

УДК 531.38

© 2003 г. С.В. СТРЕЛЬЦОВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОНТАКТНЫХ СИЛ ПРИ КАЧЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА ПО ОСНОВАНИЮ КОНЕЧНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Рассматривается плоская задача качения колеса по шероховатой поверхности. Построена модель, учитывающая конечные жесткости основания и колеса. Полученное выражение контактных сил переходит в известные ранее соотношения для предельных случаев.

Рассмотрим плоское движение колеса по горизонтальной поверхности. Введем правую ортогональную систему координат $Oxyz$ с началом в середине области взаимодействия колеса с опорной поверхностью. Ось x лежит в недеформированной опорной плоскости, ось y направлена вверх, ось z дополняет оси x и y до правой тройки. Движение происходит в плоскости Oxy (см. фиг. 1). В недеформированном состоянии контур колеса является круговым диском радиуса R_0 описываемым кривой $y = r(x)$, а в деформированном – контур колеса и опорной поверхности разделены гладкой кривой, обозначаемой $y = \Delta(x)$.

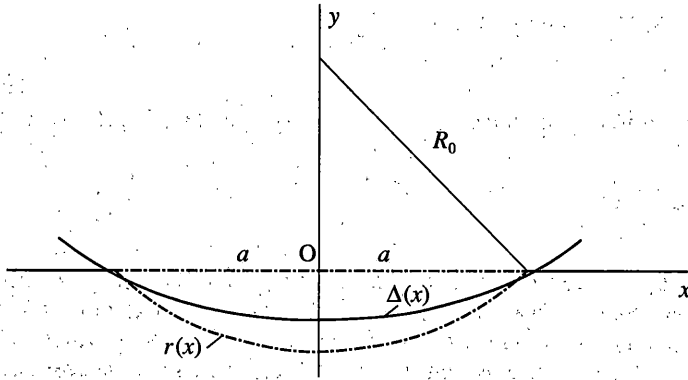
Случай, когда кривая $\Delta(x)$ совпадает с контуром диска, подробно исследован в [1] и в наибольшей степени отвечает задаче проката деформируемого материала жестким катком. Случай, когда $\Delta(x)$ совпадает с опорной плоскостью, традиционен для задач качения деформируемого пневматика по дороге с твердым покрытием и изучался в [2–7].

Рассматриваемая ниже задача, характеризующаяся соизмеримостью жесткостей колеса и опорной поверхности, может служить модельной для рассмотрения качения, например, железнодорожного колеса по рельсу, или деформируемого пневматика по дороге с покрытием конечной жесткости.

Модель взаимодействия колеса с опорной поверхностью определяется следующими допущениями:

зона деформации мала по сравнению с размерами колеса; внешний контур колеса нерастяжим, касательные составляющие скорости всех его точек одинаковы; диссипация энергии при нормальных и касательных деформациях не учитывается (аналогично ([1, 5])); область контакта однородна вдоль оси x по своим упругим и фрикционным свойствам; время пребывания точек колеса в зоне контакта мало по сравнению с характерными временами движения системы, включающей в себя рассматриваемое колесо (автомобиль); нормальные составляющие сил взаимодействия элементов контура колеса с элементами опорной поверхности пропорциональны величинам локальных нормальных деформаций соответствующих контуров. В силу малости угла между локальной нормалью и осью y эти составляющие с точностью до 2-го порядка малости по этому углу можно считать ориентированными по оси y . Обозначим через p_{1y} локальную нормальную составляющую силы воздействия элемента опорной поверхности на элемент колеса, а через $p_{2y} = -p_{1y}$ обратную силу. Тогда

$$\begin{aligned} p_{1y} &= C_1 v_1, & p_{2y} &= C_2 v_2 \\ v_1 &= \Delta(x) - r(x), & v_2 &= \Delta(x) \end{aligned} \quad (1)$$



Фиг. 1

Здесь и далее индекс 1 придается величинам, относящимся к колесу, индекс 2 – относящимся к опорной поверхности, u_1 и u_2 – величины локальной нормальной деформации, C_1 и C_2 – коэффициенты удельных нормальных жесткостей колеса и поверхности соответственно. Знак величин нормальной деформации выбран положительным при деформации в сторону положительного направления оси y ; касательные составляющие сил взаимодействия описываются в рамках так называемой “brush-модели” [1, 4, 5, 7]. При этом предполагается, что контуры колеса и опорной поверхности имеют наборы бесконечно малых, безмассовых упругих элементов, так называемых “щетинок”. Корневые концы щетинок на колесе и опорной поверхности жестко скреплены с контурами колеса и опорной поверхности соответственно. Щетинки, находящиеся на колесе, друг с другом не взаимодействуют, так же ведут себя и щетинки опорной поверхности. Обозначим касательную составляющую силы воздействия элемента опорной поверхности на элемент колеса через p_{1x} , соответственно, обратная сила $p_{2x} = -p_{1x}$. Эти силы в линейном приближении выглядят так:

$$p_{1x} = K_1 u_1, \quad p_{2x} = K_2 u_2 \tag{2}$$

здесь K_1 и K_2 – касательные жесткости щетинок, u_1 и u_2 – величины их касательных деформаций, считающиеся положительными при деформации в сторону положительного направления оси x (см. фиг. 2).

Для определения характеристик нормальных реакций в зоне контакта сделаем допущение, что кривая $\Delta(x)$ является параболой (аналогично [2, 6, 7]):

$$\Delta(x) = -b(1 - x^2/a^2) \tag{3}$$

при этом профиль нормальной деформации симметричен, ширина зоны деформации составляет $2a$. Обозначим через P_{1y} , P_{2y} главные вектора нормальных составляющих сил взаимодействия:

$$P_{1y} = \int_{-a}^a p_{1y}(x) dx, \quad P_{2y} = \int_{-a}^a p_{2y}(x) dx, \quad 0 = p_{1y} + p_{2y} \tag{4}$$

Обозначив главный вектор нормальной реакции опорной поверхности, приложенной к колесу, через $N \equiv P_{1y}$, из (1), (3), (4) с точностью до $(a/R_0)^3$ получим:

$$a = \left(\frac{3}{2} R_0 N \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \right)^{1/3} \tag{5}$$

Из (3), (4) следует, что величина b есть

$$b = 3N/(4C_2a) \quad (6)$$

Величина локальной нормальной реакции $n(x) \equiv p_{1y}$, из (3), (5), (6) будет

$$n(x) = \frac{3N}{4a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (7)$$

Величина N определяется из динамических или статических уравнений, описывающих движение автомобильного колеса под действием приложенной к нему нагрузки.

Перейдем к вычислению главных векторов касательных составляющих сил взаимодействия P_{1x} и P_{2x} . Для определения величин u_1 и u_2 из (2) введем следующие обозначения: Ω – угловая скорость вращения недеформируемой части колеса вокруг оси z (дополняющей оси x и y до правой тройки); V_A – проекция скорости движения центра колеса на ось x .

Рассмотрим процесс взаимодействия отдельной щетинки после попадания ее свободного конца на опорную поверхность. На начальном этапе на нее действует кулонова сила трения, уравновешивающая упругую силу, с которой щетинка действует на колесо (2). Щетинка начнет проскальзывать, когда упругая сила достигнет максимального значения кулоновой силы покоя:

$$|p_{1x}(x)| = \mu_0 n(x) \quad (8)$$

где μ_0 – коэффициент кулонова трения покоя. После начала проскальзывания сила (2) остается равной

$$p_{1x}(x) = \mu_1 n(x) \frac{V_E}{|V_E|} \quad (9)$$

где V_E – скорость свободного конца щетинки, а μ_1 – коэффициент кулонова трения скольжения. Заметим, что для μ_0, μ_1 всегда верно отношение

$$0 < \mu_1 \leq \mu_0 \leq 1 \quad (10)$$

Найдем величины u_1, u_2 из (2). Рассмотрим сначала случай, когда проскальзывание между двумя щетинками отсутствует. Тогда проекции абсолютных скоростей точек контакта щетинок на ось x будут равны (см. фиг. 2):

$$V_A + \Omega R_0 - \dot{u}_1 = \dot{u}_2 \quad (11)$$

Из равенства $p_{2x} = -p_{1x}$ получим

$$u_1 K_1 = -u_2 K_2 \quad (12)$$

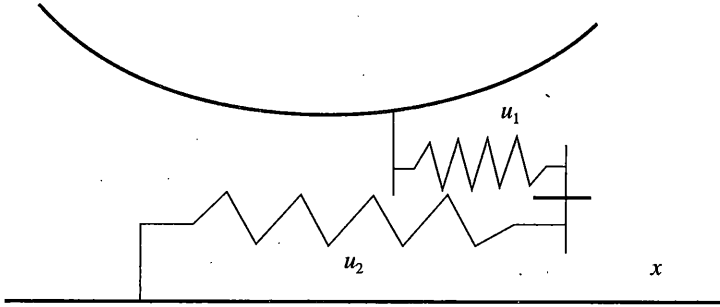
Согласно (12), соотношение (11) может быть записано как

$$V_A + \Omega R_0 = -\dot{u}_1 (1 + K_1/K_2) \quad (13)$$

или в виде

$$V_A + \Omega R_0 = \dot{u}_2 (1 + K_2/K_1) \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) могут быть использованы для рассмотрения предельных случаев, когда коэффициенты K_1 и K_2 сильно разнятся по своим величинам. Так, (14) удобно для описания процессов типа проката деформируемого материала. В свою



Фиг. 2

очередь, (13) удобно для исследования движения деформируемых колес по твердому основанию.

Рассматривая сначала соотношение (13), выразим зависимость $u_1(x, t)$ как $u_1(x)$. Для непроскальзывающей щетинки, принадлежащей колесу, координата ее закрепленного конца есть

$$x = a - \Omega R_0 t \quad (15)$$

Здесь через t обозначено время, прошедшее с момента первого контакта данной щетинки с опорной поверхностью.

Обращаясь к начальному предположению о малости времени пребывания щетинки в зоне контакта, будем считать постоянными величины Ω , a , N , V_A . Данное предположение может быть обосновано путем анализа системы уравнений, имеющей “быстро” и “медленно” меняющиеся переменные, как сингулярно возмущенной [8, 9]. В данном случае, “быстрыми” являются деформации колеса и опорной поверхности u_1 , u_2 , а “медленными” – параметры движения колеса и системы в целом V_A , Ω , a , N . Применяя к такой системе теорему А.Н. Тихонова, можно показать, что величины, характеризующие движение колеса, могут считаться параметрами при рассмотрении процессов, связанных с деформацией колеса. Таким образом, из (13), (15) следует

$$u_1(x) = \frac{-s(a-x)K_2}{K_1 + K_2} \quad (16)$$

Здесь через s обозначено так называемое “псевдоскольжение” [1, 2, 4, 6–8]:

$$s = (V_A + \Omega R_0)/(\Omega R_0) \quad (17)$$

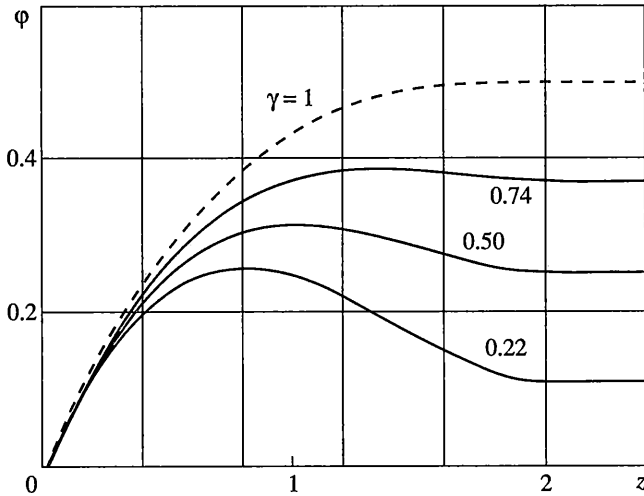
Для нахождения координат границ зоны непроскальзывания x^* , решим уравнение, следующее из (2), (7), (12), (16):

$$K_1 |u_1(x^*)| = \mu_0 n(x^*) \quad (18)$$

Исходя из (7) и (16), получим

$$x_1^* = a, \quad x_2^* = \frac{4K_1 K_2 |s| a^3}{3\mu_0 N (K_1 + K_2)} - a \quad (19)$$

Условием отсутствия зоны непроскальзывания является $x_2^* > a$. В этом случае величина касательной составляющей вектора силы взаимодействия определяется пу-



Фиг. 3

тем интегрирования (9) по всей зоне контакта. Окончательно, обозначив главный вектор касательной составляющей реакции основания через P_{1x} , из (8), (9), (16), (19) получим

$$P_{1x} = \text{sign } V_E \left(\int_a^{x_2^*} \mu_1 n(x) dx + \int_{x_2^*}^a K_1 u_1(x) dx \right), \quad x_2^* \leq a \quad (20)$$

$$P_{1x} = \text{sign } V_E \int_{-a}^a \mu_1 n(x) dx, \quad x_2^* > a$$

Согласно (16), (19), условием отсутствия зоны непроскальзывания для величины s будет:

$$s > \frac{3\mu_0 N(K_1 + K_2)}{2K_1 K_2 a^2} \quad (21)$$

Используя (19), (21) выражение (20) можно записать в виде

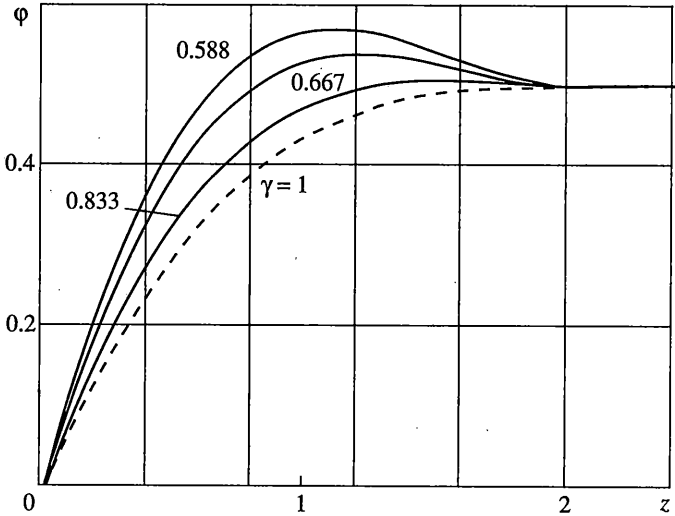
$$\varphi(z) = \mu_1 \left(-\frac{1}{4}z^3 + \frac{3}{4}z^2 \right) + \mu_0 \left(\frac{3}{8}z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{2}z \right), \quad z \leq 2 \quad (22)$$

$$\varphi(z) = \mu_1, \quad z > 2$$

где введены обозначения:

$$z = \frac{4}{3\mu_0 N(K_1 + K_2)} |s|, \quad \varphi = \text{sign } V_E \frac{P_{1x}}{N} \quad (23)$$

На фиг. 3, 4 приведены зависимости кривых $\varphi(z)$ от параметра $\gamma = \mu_1/\mu_0$. На фиг. 3 приведена зависимость при постоянном значении μ_0 . На фиг. 4 приведены графики для $\mu_1 = \text{const}$. Штриховой кривой дана зависимость при $\gamma = 1$ (отметим, что этот случай практически не встречается и может рассматриваться как предельный).



Фиг. 4

Найдем абсциссы экстремумов первого из уравнений в (22):

$$z_1 = 2, \quad z_2 = \frac{2\mu_0}{3\mu_0 - 2\mu_1} \quad (24)$$

Заметим, что $z_1 = 2$ означает гладкую склейку обеих частей (22). Согласно (10), z_2 всегда не превышает двух, и, как легко проверить, отвечает максимуму.

Рассмотрим зависимость отношения величины максимума характеристики (22) к ее предельному значению от параметра γ . Согласно (22), (24) получим

$$\frac{\varphi(z_2, \gamma)}{\mu_1} = \frac{4 - 3\gamma}{\gamma(3 - 2\gamma)^2} \quad (25)$$

Экстремумов внутри области значений $(0, 1]$ (согласно (10)) зависимость (27), не имеет, минимальное ее значение равно 1 и достигается при $\gamma = 1$. Анализ этих кривых показывает, что они близки к так называемым " $\varphi(s)$ диаграммам" [2, 6, 7], получаемым как экспериментально, так и аналитически.

Исследуем теперь зависимость касательной составляющей сил взаимодействия от различных соотношений коэффициентов K_1 и K_2 касательных жесткостей колеса и опорной поверхности. Для этого перейдем в (22) к величине s . Из (23), (24), (25) видно, что: величины максимальной и предельной сил не зависят от K_1 и K_2 ; расположение экстремума и величина наклона участка кривой $\varphi(s)$ в окрестности нуля существенным образом зависят от K_1 и K_2 .

При $K_2 \rightarrow \infty$ результаты согласуются как с модельными [5–7], так и с экспериментальными данными [2, 6] в силу (13). Но в случае, если K_2 сравнимо (или меньше) K_1 , тангенс наклона начального участка кривой может уменьшиться в несколько раз, по сравнению с $K_2 \rightarrow \infty$. Это обстоятельство существенным образом влияет на особенности движения колеса, поскольку изменяет зону $\varphi(s)$ диаграммы, соответствующую устойчивым режимам.

В литературе по пневматическим шинам общепринятой является гипотеза постоянного распределения нормальной реакции. В этих допущениях получены [5, 6] близ-

кие выражения для $\varphi(s)$ характеристики. Сравнение результатов данной работы с результатами из [5] показывает, что существует род отличий. Первым отличием является гладкость характеристики касательной составляющей силы реакции, в отличие от [5], где характеристика терпит излом в точке максимума. Во-вторых, величина максимума этой силы здесь зависит от обоих коэффициентов кулонова трения, а не только от μ_0 , как в [5]. Третьим отличием является зависимость абсциссы экстремума от параметров кулонова трения. В целом, однако, получаемые семейства кривых дают качественно схожую картину.

Автор благодарит за обсуждение работы И.В. Новожилова.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00961).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 6. С. 3–15.
2. *Левин М.А., Фуфаев Н.А.* Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 272 с.
3. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
4. *Новожилов И.В.* Качение колеса // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 50–55.
5. *Новожилов И.В., Стрельцов С.В.* О неголономных соотношениях в теории катящегося колеса // Проблемы нелинейного анализа и синтеза в инженерных системах. 1995. Вып. 1. С. 3–8.
6. Динамика системы “дорога – шина – автомобиль – водитель” / Под ред. А.А. Хачатурова. М.: Машиностроение, 1976. 535 с.
7. *Racejka H.V.* Lateral dynamics of road vehicles // Vehicle Syst. Dynam. Suppl. 1987. V. 16. P. 75–120.
8. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1991. 189 с.
9. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы и теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.07.2000