

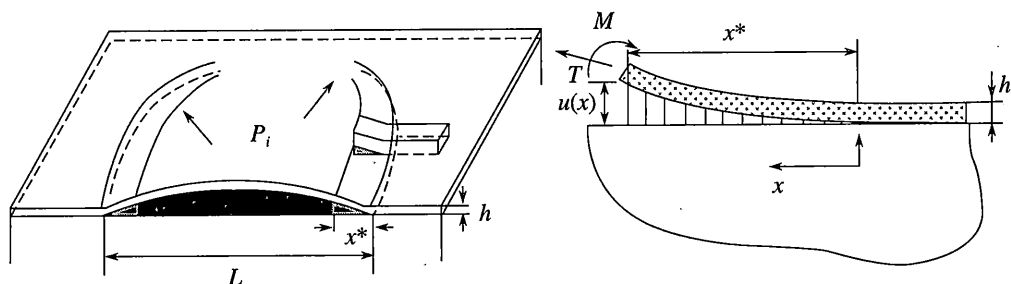
УДК 539.375

© 2003 г. Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, Н.М. ОСИПЕНКО

БАЛОЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОТСЛОЕНИЯ ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ

В современной технике все большее распространение получают многослойные элементы конструкций и системы с тонкими одно- и многослойными покрытиями. Разрушение таких элементов конструкций и покрытий часто связано с возникновением и развитием трещин по границам соединения. Моделирование адгезионной прочности и разрушения – актуальная проблема механики разрушения. В связи с этим представляют интерес модели, которые при сравнительно простых математических средствах позволяют углубить понимание процессов адгезионного разрушения и выявить сопутствующие им механические эффекты. К ним относятся балочные модели. Сошлемся при этом на работы [1–3], а также на решения ряда задач о распространении трещин по границам слоев, которые получены в балочном приближении [4, 5]. В данной работе предложено балочное приближение для моделирования сопротивления адгезионному разрушению при отслоении тонких покрытий, когда размер концевой зоны отслоения превышает толщину покрытия. Представительный элемент покрытия в концевой зоне заменяется эффективной балкой единичной ширины, нагруженной системой связей внутри концевой зоны. Внешние нагрузки представлены в виде продольной силы и сосредоточенного изгибающего момента, приложенных к свободному концу балки. Обсуждены условия закрепления балки в предположении о равенстве нулю удельной диссипации энергии в концевой зоне отслоения, рассматриваемой как эффективная трещина, внешние нагрузки в которой компенсированы силами сцепления. Продемонстрированы примеры использования предложенного подхода для решения задач об отслоении покрытий с различными видами связей между подложкой и покрытием.

1. Формулировка модели. Рассмотрим типичное нарушение адгезионной прочности тонкого покрытия – его отслоение от подложки под действием некоторой системы нагрузок (фиг. 1). Будем интересоваться случаем, когда толщина покрытия h много меньше других характерных размеров отслоения L . Поэтому анализ локальных условий предельного равновесия гладкого контура отслоения можно выполнить на консольной балке единичной ширины, вырезанной по нормали к контуру, в пределах которой кривизной фронта отслоения можно пренебречь. Будем также считать, что распределение нагрузок по ширине такой балки однородно, а боковые грани свободны от напряжений. Последнее допущение не принципиально. Оно в данном случае сводит задачу к плоской задаче относительно плоскости, ориентированной по нормали к контуру отслоения.



Фиг. 1

При нарушении адгезии балка отрывается от основания в области контура отслоения, что аналогично движению трещины по границе слоя. Такая аналогия может быть распространена как на разрушение при нормальном отрыве, так и при сдвиге. Будем интересоваться специальным случаем тонкого покрытия, в котором толщина покрытия меньше, чем характерный размер области действия сил сцепления между покрытием и подложкой в концевой области отслоения. Такой вариант покрытия характерен для изделий нанотехнологий, где толщины покрытий составляют несколько нанометров, т.е. несколько размеров атомов. Другой пример – обеспечение адгезионных связей путем применения клеев с большой предельной вытяжкой.

В этих вариантах покрытий удельная энергия, диссипируемая при продвижении фронта отслоения G , может быть сопоставлена с энергией деформирования эффективной балки, нагруженной силами сцепления, моделируемыми некоторой распределенной нагрузкой. Если при продвижении фронта отслоения наблюдается автономность концевой области, величина G становится характеристикой сопротивляемости адгезионного соединения развитию отслоения (аналог трещиностойкости). Относительная простота балочного подхода в совокупности с концепцией эффективной трещиностойкости позволяет получить аналитические зависимости, которые могут быть полезны в технологических задачах.

Будем интересоваться диссипацией энергии при продвижении концевой области отслоения как работой в ней сил сцепления, аналогично модели [6]:

$$G = \int_0^{u^*} \sigma(u) du \quad (1.1)$$

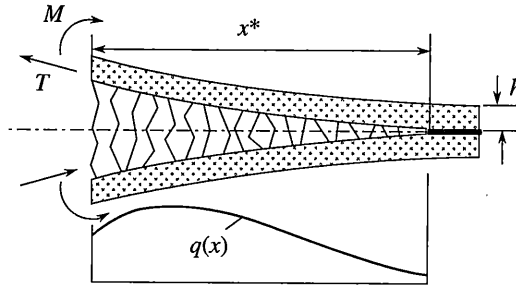
где $\sigma(u)$ – интенсивность сил сцепления, u – смещение в области действия сил сцепления.

В случае нормальных сил сцепления в координатах с вершиной в кончике области их действия, запишем как обычно

$$G = \int_0^{x^*} \sigma(u(x)) u'(x) dx \quad (1.2)$$

где x^* – характерный размер концевой области.

Заметим далее, что при анализе условий предельного равновесия рассматриваемой системы встречаются обычные в таком случае трудности. К ним относятся, в частности, вопросы учета влияния условий эффективного закрепления балки в концевой области при изгибе, оценка роли факторов взаимного влияния изгибающего момента и касательных сил на соответствующие нормальные и касательные смеще-



Фиг. 2

ния, а также выбор условий разрушения, замыкающих задачу. Коротко остановимся на этих вопросах применительно к данному варианту балочного приближения.

Рассмотрим вспомогательную задачу о трещине между двумя упругими симметричными балками, нагруженными силами сцепления q , касательными нагрузками T и изгибающими моментами M , приложенными на свободных концах балок (фиг. 2). Будем считать длину балок x^* равной размеру концевой области, а внешние нагрузки в отсутствующей части отслоения заменим упомянутыми сосредоточенными нагрузками T и M , приложенными в точке $x = x^*$, считая эти нагрузки известными. Силы сцепления q , распределенные по длине концевой области, компенсируют действие внешних нагрузок. Для определения ситуации в области закрепления (при $x = 0$) положим, что в конце такой эффективной трещины из-за действия сил сцепления выполняется условие равенства нулю удельной диссипации энергии G^* при продвижении трещины.

Упругая энергия, запасаемая в каждой из балок при действии изгибающих моментов и продольных сил, будет [7]:

$$U \approx \int_0^{x^*} \frac{M_\Sigma^2 dx}{2EJ} + \int_0^{x^*} \frac{T_\Sigma^2 dx}{2EF}, \quad J = \frac{lh^3}{12}; \quad F = lh \quad (1.3)$$

где $M_\Sigma(x)$ и $T_\Sigma(x)$ – изгибающие моменты и продольные силы в текущем сечении балки.

Поскольку силы сцепления, вообще говоря, произвольно ориентированы, они могут влиять как на изгибающий момент, так и на продольные силы. Поэтому можно записать

$$M_\Sigma = M - \int_{x^*}^{x^*-x} (x^* - x) q_y(x) dx \quad (1.4)$$

$$T_\Sigma = T - \int_{x^*}^{x^*-x} q_x(x) dx \quad (1.5)$$

где $q_y(x)$, $q_x(x)$ – проекции сил сцепления на оси координат.

Дифференцируя далее (1.3) по верхнему пределу, найдем $dU/dx^* = G^* = 0$:

$$\frac{12}{h^2} \left(M - \int_{x^*}^0 (x^* - x) q_y(x) dx \right)^2 + \left(T - \int_{x^*}^0 q_x(x) dx \right)^2 = 0 \quad (1.6)$$

Это условие определяет соотношение между компонентами нагрузки при их компенсации силами сцепления и размером концевой области x^* . Поскольку оба слагае-

мых в (1.6) положительно определены, равенство нулю всей суммы возможно только при условии равенства нулю каждого из слагаемых. Если на нагрузки не наложены специальные ограничения, это приводит к необходимости разделения задачи об изгибе и задачи о растяжении–сжатии эффективных балок. Величины x^* для этих задач будут различными. Поэтому в том случае, когда механизм разрушения адгезионного слоя неизвестен (не задан), могут возникать ошибки при интерпретации экспериментов. Например, если критические условия определяются параметрами сдвига (размер концевой зоны задан равенством нулю второго слагаемого в (1.6)), оценка размера концевой зоны для изгибающей компоненты нагрузок по (1.6) неправомерна. Такая ситуация, в частности, возможна при анализе нарушения адгезии в случае Ван-дер-Ваальсовых связей в области контакта.

Можно видеть, что если силы сцепления в (1.6) заданы в виде некоторых распределенных или сосредоточенных нагрузок (так что интегралы в скобках для нижнего предела равны нулю), выполнение условия (1.6) тождественно предположению о том, что в вершине концевой области (при $x \rightarrow 0$) изгибающий момент и касательная нагрузка равны нулю, что значительно облегчает постановку граничных условий в этой точке. Они могут быть заданы как для заделки ($u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$ для изгиба балки).

Заметим также, что (1.6) дает представление об относительной значимости каждого из компонентов напряженного состояния. Параметр h^2 для тонких покрытий снижает роль второго слагаемого, если силовые факторы изгиба и растяжения–сжатия сравнимы. Поэтому в дальнейшем остановимся в основном на анализе изгиба в концевой области.

Следует отметить, что в ряде случаев при физической постановке задачи создается ситуация переопределенности. Расчет предельного равновесия отслоения проводится в следующем порядке. Требуя выполнения условия (1.6), например при изгибе, можно получить взаимосвязь момента M , определяемого из внешней задачи об отслоении в целом, и размера концевой зоны при заданном характере распределения сил сцепления. Затем, используя некоторое условие разрушения, замыкающее задачу (например, величину предельной вытяжки материала δ на внутреннем контуре концевой зоны (при $x = x^*$), критический угол раскрытия в области x^*), можно найти соответствующее значение удельной диссипации энергии и предельно-равновесный размер отслоения. При этом вклад процессов сдвиговой компоненты напряженного состояния останется не востребуемым. Поэтому важно построение моделей конкретных механизмов деформирования и разрушения в адгезионном слое, которые позволяют делать соответствующие оценки.

В рамках балочного приближения можно выделить два эффекта взаимного влияния растяжения и изгиба (они известны в механике разрушения для трещин вблизи границы [4, 8]). Они максимально выражены в случае соединения упругой балки покрытия с жестким основанием. При растяжении балки ее сторона, обращенная к основанию и нагруженная силами сцепления, имеет дополнительное поперечное смещение из-за упругого деформирования материала балки

$$\Delta u \sim \frac{1}{2} \sigma h \mu / E \quad (1.7)$$

где σ – среднее продольное напряжение в покрытии, μ – коэффициент Пуассона.

Изгиб балки, вычисляемый для ее средней линии, приводит к появлению на боковых гранях касательных смещений, которые можно оценить по формуле

$$\Delta v \sim \frac{1}{2} h d u / d x \quad (1.8)$$

Заметим, что оценки дополнительных смещений, вызываемых взаимно влияющими силовыми факторами, нужно проводить с учетом ситуации в области эффективного

закрепления. В частности, если, например, условия предельного равновесия связываются с поперечным сдвигом и, стало быть, им определяется размер концевой области x^* , то для параметров изгиба в общем случае не выполняется условие равенства нулю изгибающего момента в заделке. Поэтому задачу об изгибе балки нужно ставить с учетом поворота в заделке, как это сделано, например, в [4] (более общий асимптотический анализ условия на контуре трещины-отслоения в трехмерном случае проведен в [9, 10]). Граничные условия в заделке приобретают вид

$$u_{(x=0)} = 0; \quad u'_{(x=0)} = \frac{1}{12}kEh^3 u''_{(x=0)} \quad (1.9)$$

где k – коэффициент. В [4] он найден в процедуре внутренних и внешних разложений для трещины, параллельной границе полуплоскости

$$k \sim 0.62h/EJ \quad (1.10)$$

С учетом (1.10) граничные условия (1.9) приобретают вид

$$u_{(u=0)} = 0; \quad u'_{(x=0)} \approx 0.62hu''_{(x=0)} \quad (1.11)$$

2. Моделирование адгезионной трещиностойкости. Покажем далее некоторые примеры приложения балочного приближения в задачах отслоения покрытий для варианта нагружения изгибающим моментом (удовлетворяющим условию (1.6)). Эффектами сдвига в концевой области будем пренебрегать. Концентрация процессов деформирования и разрушения в узкой вытянутой области на границе между подложкой и покрытием ассоциируется с моделью концевой области типа Дагдейла. В соответствии с классической постановкой задачи примем, что нормальные напряжения в концевой области, представляющие силы сцепления, постоянны $\sigma_y = \text{const} = q$.

Из (1.2) получим

$$G = q \int_0^{x^*} u'(x) dx = qu(x^*) \quad (2.1)$$

Условие разрушения, замыкающее задачу, запишем в двух типичных вариантах. В одном случае – случай предельной вытяжки – на внутреннем контуре концевой зоны достигается некоторое характерное смещение

$$u(x') = \text{const} = \delta \quad (2.2)$$

Отсюда и из (2.1) сразу следует обычное для модели типа Дагдейла соотношение

$$G = q_0 \delta \quad (2.3)$$

Сопротивление отслоению не зависит от параметров покрытия.

Во втором случае разрушение контролирует угол раскрытия концевой зоны вблизи внутреннего контура

$$u'(x^*) = \text{const} = \varphi \quad (2.4)$$

Связь между φ и смещением в точке x^* найдем из анализа упругой линии балки.

Согласно элементарной теории изгиба балок, для балки, имитирующей деформацию покрытия в концевой зоне, имеем

$$\frac{1}{12}Eh^3 u'' = M_\Sigma \quad (2.5)$$

$$M_\Sigma = M - \frac{1}{2}q(x^* - x)^2 \quad (2.6)$$

Из условия компенсации внешнего момента (1.6) получим

$$M = \frac{1}{2} q x^{*2} \quad (2.7)$$

Учитывая это обстоятельство, перепишем (2.5) в виде

$$\frac{1}{12} E h^3 u'' = q_0 x^* x - \frac{1}{2} q_0 x^2 \quad (u'(0) = 0, u^+(0) = 0) \quad (2.8)$$

Интегрируя дважды, получим

$$u' = \frac{6}{E h^3} \left(q_0 x^* x^2 - \frac{q_0 x^3}{3} \right), \quad u = \frac{2}{E h^3} \left(q_0 x^* x^3 - \frac{q_0 x^4}{4} \right) \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует

$$u'(x^*) = 4 q_0 x^{*3} / (E h^3), \quad u'(x^*) = 3 q_0 x^{*4} / (2 E h^3) \quad (2.10)$$

Следовательно

$$u(u'(x)) = k h (u'(x^*))^{4/3} (E / q_0)^{1/3}; \quad k = (3/2)^{11/3} \approx 0.24 \quad (2.11)$$

Подставляя далее (2.11) в (2.1), получим

$$G = k h (q_0^2 \phi^4 E)^{1/3} \quad (2.12)$$

Сопротивление отслоению при условии (2.4) пропорционально толщине покрытия и возрастает с ростом его жесткости.

В рамках модели можно получить оценки влияния других параметров. В технологических приложениях, например, важен учет податливости упругого основания.

Пусть по-прежнему $q = \text{const}$, а граница концевой зоны определяется условием предельной вытяжки δ . Тогда из (2.1) получим

$$G = q u(x^*) = q_0 (\delta + u^*(x^*)) \quad (2.13)$$

где $u^*(x^*)$ – смещение подложки в точке x^* .

Если оценивать $u^*(x^*)$ как смещение берега в средней части эффективной трещины длиной $2x^*$ и нагруженной однородными нагрузками q_0 в материале подложки, можно записать [5]:

$$u^*(x) \sim q_0 \sqrt{2 x x^* - x^2} / E^*, \quad u^*(x^*) \sim q_0 x^* / E^* \quad (2.14)$$

где E^* – модуль упругости подложки. Отсюда

$$G \sim q_0 (\delta + q_0 x^* / E^*) \quad (2.15)$$

Определим координату x^* , используя (2.9) и (2.2):

$$\frac{q_0 3 (x^*)^4}{2 E h^3} - \frac{q_0}{E^*} x^* = \delta \quad (2.16)$$

Соотношения (2.15) и (2.16) полностью определяют величину диссипации энергии при отслоении от податливой подложки.

Для примера положим $\delta \rightarrow 0$ в (2.16). Тогда

$$x^* \approx h^2 / 3 (E / E^*)^{1/3} \quad (2.17)$$

Отсюда и из (2.15):

$$G \approx (q_0^2/E^*)h(l_3(E/E^*))^{1/3} \quad (2.18)$$

Снижение эффективной податливости основания позволяет увеличить сопротивление отслоению, причем это увеличение пропорционально толщине покрытия.

Балочное приближение может быть полезным и при анализе взаимосвязи между диаграммой деформирования материала (адгезионного слоя) и эффективным сопротивлением отслаиванию. Для анализа задач такого типа можно использовать вариант обратного метода.

Пусть, например уравнение упругой линии эффективной балки в концевой области покрытия задано в виде двухпараметрической степенной функции

$$EJu'' = ax^n, \quad J = lh^3/12 \quad (2.19)$$

где a, n – некоторые постоянные, E – модуль упругости покрытия.

Уравнение (2.19) удовлетворяет условию $M(x=0) = 0$. Дифференцируя (2.19) дважды, получим в соответствии с теорией изгиба балок вид распределенной по концевой области нагрузки (силы сцепления)

$$q(x) = an(n-1)x^{n-2} \quad (2.20)$$

Найдем затем смещение балки при заданной функции изгибающего момента. Для этого интегрируем (2.19) два раза при условии $u'(0) = u(0) = 0$

$$u'(x) = \frac{12ax^{n+1}}{Eh^3(n+1)} \quad (2.21)$$

$$u(x) = \frac{12}{Eh^3} \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \quad (2.22)$$

Из (2.20) и (2.22) можно найти, исключая (x) , соотношение, характеризующее диаграмму растяжения клеевого или адгезионного промежуточного слоя между упругим покрытием и жесткой подложкой. Из (2.22) имеем

$$x = \left(\frac{uEh^3}{12a}(n+1)(n+2) \right)^{1/n+2} \quad (2.23)$$

Отсюда и из (2.20) получим

$$q(u) = an(n-1) \left(\frac{uEh^3}{12a}(n+1)(n+2) \right)^{(n-2)/(n+2)} \quad (2.24)$$

При деформировании нагрузка возрастает монотонно пропорционально смещению в степени $((n-2)/(n+2)) < 1$. Такое представление диаграмм растяжения может быть использовано для интерпретации экспериментальных данных, из которых находятся параметры n и a . По формулам (1.2), (2.20), (2.21) найдем для этого варианта диаграммы растяжения удельную диссипацию энергии при отслоении

$$G = \frac{a^2(n-1)}{(n+1)} (x^*)^{2n} \quad (2.25)$$

Величину x^* можно оценить из (2.23), полагая, например, смещение в точке x^* равным предельной вытяжке δ :

$$x^* = \left(\frac{\delta E h^3 (n+1)(n+2)}{12a} \right)^{1/(n+2)} \quad (2.26)$$

Тогда из (2.25) получим

$$G = \frac{a^2(n-1)}{n+1} \left(\frac{\delta E h^3 (n+1)(n+2)}{12a} \right)^{2n/(n+2)} \quad (2.27)$$

Удельная диссипация энергии возрастает с увеличением толщины покрытия как степенная функция с показателем $(6n/(n+2))$.

Используя другие простые функции, можно анализировать также немонотонное распределение сил сцепления по концевой области. Действительно, если использовать в уравнении упругой линии дробь вида

$$\frac{E h^3 u^n}{12} = \frac{ax + b}{(1 + cx)^n} \quad \text{при } n > 1 \quad (2.28)$$

можно моделировать распределенную нагрузку, линейно возрастающую от внешнего контура концевой зоны ($x \sim 0$) до максимального значения, а затем спадающую

$$q = \frac{mx + p}{(1 + cx)^{n+2}}, \quad m = ac^2 n(n-1) \quad (2.29)$$

$$p = (bn^2 c^2 + b - 2nca)$$

Число параметров можно уменьшить, накладывая дополнительные условия, например, полагая

$$M(0) = 0, \quad b = 0 \quad (2.30)$$

Пусть, например, $n = 2$. Тогда при соблюдении условий компенсации изгибающего момента (1.6) имеет $b = 0$, $m = 2ac^2$, $p = -4ac$. Силы сцепления нарастают по линейному закону до максимума $q = ac/128$ при $x_{\max} = 3/c$ и затем спадают, стремясь к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Из (1.2), (2.28) и (2.29) находим

$$G = \int_0^{x^*} q u'(x) dx = \frac{24a^2 x^*}{E h^3 c} \int_0^{\left[\ln(1+cx) - \frac{cx}{1+cx} \right] \frac{(cx-2)}{(1+cx)^4}} dx \quad (2.31)$$

Рассмотрим две асимптотические ситуации. Поскольку силы сцепления быстро уменьшаются при $x > x_{\max}$, верхний предел в (2.31) можно устремить в бесконечность, полагая, что размер концевой области превышает $x_{\max}$, а вклад связей при $x \gg x_{\max}$ невелик. Опуская громоздкие вычисления, получим из (2.31) для этого случая

$$G(x^* \rightarrow \infty) \approx \frac{16}{3} \frac{a^2}{E h^3 c^2} \quad (2.32)$$

Сопротивление отслоению тем выше, чем меньше параметр c , т.е. чем дальше от вершины отслоения находится максимум сил сцепления.

Если концевая область короткая и x^* мало, ситуация изменяется. Интегрируя (2.28) два раза при условии $u'(0) = u(0) = 0$, получим смещения балки покрытия в виде

$$(1/12)Eh^3 u = (a/c^3)[\ln(1 + cx)(2 + cx) - 2cx] \quad (2.33)$$

Полагая для коротких концевых областей cx малым, найдем из (2.33) размер концевой зоны при условии предельной вытяжки ($u(x^*) = \delta$):

$$x^* \approx ((1/12)Eh^3 c\delta/a)^{1/2} \quad (2.34)$$

При тех же условиях (2.31) принимает вид

$$G \approx \frac{24a^2 c}{Eh^3} \int_0^{x^*} \frac{x^2(cx - 2)}{(1 + cx)^5} dx \quad (2.35)$$

Отсюда при малых cx получим

$$G \sim \frac{2a^2}{Eh^3 c^2(1 + cx^*)} = \left(\frac{\delta}{cEh^3}\right)^{1/2} \frac{2a^2}{((12a)^{1/2} + c(Eh^3 c\delta)^{1/2})} \quad (2.36)$$

Предельная вытяжка влияет на сопротивляемость отслоению только при малых размерах концевой зоны и малых величинах вытяжки.

В заключение рассмотрим пример оценки вариаций формы профиля концевой зоны для обеспечения нужного распределения интенсивности адгезионных связей.

Допустим, что необходимо получить равномерное распределение сил сцепления $q = \text{const}$ максимальной интенсивности, если диаграмма растяжения адгезионного слоя задана соотношением вида

$$\sigma \approx a\varepsilon/(b + c\varepsilon^2) \quad (2.37)$$

где a, b, c – некоторые константы.

Эта функция имеет линейный характер при малых деформациях и падающую характеристику при больших. Максимальные напряжения достигаются при $\varepsilon = (b/c)^{1/2}$

$$\sigma_{\max} \approx (1/2)a/\sqrt{bc} \quad (2.38)$$

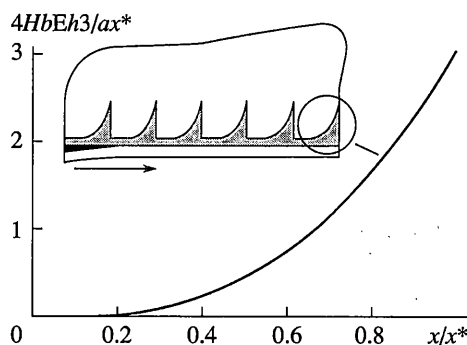
Если известен характер возможного отслоения и система вызывающих его нагрузок, можно задать условия нагружения эффективной балки в концевой области. Пусть внешняя нагрузка сводится к моменту M на свободном конце балки, нагруженной также, в соответствии с моделью силами сцепления $q = \text{const}$. Профиль смещений балки при компенсации внешних нагрузок силами сцепления запишется в виде

$$u(x) = 2qx^3(x^* - 1/4 x)/Eh^3 \quad (2.39)$$

Деформации по длине концевой зоны связаны с величиной смещения и толщиной адгезионного слоя H :

$$\varepsilon(x) \approx u(x)/H \quad (2.40)$$

Сопоставим эти деформации с деформациями при испытаниях адгезионного слоя на растяжение. Очевидно, что получить необходимый близкий к постоянному уровень деформаций по длине концевой области для обеспечения максимальных напряжений – сил сцепления по (2.38) можно, изменяя толщину адгезионного слоя по длине концевой зоны. Это можно сделать, нанося на поверхность подложки профилированные бороздки, расположенные по нормали к направлению возможного развития отслоения. Заметим, что аналогичный результат можно получить и варьируя локально толщину



Фиг. 3

покрытия. Для приведенного примера из (2.39), (2.40), (2.38) получим уравнение профиля бороздки

$$H(x) = \frac{a}{4b} \frac{x^3}{Eh^3 x^*} \left(4 - \frac{x}{x^*} \right) \quad (2.41)$$

Его вид показан на фиг. 3. Это несимметричное углубление, обращенное выемкой в направлении возможного движения отслоения. Система таких бороздок, на которых сопротивление отслоению повышается, может стать рядом барьеров, тормозящих развитие отслоения. Максимальное углубление бороздки при $(x/x^*) \rightarrow 1$ может быть определено технологическими ограничениями и его выбор не имеет принципиального значения, так как основная часть нагрузки в концевой области воспринимается профилем, при $(x/x^*) < 0.9$.

Для других вариантов схемы нагружения и диаграммы адгезионного слоя характер профилирования поверхности подложки может быть изменен.

Отметим, что балочное приближение оказывается эффективным и для описания адгезионной трещиностойкости при других моделях концевой области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00116).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слепня Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
2. Енгов В.М., Салганик Р.Л. О балочном приближении в теории трещин // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 5. С. 95–102.
3. Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates // Intern. J. Fracture. 1988. V. 36. № 2. P. 101–119.
4. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // Intern. J. Solids and Structures. 2000. V. 37. № 6. P. 857–886.
5. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
6. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.
8. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В. Равновесие полостей и трещин-разрезов с областями налегания и раскрытия в упругой среде // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 826–834.
9. Goldstein R.V., Kononov M.B. Asymptotic analysis of a delamination in a bi-layered plate // C.R. Acad. Sci. Paris. 1997. T. 324. Ser. II b. № 7. P. 419–426.
10. Гольдштейн Р.В., Коновалов М.Б. Асимптотический анализ пространственной задачи о трещине-расслоении в двухслойной пластине // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 3. С. 62–71.

Москва

Поступила в редакцию
6.03.2003