

УДК 533.6.013.42

© 2003 г. В.В. БОЛОТИН, А.А. ГРИШКО

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

На примере тонкой упругой панели, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, рассмотрено влияние демпфирования на устойчивость и послекритическое поведение автономных непотенциальных систем. Развита метод численного моделирования установившихся колебаний нелинейных систем после пересечения границы устойчивости начального состояния. Рассмотрены три типа демпфирования, а также их комбинации: аэродинамическое демпфирование; внутреннее трение Фойхта, при котором высшие формы колебаний оказываются более задемпфированными; конструктивное демпфирование, влияющее на определенные формы. В некоторых случаях обнаружены вторичные и последующие бифуркации, а также гистерезис при немономонном изменении управляющих параметров. Хотя анализ выполнен для конкретной механической модели, уравнения, полученные после дискретизации исходного уравнения, носят достаточно общий характер. Показано, что распределение демпфирования между формами колебаний существенно влияет на послекритическое поведение, тип которого при определенных условиях может качественно изменяться.

1. Известно [1–3], что влияние демпфирующих сил, неравномерно распределенных по степеням свободы (или формам колебаний) автономных неконсервативных систем, приводит к эффектам, которые на первый взгляд противоречат обычным представлениям о влиянии демпфирования на колебательные процессы. Это было впервые замечено Циглером [1] на примере двойного маятника, нагруженного “следающей” силой. Было показано, что критическая сила, вычисленная с учетом демпфирования, которое неравномерно распределено между степенями свободы, может быть меньше, чем критическая сила, вычисленная в предположении, что демпфирование отсутствует. Это дало основание говорить о “парадоксе Циглера”, породившем обширную литературу.

Однако уже в 1950-х годах было показано (см. ссылки в книге [2]), что “парадокс Циглера” является результатом неправильного истолкования теорем об устойчивости движения. Задача Циглера, как и другие задачи упругой устойчивости, приводящие к несамосопряженным задачам о собственных значениях, должна трактоваться в рамках теории устойчивости движения. По существу все эти задачи являются нелинейными, а уравнения, изучаемые с позиций устойчивости, представляют собой линеаризованные уравнения (уравнения в вариациях по терминологии Пуанкаре) соответствующих нелинейных уравнений. Поэтому к этим уравнениям в полной мере применима теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Если демпфирование отсутствует, то все характеристические показатели находятся на мнимой оси. С точки зрения теории устойчивости это соответствует сомнительному случаю по Ляпунову. Вводя диссипативные силы с полной диссипацией, устраняется неопределенность. Невозмущенное состояние устойчиво, пока все характеристические показатели лежат в

левой полуплоскости. Неустойчивость наступает, когда хотя бы один из характеристических показателей переходит на правую полуплоскость. Следовательно, чтобы судить об устойчивости, необходимо рассматривать задачу с учетом диссипативных сил [3].

Против этого, в общем, очевидного утверждения до сих пор выдвигают ряд возражений. Во-первых, рассуждают о различии между понятиями устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению снимает это возражение. Во-вторых, говорят о несовершенстве математических моделей, столь чувствительных к изменению параметров. Это возражение несостоятельно, поскольку при наличии демпфирования модели ведут себя “грубо” (топологически устойчиво) по отношению к изменению коэффициентов демпфирования. Случай, когда демпфирование отсутствует, является вырожденным, т.е. не входящим в семейство моделей, параметры которых варьируются. Наконец, имеется ряд публикаций, по мнению авторов которых критические параметры, вычисленные без учета демпфирования (названные в [4] “псевдокритическими”), могут оказывать существенное влияние на послекритическое поведение нелинейной системы. Подобные высказывания приведены без должного обоснования; они носят чисто эвристический характер, нуждаясь в проверке хотя бы на уровне вычислительного эксперимента.

Попытки обосновать значимость “псевдокритических” параметров легко объяснить. Сильное влияние демпфирования, неравномерно распределенного между степенями свободы (или формам колебаний), обесценивает большинство публикаций по неконсервативным задачам упругой устойчивости. В первую очередь это относится к работам по устойчивости упругих систем, нагруженных “следящими” силами, и работ по панельному флаттеру. Что касается работ по флаттеру крыльев и других несущих поверхностей летательных аппаратов, то к ним эти замечания относятся в меньшей мере. Формулы для аэродинамических сил, как правило, содержат члены, описывающие демпфирование. Поэтому даже в случае, когда внутреннее трение и конструкционное демпфирование не учитываются, моменту наступления флаттера предшествует положение всех характеристических показателей в левой полуплоскости.

Целью данной работы является выяснение вопроса о том, в какой мере превышение “псевдокритических” значений параметров влияет на поведение системы после потери устойчивости. Это делается для того, чтобы окончательно устранить иллюзии по поводу того, что устойчивость и послекритическое поведение автономных непотенциальных систем могут быть рассмотрены без учета демпфирования. Кстати, в свое время было показано [2], что классический метод Пуанкаре для определения посткритического поведения этих систем неприменим, если за порождающую систему принята система без демпфирования. Напротив, метод работает удовлетворительно, если порождающая система содержит демпфирующие члены с полной диссипацией.

В качестве механической модели рассмотрим упругую панель, находящуюся в сверхзвуковом потоке газа. Эта модель рассматривалась многократно как в линейной [2, 5], так и нелинейной [2, 6–9] постановке. В данной статье нелинейность введена как результат ограничений на сближение кромок. По сравнению с предыдущими публикациями, численное моделирование в этой работе выполнено с удержанием членов, обеспечивающих более высокий порядок точности. Основной результат работы состоит в подтверждении того факта, что переход через “псевдокритическое” значение скорости потока не обнаруживается ни при амплитудном, ни при частотном анализе установившихся послекритических колебаний. Кроме того, результаты работы могут рассматриваться как численное решение одной из классических задач нелинейной теории аэроупругости.

С прикладной точки зрения эта задача носит модельный характер. На небольших высотах H над уровнем моря (соответственно при большой плотности воздуха) аэродинамичес-

кое демпфирование велико, что выравнивает распределение демпфирования по формам колебаний. Заметим, что выражение “равномерное распределение демпфирования по формам колебаний” означает здесь равное затухание амплитуд за равные отрезки времени. При этом декременты колебаний, характеризующие скорость затухания за один период колебаний, убывают с ростом собственных частот. Вклад аэродинамического демпфирования становится малым на больших высотах, $H \sim 10^2$ км и более. Тогда неравномерность распределения демпфирования становится более существенной. Но при этом критические скорости становятся весьма большими, если только не рассматривать очень тонкие панели. Это выводит модель панельного флаттера из числа задач, имеющих серьезное прикладное значение. Вместе с тем, эта модель представляется более реалистичной, чем стержни, пластины и оболочки, которые нагружены “следящими” силами.

2. Пусть упругая панель с толщиной h , малой по сравнению с пролетом a , находится в свехзвуковом потоке газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси Ox (фиг. 1). Чтобы не усложнять задачу излишними техническими подробностями, примем, что панель оперта по концам $x = 0$ и $x = a$, а ее размер поперек потока достаточно велик, чтобы прогиб панели $w(x, t)$ можно было рассматривать как функцию продольной координаты x . Кромки панели закреплены от взаимных смещений, что вносит нелинейность, достаточно сильную для того, чтобы амплитуды панельного флаттера были малы по сравнению с пролетом панели. Возмущенное давление газа дает неконсервативную составляющую нагрузки. Целесообразно ввести в рассмотрение также консервативную составляющую в виде постоянной во времени сжимающей силы N_0 .

Пренебрегая осевой деформацией панели, представим дополнительную продольную силу при несмещающихся кромках $x = 0$ и $x = a$ (положительно при растяжении) в виде

$$N = \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} \int_0^a \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} dx - a \quad (2.1)$$

Поскольку при данных граничных условиях $|w(x, t)| \ll a$, то формулу (2.1) можно заменить на следующую:

$$N = \frac{Eh}{2a(1-\nu^2)} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.2)$$

В формулах (2.1) и (2.2) E – модуль упругости материала, ν – коэффициент Пуассона.

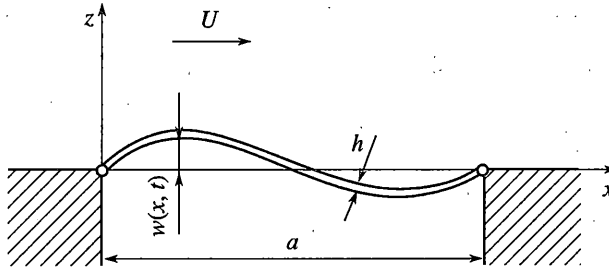
При больших сверхзвуковых скоростях возмущенное давление определим по приближенной формуле [2, 10]:

$$p = p_0 + \rho_\infty c \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

где p_0 – невозмущенное давление, ρ_∞ – плотность, U – скорость набегающего потока, c – скорость звука. Выражение в скобках в правой части (2.3) представляет собой поперечную составляющую скорости частиц газа, обтекающего колеблющуюся панель.

Более точное приближение, применяемое при числах Маха $M = U/c \geq \sqrt{2}$, имеет вид

$$p = p_0 + \frac{\rho_\infty U}{\sqrt{M^2 - 1}} \left(\frac{M^2 - 2}{M^2 - 1} \frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$



Фиг. 1

С учетом сделанных упрощений уравнение возмущенных колебаний панели принимает вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \left[N_0 - \frac{Eh}{2a(1-\nu^2)} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_\infty c U \frac{\partial w}{\partial x} = p_i - p_e \quad (2.5)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость панели, ρh – масса панели, отнесенная к единице ее площади, p_i – внутреннее, p_e – внешнее невозмущенное давление. Для упрощения примем в (2.5), что $p_i = p_e$. Уравнение содержит диссипативный член $L(\partial w/\partial t)$. При чисто аэродинамическом демпфировании с учетом формул (2.3) и (2.4) имеем

$$L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) = \rho_\infty U \frac{M^2 - 2}{(M^2 - 1)^{3/2}} \frac{\partial w}{\partial t} \approx \rho_\infty c \frac{\partial w}{\partial t} \quad (2.6)$$

В случае трения Фойхта

$$L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) = \gamma D \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \quad (2.7)$$

где γ – коэффициент из соотношения вязкоупругости для модели Фойхта. В случае (2.6) демпфирование равномерно распределено по формам колебаний в том смысле, что за равные отрезки времени все формы затухают в равном отношении. Если демпфирование достаточно мало, то “псевдокритическое” значение скорости U_{**} близко к истинному значению U_* . В случае (2.7) демпфирование оказывается тем больше, чем выше соответствующая собственная частота. При представлении решения в виде ряда по собственным формам демпфирование будет представлено членами, пропорциональными квадрату собственной частоты ω_k . Поскольку $\omega_k \sim k^2$, где k – номер собственной формы, то коэффициенты демпфирования при трении Фойхта растут как k^4 . Это дает весьма неравномерное распределение демпфирования по собственным формам. В общем случае, как правило, демпфирование распределено неравномерно, хотя аэродинамическая составляющая способствует его более равномерному распределению по формам колебаний. Таким образом, имеется широкий спектр задач, начиная с равномерного распределения демпфирования в случае (2.6) до распределения, пропорционального k^4 в случае (2.7).

Появление “парадокса дестабилизации вследствие трения” имеет простое объяснение. Влияние сил демпфирования носит амбивалентный характер. С одной стороны, диссипация энергии стабилизирует движение. С другой стороны, наличие диссипации

влияет на фазовые соотношения между формами колебаний. Если система неконсервативна, то при определенных условиях соотношения фаз между формами колебаний влечет за собой приток энергии от внешнего источника. Классический пример – разрушение гироскопической стабилизации равновесия при наличии диссипативных сил. Менее простые примеры – дестабилизация начальной формы вращения ротора вследствие наличия внутреннего трения. В этом случае при определенных условиях силы внутреннего трения оказываются действующими по направлению вращения, что приводит к неустойчивости типа синхронной прецессии [2].

Цель дальнейшего анализа состоит в том, чтобы на примере классической задачи о флаттере упругой панели в сверхзвуковом потоке газа оценить эффекты, связанные с неравномерным распределением демпфирования.

3. Для полноты изложения кратко остановимся на анализе линейной задачи. Полагая в (2.5) $p_i = p_e$ и опуская нелинейные члены, приведем это уравнение к виду

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho_{\infty} c U \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

с граничными условиями

$$w = 0, \quad \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \quad (x = 0, x = a) \quad (3.2)$$

Стандартная подстановка

$$W(x, t) = W(x) \exp(\lambda t) \quad (3.3)$$

приводит к задаче о собственных значениях для характеристического показателя λ . Эта задача является несамосопряженной. Наряду с возможностью неустойчивости типа дивергенции при пересечении границы $\lambda = 0$, имеется возможность флаттера при пересечении границы $\text{Re} \lambda \neq 0$. Область устойчивости невозмущенного решения $w \equiv 0$ естественно представить на плоскости параметров

$$\alpha = \frac{N_0 a^2}{\pi^2 D}, \quad \beta = \frac{2 \rho_{\infty} c U}{\rho h a \omega_1^2} \quad (3.4)$$

Параметр α характеризует консервативную составляющую нагрузки, параметр β – неконсервативную составляющую. В последнем случае использовано представление возмущенного давления газа в форме (2.3), а также использовано обозначение ω_1 для первой собственной частоты ненагруженной панели

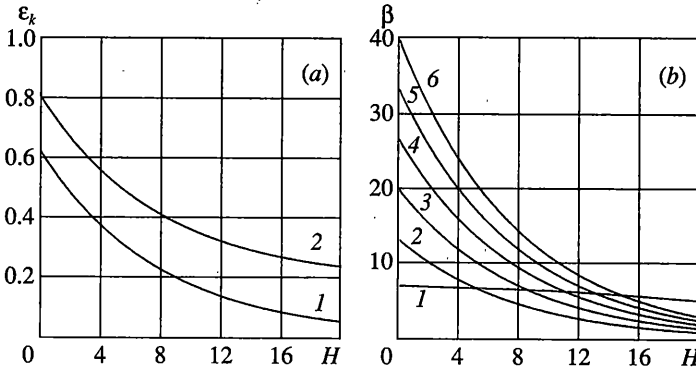
$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{a} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

В качестве параметра демпфирования возьмем величину

$$\varepsilon_k = \frac{\rho_{\infty} c}{\rho h \omega_1} + \gamma k^4 \omega_1 \quad (3.6)$$

где первый член в правой части учитывает вклад аэродинамического демпфирования, второй – вклад внутреннего трения Фойхта.

Параметры ε_k и β существенно зависят от плотности ρ_{∞} . С ростом высоты над уровнем моря H значения ε_k убывают, а значения β возрастают. Это проиллюстрировано на фиг. 2, построенной для панели из алюминиевого сплава с размерами $a = 0.5$ м, $h = 2$ мм и основной собственной частотой (3.5), составляющей $\omega_1 = 121.7$ с⁻¹. Коэффициент



Фиг. 2

трения Фойхта в формулах (2.7) и (3.6) принят $\gamma = 10^{-4} \text{ c}^2$. На фиг. 2, а показан график изменения ϵ_1 и ϵ_2 при росте H от нуля до 20 км. Зависимость параметра β от H и числа Маха M показана на фиг. 2, в, где линии 2...6 построены при $M = 2...6$, соответственно. Смысл линии 1 будет пояснен несколько позднее.

Границы области устойчивости на плоскости α, β показана на фиг. 3, а. Область устойчивости расположена в окрестности начала координат. Отрезок дуги соответствует границе дивергенции; на этой границе в формуле (3.3) имеем $\lambda = 0$. Линии близкие к прямым (но не прямые) соответствуют границе флаттера при различных значениях высоты над уровнем моря: $H = 1, 5, 10$ и 20 км. Смещение границы по оси β есть результат неравномерного распределения демпфирования по формам колебаний. Для оценки этого эффекта укажем, что при $\alpha = 0$ "псевдокритическое" значение β составляет $\beta_{**} = 7.02$, между тем как на высоте $H = 20$ км критическое значение снижается до $\beta_* = 5.10$.

В пересчете на критические числа Маха диаграмма устойчивости изменяет свой вид. Это показано на фиг. 3, в. С увеличением H критические числа Маха возрастают (значения H в км указаны у кривых). Однако эффект дестабилизации из-за неравномерно распределенного демпфирования сохраняется. Так, при $\gamma = 0$, т.е. при чисто аэродинамическом демпфировании, критическое число Маха составляет $M_* = 12.5$ по сравнению с $M_* = 7.1$ при учете трения Фойхта (линия 1 соответствует критическому значению β_* в функции от высоты над уровнем моря H).

4. Представим решение системы (2.5) в виде

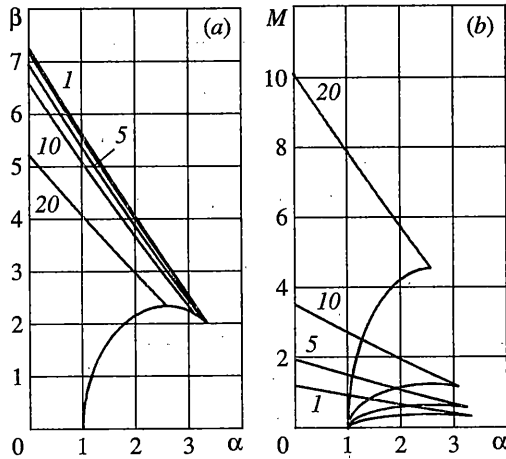
$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \quad (4.1)$$

где $q_k(t)$ – обобщенные координаты ($k = 1, 2, \dots$). Подстановка ряда (4.1) приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $q_k(t)$:

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} + \epsilon_k \frac{dq_k}{dt} + k^2(k^2 - \alpha)q_k + \beta \sum_{j \neq k} \frac{1 - (-1)^{j-k}}{k^2 - j^2} j q_j + 3k^2 q_k \sum_{j=1}^{\infty} j^2 q_j^2 = 0 \quad (4.2)$$

$(k = 1, 2, \dots)$

Здесь время t пронормировано как $\omega_1 t$, обобщенные координаты – как q_k/h .

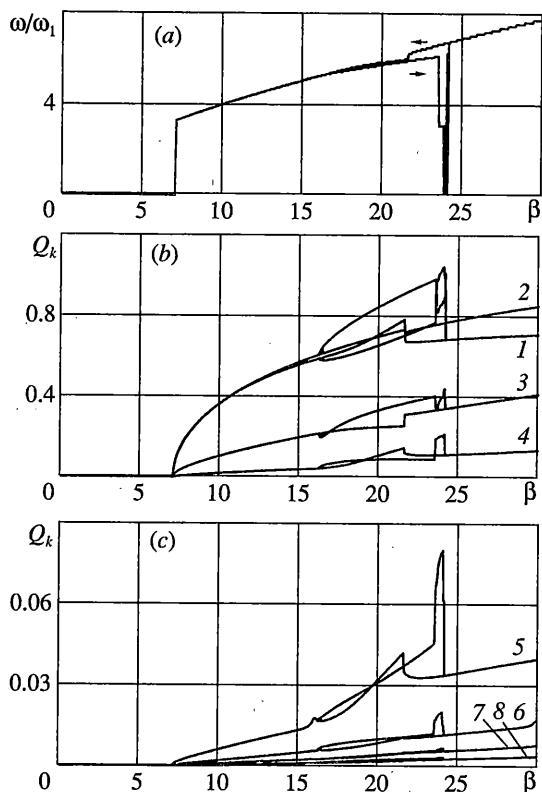


Фиг. 3

Методика численного анализа установившихся движений описана в [6]. Методика включает анализ периодичности (основанный на процедуре типа отображений Пуанкаре) и оценку огибающих установившегося процесса. Программа численного анализа обеспечивает малый шаг параметров, выдержку во времени до установления режима и использование результатов, полученных для предыдущей совокупности параметров, в качестве начальных данных для следующей совокупности. Результаты представляются в виде зависимостей основной частоты на выходе ω и значений огибающих $Q_k(t)$ обобщенных координат $q_k(t)$ в стационарном режиме от одного или нескольких управляющих параметров. Если тест на периодичность дает отрицательный результат, анализ дополняется построением спектральных плотностей выходных процессов и/или сечений Пуанкаре.

В общем случае в каждой точке пространства управляющих параметров имеется более одного аттрактора. Некоторые из дополнительных аттракторов могут быть обнаружены при обратном ходе изменения параметров. Другие аттракторы достижимы лишь из определенного бассейна притяжения [8]. Хаотические аттракторы, как правило, наблюдаются при значениях параметра α , превышающих критическое статическое значение. Происхождение таких аттракторов связано с наличием у системы при $\beta > 0$ двух и более устойчивых состояний равновесия, что приводит к установившимся режимам типа перемежающегося хаоса [9]. В нижеследующем анализе обсуждается случай $\alpha = 0$ при движении параметра β от значения $\beta = 0$ в сторону области неустойчивости с пересечением границы флаттера. Это позволяет более наглядно представить влияние неравномерно распределенного демпфирования на послекритическое поведение панели.

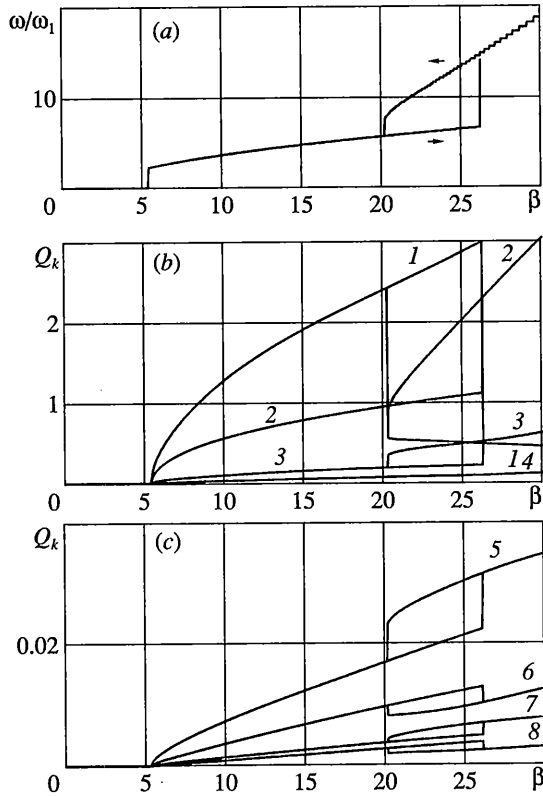
При численном моделировании бесконечную систему уравнений (4.2) усечем до конечного числа. Этому отвечает сохранение в правой части формулы (4.1) конечного числа членов. Известно [2], что неустойчивость типа флаттера в основном определяется взаимодействием нескольких младших форм колебаний. В задаче о флаттере панели в сверхзвуковом потоке это обычно две первые формы с одной и двумя полуволнами в направлении потока. Приводимые ниже результаты получены при сохранении в формулах (4.1) и (4.5) первых восьми форм колебаний. Параметры панели взяты такие же, как и для фиг. 2, 3. Вычисления выполнены для высоты над уровнем моря $H = 7$ км.



Фиг. 4

Начнем со случая, когда демпфирование распределено между формами колебаний равномерно, т.е. все ϵ_k в уравнениях (4.2) одинаковы. Это чисто аэродинамическое демпфирование, заданное формулой (3.6) при $\gamma = 0$. На высоте $H = 7$ км имеет место относительно малое (умеренное) демпфирование, при котором поправка на собственные частоты имеет порядок одного процента и менее. Графики для основной частоты ω и для огибающих Q_k первых восьми форм в функции от параметра потока β представлены на фиг. 4. Частота нормирована к значению ω_1 , а амплитуды колебаний нормированы к толщине панели h . Числа 1, ..., 8 обозначают номер соответствующей обобщенной координаты $q_1(t)$ и огибающих Q_k в стационарном режиме. Необходимо отметить, что значения параметра β на фиг. 4 и последующих диаграммах могут далеко выходить за пределы, которые отвечают скорости реальных летательных аппаратов и плотностям воздуха на полетных высотах (см. фиг. 2, 3). С этой точки зрения рассматриваемые здесь задачи имеют модельный характер с качественными выводами, которые могут быть распространены на широкий класс автономных непотенциальных систем.

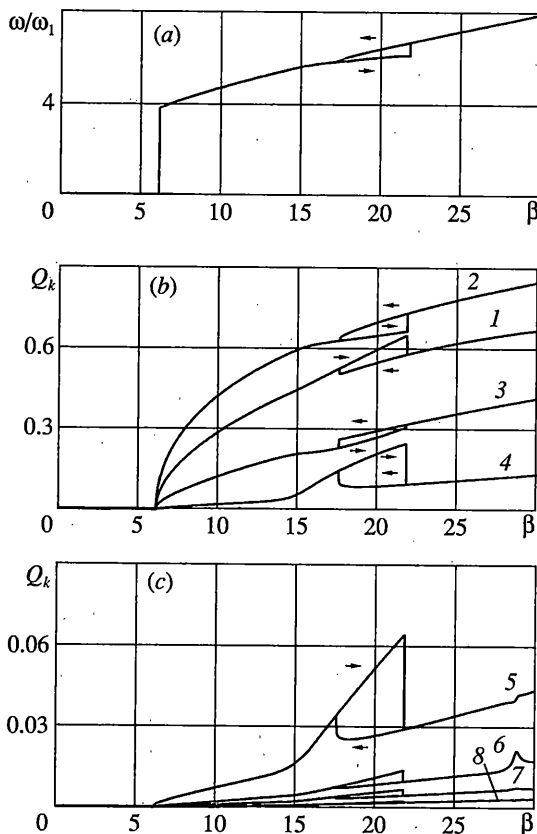
Плоская форма панели устойчива до значения $\beta_* \approx 7.10$, которое несколько выше "псевдокритического" значения, найденного без учета демпфирования. При $\beta = \beta_*$ имеет место бифуркация Андронова–Хопфа. Устанавливаются периодические колебания с частотой ω , лежащей в интервале $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Эта частота медленно растет с увеличением β . Послекритические колебания происходят с преобладанием первых



Фиг. 5

двух форм. Для принятых численных данных различие между Q_1 и Q_2 весьма мало, а на графике становится неразличимым. Значения Q_3 и Q_4 малы по сравнению с Q_1 и Q_2 , хотя ими в данной задаче пренебрегать нельзя. Вклад старших форм на порядок ниже. При движении в отдаленную послекритическую область наблюдается ряд бифуркаций, одна из которых, по-видимому, принадлежит к типу “удвоения периода”. Другие бифуркации происходят без заметного изменения основного периода. Первая из них находится вблизи $\beta = 16$ и обнаруживается при обратном ходе изменения параметра в виде срыва на начальную ветвь. В окрестности значения $\beta = 24$ наблюдается тенденция к хаотизации движения, которое далее сменяется периодическим режимом. Дополнительный анализ показывает, что в точках предполагаемых бифуркаций происходит существенное изменение фазовых портретов на плоскостях q_k, \dot{q}_k . Вычисления выполнены при $\alpha = 0$, т.е. при отсутствии начального сжатия панели.

Случай, когда присутствует трение Фойхта, проиллюстрирован на фиг. 5. Вычисления выполнены при $\gamma = 5 \cdot 10^{-4}$. Критическое значение параметра β составляет $\beta_{**} \approx 5.39$. Столь резкое снижение объясняется весьма неравномерным распределением демпфирования. После первичной бифуркации наблюдается монотонный рост частоты и амплитуд колебаний, причем вначале доминирует первая форма колебаний. Вторичная бифуркация наступает вблизи $\beta = 27$ и сопровождается удвоением основной частоты с резким падением вклада первой формы колебаний. И здесь наблюдается явление гистерезиса.



Фиг. 6

На фиг. 6 представлены численные результаты для случая, когда присутствует конструкционное демпфирование. Оно представлено установленным посредине пролета линейным демпфером с коэффициентом вязкого трения $b = 0.5\omega_1$. Этот демпфер существенно гасит первую форму колебаний. Значение критического параметра снижается до $\beta_* = 6.15$, т.е. вновь имеет место дестабилизация по отношению к критической скорости флаттера. На фиг. 6 всюду доминирует вторая (антисимметричная) форма. Что касается высших форм, то здесь влияние сосредоточенного демпфера проявляется в меньшей мере: как правило, амплитуды установившихся колебаний убывают с номером формы.

5. Таким образом, в развитие известных результатов о влиянии демпфирования на устойчивость непотенциальных автономных систем рассмотрено послекритическое поведение этих систем в областях, отдаленных от границ устойчивости. Выполнен амплитудный и частотный анализ применительно к классической задаче аэроупругости об устойчивости и послекритическом поведении тонкой упругой панели в сверхзвуковом потоке газа. Изучены три случая и их комбинации: равномерное распределение аэродинамического демпфирования по степеням свободы; внутреннее трение Фойхта; сильно задемпфированная (по сравнению с ближайшими формами) первая форма колебаний. Показано наличие вторичных бифуркаций при углублении в область флаттера, а также явление гистерезиса при немонотонном изменении скорости потока.

Как и следовало ожидать, “псевдокритическое” значение скорости потока (т.е. вычисленное для системы без демпфирования) не имеют отношения к послекритическому поведению нелинейной системы. Тип демпфирования и его распределение между степенями свободы существенно влияет на послекритическое поведение, причем в некоторых случаях это влияние носит качественный характер. Полученные в данной статье выводы относятся к частной модельной задаче. Однако эта задача содержит все элементы типичных задач устойчивости для автономных непотенциальных систем. Помимо широкого класса задач аэроупругости (начиная с классической задачи об изгибно-крутильном флаттере крыла), сюда входят задачи об устойчивости упругих систем, нагруженных “следящими” и “скользящими” силами, которые моделируют реакцию или давление струй жидкости, задачи об устойчивости гибких трубопроводов с быстро протекающей жидкостью и т.п. [12].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 00-01-00102 и 00-15-96138) и фонда Александра фон Гумбольдта (ФРГ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. Bd. 20. H 1. S. 49–56.
2. Болотин В.В. Нелинейный флаттер пластин и оболочек // Инж. сб. 1960. Т. 28. С. 55–75.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
4. Bolotin V.V. Stabilization and destabilization effects in mechanics of deformable systems // Proc. 6th Canadian Congr. on Appl. Mech. Vancouver. 1979. P. 1–10.
5. Мовчан А.А. Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
6. Болотин В.В., Гришко А.А., Петровский А.В. О влиянии демпфирующих сил на послекритическое поведение существенно непотенциальных систем // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 2. С. 158–167.
7. Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Ghantes C. Nonlinear panel flutter in remote post-critical domains // Intern. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 5. P. 753–764.
8. Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Ghantes C., Roberts J.B. Influence of initial conditions on the postcritical behavior of nonlinear aeroelastic systems // Nonlinear Dynamics and Control. 1998. V. 15. № 1. P. 63–81.
9. Dowell E.H. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system // J. Sound and Vibration. 1982. V. 85. № 3. P. 333–344.
10. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Наука, 2000. 591 с.
11. Болотин В.В., Гришко А.А., Митричев Т.В. Устойчивость тонкой панели с присоединенными элементами в сверхзвуковом потоке газа // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 12. С. 3–10.
12. Bolotin V.V. Dynamic instabilities in mechanic of structures // Appl. Mech. Rev. 1999. V. 52. № 1. P. R1–R9.

Москва

Поступила в редакцию
10.01.2002