

УДК 624.07:534.1

© 2003 г. В.И. ЕРОФЕЕВ, Н.В. КЛЮЕВА

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРУТИЛЬНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЕ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Исследуется влияние разномодульности материала на распространение нелинейных крутильных волн в стержне с учетом деформации. В отличие от обычных упругих конструкционных материалов, проявляющих слабую нелинейность в рабочем диапазоне напряжений, разномодульные материалы демонстрируют сильную нелинейность уже при небольших деформациях. Они интересны в плане изучения нелинейных волн в упругих средах, в частности, таких интересных волновых объектов, как солитоны. Реально наблюдать солитоны, по-видимому, возможно лишь в сильно нелинейных средах.

Разномодульность приводит к появлению квадратичной нелинейности крутильной волны. Для нелинейных стационарных волн деформации (периодических и солитонов) получены зависимости между основными параметрами таких волн (амплитудой волны, длиной волны, скоростью ее распространения и коэффициентом нелинейных искажений формы волны). Показано, что наряду с классическим поведением солитонов, когда волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью, может наблюдаться и их аномальное поведение.

Разномодульность определяется рядом факторов и прежде всего наличием в материале микротрещин и локальных включений. Явление разномодульности [1], характерное для многих конструкционных материалов, заключается в том, что константы упругости зависят от вида напряженного состояния и резко изменяются при переходе от растяжения к сжатию. В экспериментах [2] было показано, что для стали модули упругости при растяжении меньше, чем модули при сжатии, на 5%, в бронзе – на 10%, в чугуна – на 20%, в зернистом графите – на 20%. Это явление особенно заметно проявляется у таких материалов, как бетон, различные виды грунтов. Так, модули Юнга для образцов мелкозернистого бетона на кварцевом песке при растяжении в два-три раза меньше, чем при сжатии [3].

Известны различные математические модели разномодульных сред [1–5]. В модели, предложенной в [4], модули упругости среды зависят от напряженного состояния следующим образом:

$$\lambda_* = \lambda - (\gamma/\xi), \quad \mu_* = \mu - (\gamma\xi/2)$$

$$\xi = I_1/\sqrt{I_2}, \quad I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}$$

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i \partial v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

где  $\lambda, \mu$  – константы Ламе;  $I_1, I_2$  – инварианты тензора деформаций;  $v_i$  – компоненты вектора перемещений;  $\gamma$  – параметр разномодульности материала и принято суммирование по повторяющимся индексам. Такое поведение констант упругости эквивалент-

но следующему разложению внутренней энергии элемента объема через инварианты тензора деформаций ([6], см. также [7]):

$$\rho U_0 = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1 \sqrt{I_2} \quad (1)$$

где  $\rho$  – объемная плотность среды. Заметим, что параметру разномодульности часто придается смысл параметра, характеризующего “поврежденность”, поскольку слагаемое  $\gamma I_1 \sqrt{I_2}$  в выражении (1) определенным образом связано с наличием в материале микротрещин и включений. Зависимость параметра разномодульности материала  $\gamma$  от длины микротрещин проанализирована в [7]. Модель (1) применялась для решения таких задач, как исследование напряженного состояния грунта вблизи горизонтальной скважины [8]. Отметим, что наиболее общая модель разномодульной изотропно-упругой среды, где модули упругости являются функциями трех инвариантов тензора деформаций, приведена в [9]. Потенциал этой среды описывается выражением:

$$\rho U_0 = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \gamma I_1 \sqrt{I_2} + \eta \frac{I_1^3}{\sqrt{I_2}} + \beta \frac{I_3}{\sqrt{I_2}}$$

$$I_1 = \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}, \quad I_3 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}$$

Здесь  $\gamma, \eta, \beta$  – параметры, учитывающие степень трещиноватости среды. В [10] эта модель применяется для анализа поведения горных пород под действием больших напряжений.

Объемная плотность кинетической энергии определяется выражением

$$T = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} \right)^2 \quad (2)$$

Рассмотрим особенности распространения крутильных волн в стержнях, материал которых подчиняется закону (1). При выводе уравнения, описывающего крутильные колебания стержня с учетом разномодульности материала и деформации, задается следующая система перемещений:

$$v_1 = \psi(y, z) \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, t), \quad v_2 = -z\theta(x, t), \quad v_3 = y\theta(x, t) \quad (3)$$

( $\theta(x, t)$  – угол поворота поперечного сечения в своей плоскости,  $\psi(y, z)$  – функция кручения) и используется вариационный принцип Гамильтона – Остроградского

$$\delta I = \delta \int \int \int \int_{0 x_1}^{t x_2} [T - \rho U] dF dx dt = 0$$

Здесь  $T, \rho U$  – объемные плотности кинетической и внутренней энергий,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня.

Заметим, что условия отсутствия нормальных напряжений на поверхности стержня при принятии системы перемещений (3) для разномодульного материала не могут быть выполнены строго. В [11, 12] была предложена другая система перемещений, удовлетворяющая условиям равновесия в статике. Поскольку сдвиговые и объемные деформации в разномодульном материале взаимосвязаны, то распространение крутильной волны неизбежно вызовет генерацию продольной, однако этот малый эффект в данной работе рассматриваться не будет.

Уравнение крутильных колебаний стержня с учетом деформации имеет вид [13]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \left( c_\tau^2 \frac{J_s}{J_0} - \frac{3 \gamma J^* \partial \theta}{\sqrt{2} \rho J_0 \partial x} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{J_\Psi}{J_p} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_l^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$J_p = \iint_F (y^2 + z^2) dF, \quad J^* = \iint_F (z^2 + y^2)^{3/2} dF$$
(4)

$$J_s = \iint_F \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dF, \quad J_\Psi = \iint_F \Psi^2 dF$$

$$c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$$

где  $J_p$  – полярный момент инерции;  $J_s$  – геометрический момент инерции при кручении (геометрическая жесткость на кручение);  $J_\Psi$  – момент деформации;  $c_\tau, c_l$  – скорость сдвиговых и продольных волн при отсутствии деформации. Заметим, что в [14] при изучении продольных и крутильных волн в стержне эффект деформации не учитывался.

В безразмерных переменных  $\Theta' = \theta/\theta_0, x' = x/\Lambda_0, t' = t/T_0$ , где  $\theta_0$  – максимальная амплитуда крутильной волны;  $\Lambda_0, T_0$  – характерная длина волны и ее период соответственно, уравнение (4) примет вид (штрихи опускаем):

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} \left( 1 + \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x'^2 \partial t'^2} + c^2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial x'^4} = 0$$

$$\alpha = -\frac{3J^* \sqrt{J_\Psi} \gamma \theta_0}{\sqrt{2} J_s \sqrt{J_p} \mu} < 0, \quad c^2 = \frac{c_l^2 J_p}{c_\tau^2 J_s}$$
(5)

Точные решения уравнения (5) будем искать в виде стационарных волн деформации  $U(\xi = x - Vt) = \Theta_\xi$ , т.е. волн, распространяющихся с постоянной скоростью без изменения своей формы. Тогда (5) сведется к уравнению ангармонического осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$d^2 U / d\xi^2 + aU + bU^2 = 0$$

$$a = \frac{V^2 - 1}{c^2 - V^2}, \quad b = \frac{\alpha}{2(V^2 - c^2)}$$
(6)

где  $V$  – скорость распространения стационарных волн.

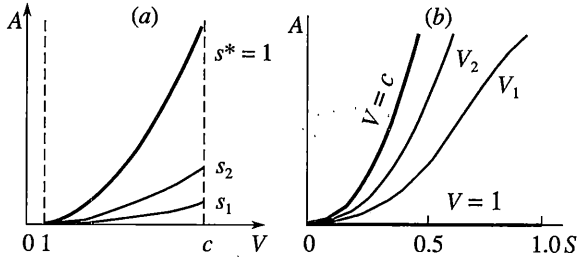
Ограниченные решения уравнения (6) были подробно исследованы в работе [15]. О возможности существования нелинейных стационарных волн уравнения (6) можно судить по знакам коэффициентов  $a$  и  $b$ . Ограничимся здесь рассмотрением двух случаев, иллюстрирующих классическое и неклассическое поведение солитонов. Отметим также, что физически реализуемыми являются лишь те случаи, когда в волне деформации отсутствует постоянная составляющая.

При  $a > 0, b > 0$  скорости распространения стационарных волн в стержне удовлетворяют условию  $1 < V < c$ .

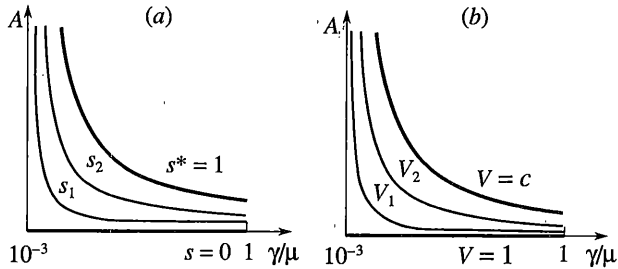
1) Периодические кноидальные волны описываются выражением

$$U(\xi) = U_1 - A \operatorname{sn}^2[\sqrt{\omega} \xi, s]$$

$$A = \frac{3a}{2b} \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}, \quad \omega^2 = \frac{a}{4\sqrt{1 - s^2 + s^4}}$$
(7)



Фиг. 1



Фиг. 2

где  $A$  – амплитуда колебаний,  $s$  – модуль эллиптической функции, определяющий степень искажения формы колебаний  $U(\xi)$  по сравнению с синусоидальной,  $\omega$  – аналог частоты.

На фиг. 1, *a* показаны качественные зависимости амплитуды периодической волны  $A$  от ее скорости при различных значениях коэффициента нелинейных искажений  $s(0 < s_1 < s_2 < s^*)$ . Кривая  $s^* = 1$  отвечает солитонному решению. Зависимости амплитуды периодической волны от коэффициента нелинейных искажений  $s$  при различных значениях скорости  $V(1 < V_1 < V_2 < c)$  приведены на фиг. 1, *b*.

На фиг. 2 представлены качественные зависимости амплитуды волны  $A$  от отношения коэффициента поврежденности материала к модулю сдвига при фиксированной скорости (фиг. 2, *a*) для различных значений коэффициента нелинейных искажений  $s(0 < s_1 < s_2 < s^*)$  и при фиксированном значении коэффициента нелинейных искажений (фиг. 2, *b*) при значениях скорости  $V(1 < V_1 < V_2 < c)$ . На фиг. 2, *a* кривая  $s^* = 1$  отвечает солитонному решению; на фиг. 2, *b* выделенные кривые отвечают скоростям  $V = c$  и  $V = 1$ .

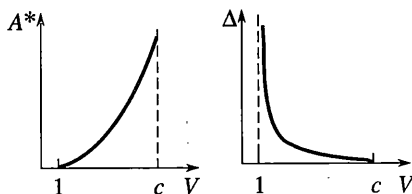
2) В интервале скоростей  $1 < V < c$  уединенные стационарные волны описываются выражением

$$U(\xi) = U_2 + \frac{A^*}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)} \tag{8}$$

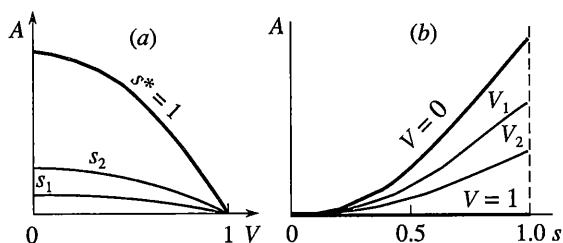
Параметры солитона связаны между собой следующими соотношениями:

$$A^* = \frac{3(1 - V^2)}{\alpha}, \quad \Delta = 2\sqrt{\frac{c^2 - V^2}{V^2 - 1}}, \quad U_2 = \frac{2(V^2 - 1)}{\alpha} \tag{9}$$

Здесь  $A^*$  – амплитуда,  $\Delta$  – ширина,  $U_2$  – постоянная составляющая солитона.



Фиг. 3



Фиг. 4

Зависимости между параметрами солитонного решения приведены на фиг. 3. При скоростях  $1 < V < c$  поведение уединенной волны является классическим для солитонов: волна большей амплитуды имеет меньшую ширину и распространяется с большей скоростью.

При  $a < 0, b > 0$  стационарные волны распространяются со скоростями  $0 < V < 1$ .

3) Нелинейные периодические волны описываются, как и в случае  $a > 0, b > 0$ , выражением (7). Параметры нелинейной периодической волны связаны соотношениями

$$A = -\frac{3a}{2b} \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2+s^4}}, \quad \omega^2 = \frac{-a}{4\sqrt{1-s^2+s^4}} \quad (10)$$

Зависимости амплитуды периодической волны от ее скорости при различных значениях коэффициента нелинейных искажений ( $0 < s_1 < s_2 < s^*$ ) (фиг. 4, a) и от коэффициента нелинейных искажений при различных значениях скорости  $V$  ( $0 < V_1 < V_2 < 1$ ) (фиг. 4, b) в этом случае имеют другой характер. Кривая  $s^* = 1$  отвечает солитонному решению.

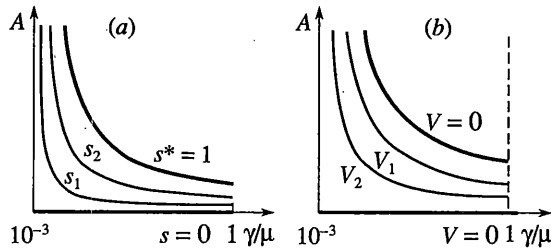
Как и при  $a > 0, b > 0$ , амплитуда периодической волны уменьшается с ростом коэффициента поврежденности материала (фиг. 5).

4) При скоростях  $0 < V < 1$  постоянная составляющая у солитона отсутствует:  $U_2 = 0$ . Солитонное решение имеет вид

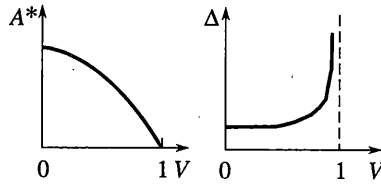
$$U(\xi) = \frac{A^*}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)} \quad (11)$$

$$A^* = \frac{3(V^2 - 1)}{\alpha}, \quad \Delta = 2 \sqrt{\frac{c^2 - V^2}{1 - V^2}} \quad (12)$$

Поведение солитонов при скоростях  $0 < V < 1$  является неклассическим: волна меньшей амплитуды имеет большую ширину и распространяется с большей скоростью (фиг. 6).



Фиг. 5



Фиг. 6

Фиг. 2 и фиг. 5 показывают, что чем больше коэффициент, характеризующий разномодульность материала (соответственно сильнее нелинейность), то тем меньшей амплитуды солитон может распространяться в стержне, а следовательно, легче сформировать уединенную волну.

Работа выполнялась при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-02-16924).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 317 с.
2. Джонс Р.М., Нельсон Д.А. Сопоставление теории с экспериментом для моделей материала при нелинейной деформации графита // Ракетн. техника и космонавтика. 1976. Т. 14. № 10. С. 101–113.
3. Ляховский В.А., Мясников В.П. Разномодульность, анизотропия и отражающие границы // Изв. АН СССР. Физика земли. 1986. № 11. С. 69–73.
4. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
5. Матченко Н.М., Толоконников Л.А., Трещев А.А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Квазилинейные соотношения // Изв. АН. МТТ. 1995. № 1. С. 73–78.
6. Ломакин Е.В. О единственности решения задач теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 42–45.
7. Ляховский В.А., Мясников В.П. О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика земли. 1984. № 10. С. 71–75.
8. Гасилов В.А., Головин М.В., Мясников В.П., Пергамент А.Х. Анализ напряженно-деформируемого состояния горных пород на основе разномодульной модели сплошной среды // Мат. моделирование. 1999. Т. 11. № 1. С. 39–44.
9. Мясников В.П., Олейников А.И. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 57–60.
10. Гасилов В.А., Головин М.В., Мясников В.П., Пергамент А.Х. Применение разномодульной модели сплошной среды к анализу поведения горных пород под действием больших напряжений // Изв. АН. МТТ. 2000. № 2. С. 86–92.

11. Ломакин Е.В., Казанцев М.П. Особенности кручения стержней из материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1995. № 2. С. 56–61.
12. Ломакин Е.В. Кручение стержней из материалов с зависящими от вида напряженного состояния упругими свойствами // Изв. АН. МТТ. 2002. № 4. С. 30–38.
13. Ерофеев В.И., Клюева Н.В., Моничев С.А., Семерикова Н.П. Влияние разномодульности материала и депланации на распространение нелинейных крутильных волн в стержне // Испытания материалов и конструкций / Сб. науч. трудов. Н. Новгород: Изд-во “Интелсервис” ИФ ИМАШ РАН. 2000. С. 117–136.
14. Ерофеев В.И., Моничев С.А. Продольные и крутильные колебания стержней из разномодульных материалов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1999. № 1. С. 3–7.
15. Ерофеев В.И., Кажеев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Наука. Физматлит, 2002. 208 с.

Н. Новгород

Поступила в редакцию  
24.04.2001.