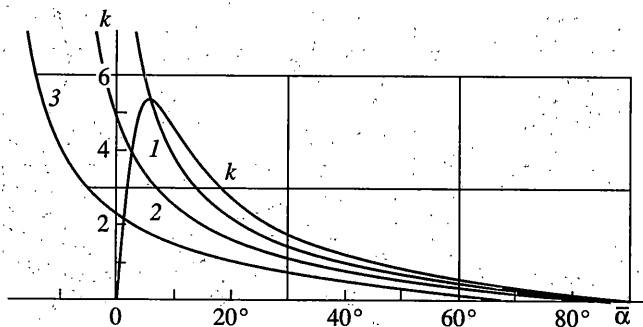
$$W_0^2 = k^2(\bar{\alpha}_0)/p_2 \quad (5.8)$$

запишем эти уравнения в виде

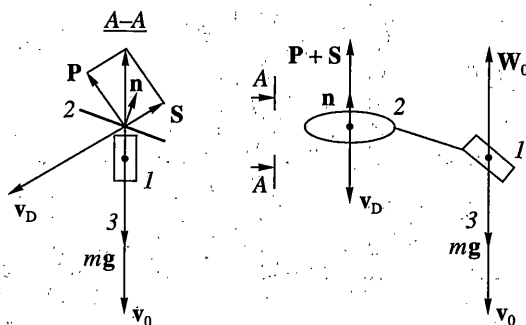
$$q = \mu s(\bar{\alpha}_0) \sqrt{[1 + k^2(\bar{\alpha}_0)]^3} \quad (5.9)$$

$$\theta_E = \mu \eta \delta_3 p_2 s(\bar{\alpha}_0) \sqrt{[1 + k^2(\bar{\alpha}_0)]^3} / k^2(\bar{\alpha}_0)$$

$$\theta_F = \mu \eta \delta_2 p_2 s(\bar{\alpha}_0) \sqrt{[1 + k^2(\bar{\alpha}_0)]^3} / k^2(\bar{\alpha}_0) \quad (5.10)$$



Фиг. 13



Фиг. 14

Величины θ_E и θ_F служат для определения безразмерных главных центральных моментов инерции $\theta_2 = I_2/I_1$ и $\theta_3 = I_3/I_1$ при заданных φ и θ . Исходя из (2.3), (3.4), получаем

$$\theta_2 = 1 + [\theta_F \operatorname{ctg} \varphi - \theta_E / \cos \theta] / \sin \theta, \quad \theta_3 = \theta_2 - \theta_F / (\sin \theta \sin \varphi \cos \varphi)$$

Величины θ_2, θ_3 должны удовлетворять известным неравенствам треугольника $1 + \theta_2 \geq \theta_3$, $1 + \theta_3 \geq \theta_2$, $\theta_2 + \theta_3 \geq 1$. Поэтому параметры μ, η , углы θ и φ , а также другие параметры, которые определены ранее, необходимо выбирать так, чтобы выполнялись указанные неравенства.

В качестве примера определим стационарные скорости снижения v_0 и вращения w_0 при $m = 10$ кг, $\rho = 1.3$ кг · м³. Переходя в (5.8) и первом уравнении (5.9) к размерным величинам и учитывая равенство $d_2^2 + d_3^2 = p_2 d^2$, получаем

$$w_0 = v_0 k(\bar{\alpha}_0) / (d \sqrt{p_2}), \quad v_0^2 = 2mg / \left(\rho S_m s(\bar{\alpha}_0) \sqrt{[1 + k^2(\bar{\alpha}_0)]^3} \right)$$

Результаты расчетов для различных значений параметров p_1, p_2, d и радиуса лопасти r_{bl} приведены в табл. 2. Значения параметров $k(\bar{\alpha}_0)$ и $s(\bar{\alpha}_0)$ определялись, исходя из фиг. 12, 13 и табл. 1.

Структура сил, действующих на тело и лопасть при тривиальном движении приведена на фиг. 14. Центр масс тела (1) снижается вдоль вертикали (3), а лопасть (2) вра-

p_1	p_2	k	s	$d, [м]$	$r_{bb}, [м]$	$v_0, [м/с]$	$w_0, [ГГц]$
0.5	0.16	4.0	0.03	1	0.15	32.3	51.5
0.5	0.81	2.0	0.03	1	0.15	80.9	28.6
0.1	0.16	5.4	0.05	1	0.15	16.3	35.0
0.1	0.81	4.2	0.04	1	0.15	26.1	19.4
0.1	1.00	4.0	0.04	1	0.15	28.0	17.8
0.1	0.81	4.2	0.04	1	0.20	19.2	14.3
0.1	1.00	4.0	0.04	1	0.20	20.5	13.1
0.1	0.81	4.2	0.04	0.5	0.20	19.2	28.6
0.1	1.00	4.0	0.04	0.5	0.20	20.5	26.2

щается вокруг этой вертикали. Опрокидывающий момент от действия результирующей аэродинамических сил уравновешивается моментом центробежных сил инерции, возникающих из-за вращения тела вокруг не главной оси инерции.

6. Винтовое движение. Трансцендентная система алгебраических уравнений (3.5) представляет собой условия существования винтового движения (3.1) и служит для определения параметров $\bar{\alpha}_0, q, W_0, V_{10}, c_2, c_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3, n_1, n_2, n_3, \mu, \eta, \theta_E, \theta_F$ этого движения. Напомним, что для винтового режима $W_0 \neq 0, c_2^2 + c_3^2 \neq 0, \delta_2^2 + \delta_3^2 \neq 0$. Подставляя $c_3 = -\delta_2 c_2 / \delta_3$, выраженное из четвертого уравнения системы (3.5), во второе, третье, седьмое и десятое уравнения этой системы и вводя обозначения

$$p_1 = \delta_2 n_3 - \delta_3 n_2, \quad p_2 = \delta_2^2 + \delta_3^2, \quad p_3 = c_2 / \delta_3 \tag{6.1}$$

после несложных преобразований получаем два уравнения

$$k(\bar{\alpha}_0) = \frac{p_2(p_3 - W_0) \cos \bar{\alpha}_0}{p_2(p_3 - W_0) \sin \bar{\alpha}_0 + V_{D0} p_1}, \quad \sin \bar{\alpha}_0 = \frac{n_1 [1 - p_2 p_3^2]^{1/2} + (W_0 - p_3) p_1}{V_{D0}} \tag{6.2}$$

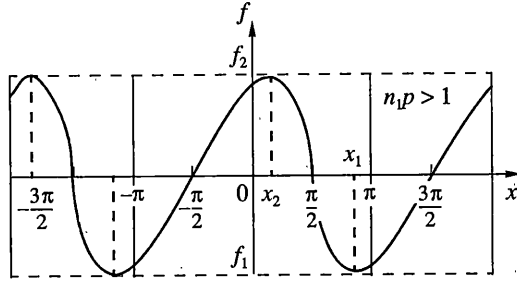
$$V_{D0} = [1 - 2p_2 p_3 W_0 + p_2 W_0^2]^{1/2}$$

Если $\delta_3 = 0$, то из четвертого уравнения системы (3.5) вместо c_3 выражаем c_2 и приходим к аналогичным уравнениям. На параметры (6.1) наложены условия

$$p_1^2 \leq p_2(1 - n_1^2) < 1, \quad 0 < p_2 < 1, \quad 0 < p_3^2 < 1/p_2 \tag{6.3}$$

Последняя формула из (6.3) получается подстановкой $c_3 = -\delta_2 c_2 / \delta_3$ в неравенство $0 < c_2^2 + c_3^2 < 1$. Второе неравенство очевидно. Первое неравенство будет получено ниже.

Параметры (6.1) выражены через пять величин $\delta_2, \delta_3, n_2, n_3, c_2$. Задаем δ_3 ($\delta_3^2 \leq p_2$) и n_1 ($n_2^2 + n_3^2 = 1 - n_1^2$), тогда $c_2 = p_3 \delta_3, \delta_2^2 = p_2 - \delta_3^2, \delta_1^2 = 1 - \delta_2^2 - \delta_3^2$. Величины n_2 и n_3 получаем из системы $n_2^2 + n_3^2 = 1 - n_1^2, n_3 - (p_1 + \delta_3 n_2) / \delta_2$. Возводя второе уравнение в квадрат и подставляя его в первое вместо n_3^2 , приходим к квадратному уравнению,



Фиг. 15

дискриминант которого $D = 4(p_2 - \delta_3^2)[p_2(1 - n_1^2) - p_1^2]/p_2^2$. Так как $p_2 - \delta_3^2 \geq 0$, то для выполнения условия $D \geq 0$ требуется выполнение неравенства $p_2(1 - n_1^2) - p_1^2 \geq 0$, то есть $p_1^2 \leq p_2(1 - n_1^2)$ (см. (6.3)). После определения $\bar{\alpha}_0$ и W_0 с помощью уравнений (6.2) и экспериментальной зависимости аэродинамического качества $k(\bar{\alpha})$, параметр μ находится из второго или третьего уравнений системы (3.5). Далее из первого уравнения системы (3.5) определяется параметр q . Пятое и шестое уравнения служат для определения величин θ_E и θ_F при заданном значении η .

Рассмотрим более подробно систему (6.2). Выражая из второго уравнения этой системы параметр p_1 и подставляя его в первое уравнение, получаем

$$k(\bar{\alpha}_0) = \frac{\cos \bar{\alpha}_0}{\sin \bar{\alpha}_0 + n_1 p} (1 - p^2), \quad p = V_{D0} / [1 - p_2 p_3^2]^{1/2} = V_{D0} / V_{10} \quad (6.4)$$

Исследуем параметр p . Пусть $p = 1$, тогда $V_{D0} = [1 - p^2 p_3^2]^{1/2}$. Возводя в квадрат, получаем $p_2(W_0 - p_3)^2 = 0$. Так как $p_2 > 0$, то $W_0 = p_3$. Раскрывая выражение для p_3 (см. (6.1)), с учетом четвертого уравнения системы (3.5) получаем $c_2 = W_0 \delta_3$ и $c_3 = -W_0 \delta_2$. Заметим, что если $p = 1$, то $k(\bar{\alpha}_0) = 0$ и, следовательно, $\bar{\alpha}_0 = 0$ или $\bar{\alpha}_0 = \pi/2$.

Пусть $p > 1$, тогда $(W_0 - p_3)^2 > 0$ и $W_0 \neq p_3$. Параметр p не может быть меньше единицы, так как $(W_0 - p_3)^2 > 0$. Из изложенного следует, что $p \geq 1$. В дальнейшем будем считать, что $p > 1$.

Перейдем к исследованию функции, стоящей в правой части уравнения (6.4), которую запишем в виде

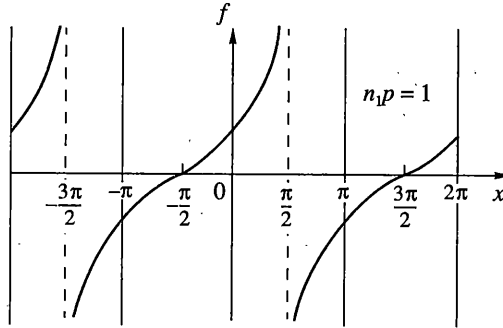
$$f(x) = (1 - p^2) \cos x / (\sin x - n_1 p) \quad (6.5)$$

Произведение $n_1 p$ может принимать любые значения. При всех $n_1 p$ для $f(x)$ справедливы равенства $f(0) = f(2\pi) = (p^2 - 1)/(n_1 p)$, $f(x) = f(x + 2\pi)$. Если $n_1 p > 1$, то функция $f(x)$ (фиг. 15) непрерывна, равна нулю в точках $x = \pi m/2$ ($m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$), имеет минимум $f_1 < 0$ в точках x_{1m} ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

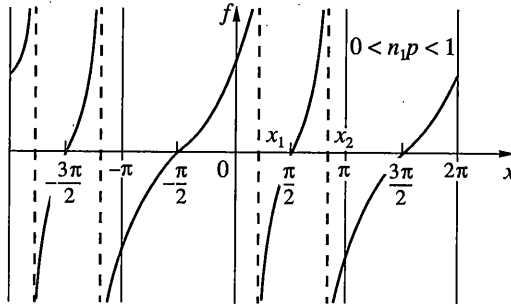
$$x_{1m} = (2m + 1)\pi - \arcsin \frac{1}{n_1 p}, \quad f_1 = n_1 p (1 - p^2) \cos x_{1m} / (1 - n_1^2 p^2)$$

и максимум $f_2 > 0$ в точках x_{2m} :

$$x_{2m} = 2\pi m + \arcsin \frac{1}{n_1 p}, \quad f_2 = n_1 p (1 - p^2) \cos x_{2m} / (1 - n_1^2 p^2)$$



Фиг. 16



Фиг. 17

Пусть $p \rightarrow \infty$, тогда $x_{1m} \rightarrow \pi(2m + 1)$, $x_{2m} \rightarrow 2\pi m$, $f_1 \rightarrow -\infty$, $f_2 \rightarrow -\infty$. Пусть $n_1 p \rightarrow 1$, тогда $x_{1m}, x_{2m} \rightarrow \pi(4m + 1)/2$, $f_1 \rightarrow -\infty$, $f_2 \rightarrow +\infty$.

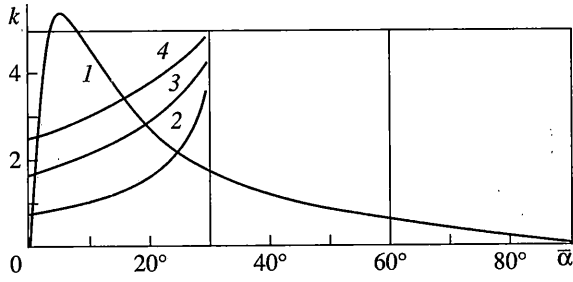
Если $n_1 p = 1$, то $f(x)$ имеет разрыв (фиг. 16) при $x = 2\pi(4m + 1)/2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этих точках функция $f(x)$ имеет вертикальные асимптоты, между которыми она растет с увеличением x .

Если $0 < n_1 p < 1$, то $f(x)$ имеет разрывы (фиг. 17) при $x_{1m} = 2m\pi + \arcsin(n_1 p)$ и $x_{2m} = \pi(2m + 1) - \arcsin(n_1 p)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В этих точках функция $f(x)$ имеет вертикальные асимптоты, между которыми она растет с увеличением x . Пусть $n_1 p \rightarrow 1$, тогда $x_{1m}, x_{2m} \rightarrow \pi(4m + 1)/2$. Пусть $n_1 p \rightarrow 0$, тогда $f(x) \rightarrow -(p^2 - 1) \operatorname{ctg} x$. Для $n_1 p < 0$ функция $f(x)$ образуется сдвигом $f(x)$, полученной при $n_1 p > 0$, на π вправо или влево.

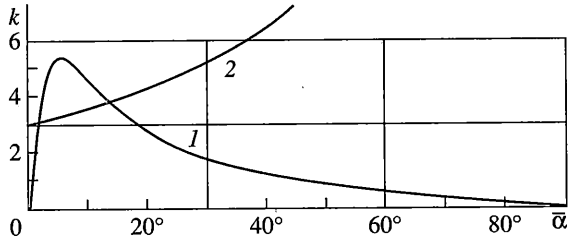
Стационарное значение угла атаки $\bar{\alpha}_0$ определяем, решая уравнение (6.4). Исходя из свойств и вида графика функции качества $k(\bar{\alpha}_0)$, видим, что если существует решение $\bar{\alpha}_0$, то возможны два случая. Для $n_1 p > 0$ $\bar{\alpha}_0 \in [0; \pi]$, причем, если $\bar{\alpha}_0 \in [0; \pi/2]$, то $|k(\bar{\alpha}_0)| = |k(\pi - \bar{\alpha}_0)|$. Для $n_1 p < 0$ $\bar{\alpha}_0 \in [0; 2\pi]$, причем, если $\bar{\alpha}_0 \in [0; 3\pi/2]$, то $|k(\bar{\alpha}_0)| = |k(2\pi - \bar{\alpha}_0 + \pi)|$. В связи с этим точное значение $\bar{\alpha}_0$ при численном исследовании достаточно искать только для $n_1 p > 0$ на промежутке от нуля до $\pi/2$. Если при заданном параметре p существует стационарное значение угла атаки $\bar{\alpha}_0$ то значение угловой скорости получаем из равенства $p = V_{D0} [1 - p_2 p_3^2]^{1/2}$, из которого следует

$$W_0 = p_3 \pm [(p^2 - 1)(1 - p_2 p_3^2) / p_2]^{1/2} \quad (6.6)$$

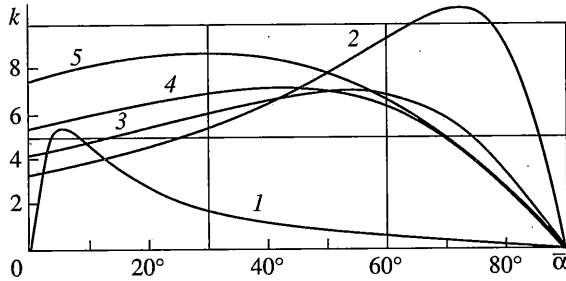
Двум разным знакам в (6.6) соответствуют два значения V_{D0} .



Фиг. 18

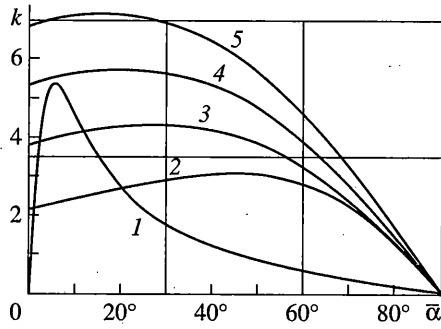


Фиг. 19

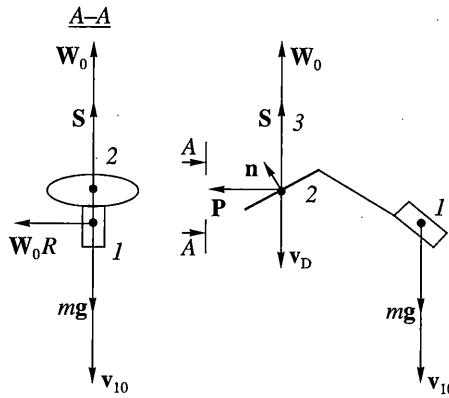


Фиг. 20

Исходя из свойств построенных графиков (фиг. 15–17) и функции аэродинамического качества $k(\bar{\alpha})$, можно провести оценку значений параметров n_1 и p , при которых стационарное значение $\bar{\alpha}_0$ заведомо не существует. Точек пересечения кривой (6.5) и кривой $k(\bar{\alpha})$ не будет, если $f(0) \geq \max k(\bar{\alpha})$. Обозначая $\max k(\bar{\alpha}) = k_{\max}$ ($k_{\max} \approx 5.5$), а $f(0) = (p^2 - 1)/(n_1 p)$, указанное условие запишем в виде неравенства $p^2 - k_{\max} n_1 p - 1 \geq 0$, из которого следует, что $p \geq (k_{\max} n_1 + [(k_{\max} n_1)^2 + 4]^{1/2})/2$. Например, если $n_1 = 0.5$, то при $p \geq 3.0752$ стационарного значения $\bar{\alpha}_0$ заведомо нет. Поэтому будем считать, что $1 < p < 3.0752$. На фиг. 18 изображены графики функции (6.5) в случае $0 < n_1 p < 1$ при $n_1 = 0.5$ и $p = 1.2$ (кривая 2), 1.5 (кривая 3), 1.8 (кривая 4). Там же представлена экспериментальная зависимость $k(\bar{\alpha})$ (кривая 1). Точки пересечения кривой (6.5) с экспериментальной кривой $k(\bar{\alpha})$ дают стационарные значения угла атаки $\bar{\alpha}_0$. На



Фиг. 21



Фиг. 22

фиг. 19 изображен график функции (6.5) в случае $n_1 p = 1$ при $p = 2$ (кривая 2). Случай $n_1 p > 1$ представлен на фиг. 20 при $n_1 = 0.5$ и $p = 2.1$ (кривая 2), 2.5 (кривая 3), 3.0 (кривая 4), 4.0 (кривая 5). Пересечения с кривой качества $k(\bar{\alpha})$ (кривая 1) имеют только при $p = 2.1$ и $p = 2.5$. Это говорит о том, что значения угловой скорости W_0 (см. (6.6)) принадлежат интервалу $[W_{0\min}, W_{0\max}]$ при заданных n_1, p_2, p_3 . Здесь значения $W_{0\min}$ и $W_{0\max}$ вычисляются из (6.6) для такого значения параметра p , при котором кривая (6.5) касается экспериментальной зависимости функции качества $k(\bar{\alpha})$, то есть когда имеется только одно стационарное значение угла атаки $\bar{\alpha}_0$. Случай $n_1 p > 1$ также представлен на фиг. 21 при $n_1 = 0.7$ и $p = 2.0$ (кривая 2), 3.0 кривая 3, 4.0 (кривая 4), 5.0 (кривая 5).

В качестве примера определим стационарные скорости снижения v_{10} и вращения w_0 , а также радиус R винтовой линии при $m = 10$ кг, $\rho = 1.3$ кг \cdot м³, $p_2 = 0.999$, $p_3 = 0.001$. Переходя к размерным величинам, из (3.2), (3.4), (3.5) получаем

$$w_0 = W_0 v_0 / d, \quad v_{10} = v_0 (1 - p_2 p_3^2)^{1/2}, \quad R = d p_3 p_2^{1/2} / W_0$$

Здесь $v_0 = g/d$ определяется из первого уравнения системы (3.5). Результаты расчетов для различных значений параметров n_1, p, r_{bl} и d приведены в табл. 3. Параметры $\bar{\alpha}_0$,

Таблица 3

n_1	p	$\bar{\alpha}_0$, [град]	$k(\bar{\alpha}_0)$	$s(\bar{\alpha}_0)$	r_{bb} [М]	d	w_0 , [Гп]	v_0 , [м/с]
0.9	5	5.5	5.4	0.05	0.5	1.0	24	31
0.9	4	2.7	4.2	0.03	0.5	1.0	63	102
0.9	4	11.4	4.3	0.1	0.5	1.0	18	30
0.9	4	11.4	4.3	0.1	0.5	0.5	37	30
0.9	3	4.6	3.0	0.04	0.5	1.0	82	183
0.9	3	17.1	3.2	0.22	0.5	1.0	14	32
0.9	3	17.1	3.2	0.22	0.5	0.5	29	32
0.9	3	17.1	3.2	0.22	0.4	1.0	23	51
0.9	2	0.8	1.7	0.02	0.5	1.0	334	1213
0.9	2	27.8	1.9	0.6	0.5	1.0	12	42
0.9	2	27.8	1.9	0.6	0.5	0.5	23	42
0.7	3.9	5.5	5.4	0.05	0.5	1.0	39	65
0.7	3	2.3	3.9	0.03	0.5	1.0	108	240
0.7	3	12.3	4.1	0.12	0.5	1.0	27	61
0.7	2	1.2	2.2	0.02	0.5	1.0	334	1213
0.7	2	21.0	2.6	0.33	0.5	1.0	21	76
0.5	2	1.7	3.1	0.03	0.5	1.0	225	816
0.5	2	13.7	3.8	0.15	0.5	1.0	45	162

$k(\bar{\alpha}_0)$, $s(\bar{\alpha}_0)$ определялись, исходя из фиг. 18–21 и табл. 1. При изменении p от 1.8 до 5.0 радиус R винтовой линии имел порядок 10^{-3} – 10^{-4} м.

Структура сил, действующих на тело и лопасть при винтовом движении приведена на фиг. 22. Центр давления лопасти (2) снижается вдоль вертикали (3), а центр масс тела (1) вращается вокруг этой вертикали, двигаясь по спирали. В этом случае опрокидывающий момент от действия результирующей аэродинамических сил также как и в случае тривиального движения уравновешивается моментом центробежных сил инерции, возникающих из-за вращения тела вокруг не главной оси инерции. Составляющая аэродинамических сил, направленная горизонтально, создает центростремительную силу. Такое движение, конечно, очень грубо, подобно движению самолета в штопоре [7]. Винтовой режим движения был получен и исследован в [8].

7. Заключение. В рамках принятой динамической модели показано существование плоского, тривиального и винтового движений твердого тела с жесткой лопастью. В случае плоского движения центр масс тела и центр давления лопасти расположены на одной вертикальной прямой. Параметры этого движения зависят от ориентации лопасти. В случае тривиального режима горизонтальная прямая, проходящая через центр давления лопасти и траекторию центра масс тела, должна лежать в плоскости лопасти. При таких движениях угол атаки $\bar{\alpha}$ остается постоянным. Его стационарное значение определяется как точка пересечения экспериментальной кривой зависимости аэродинамического качества в кривой, полученной из условий существования винтового движения. Оказалось, что при поиске стационарных значений $\bar{\alpha}_0$ достаточно ограничиться промежутком от нуля до $\pi/2$. На этом промежутке в случае винтового режима существует три (если указанные кривые пересекаются в районе максимума аэро-

динамического качества) или два (если кривые касаются) стационарных значений $\bar{\alpha}_0$ (включая $\bar{\alpha}_0 = \pi/2$). В случае плоского режима таких решений два (включая $\bar{\alpha}_0 = \pi/2$), в случае тривиального – одно. По найденным значениям $\bar{\alpha}_0$ определяются компоненты скорости спуска, угловая скорость и другие параметры, отвечающие за ориентацию лопасти и расположение центра давления.

Автор благодарит В.А. Сарычева за полезные обсуждения и В.Н. Бондаренко за выполнение расчетов, а также В.А. Самсонова за полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-01-00174), Президентской программы поддержки ведущих научных школ России (проект № 00-15-96036) и Italian Landau Network-Centro Volta (2000–2001 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crimi P. Analysis of samara-wing decelerator steady-state characteristics // J. Aircraft. 1988. V. 25. № 1. P. 41–47.
2. Джонсон У. Теория вертолета. Т. 1. М.: Мир, 1983. 502 с.
3. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
4. Зенкин А.Н., Привалов В.А., Самсонов В.А. О квазистатической модели воздействия среды на авторотирующее тело // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 73–78.
5. Flächsbart O. Messungen an Ebenen und Gewölbten Platten // Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. Hrsg. von L. Prandtl und A. Betz, 4, Munchen und Berlin, 1932.
6. Привалов В.А. Об установившихся движениях тяжелого осесимметричного тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 19–21.
7. Бочкарев А.Ф., Андреевский В.В., Белоконов В.М. и др. Аэромеханика самолета: динамика полета. М.: Машиностроение, 1985. 357 с.
8. Бугрова М.И., Привалов В.А. Нелинейные колебания тела в свободном падении в атмосфере // Сб. научно-методических статей по теоретической механике. М.: Изд-во МГУ, 2000. № 23. С. 217–223.

Москва

Поступила в редакцию
16.04.2001