

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБРАЩЕННОГО ДВУХЗВЕННОГО НЕОРТОГОНАЛЬНОГО МАЯТНИКА ПРИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Изучено поведение обращенного двухзвенного неортогонального маятника с двухстепенным (кардановым) вязкоупругим соединением звеньев при нагружении мертвой и следящей силами. Получены границы областей первичной устойчивости (устойчивости тривиальной формы равновесия). Найдены границы существования устойчивых положений равновесия в области дивергенции. Проведен анализ устойчивости равновесных состояний в зависимости от управляющих параметров (мертвая сила – следящая сила). Изучено послекритическое поведение маятника в ближних и дальних закритических областях.

Поведение упругих систем под действием непотенциальных (в частности, следящих) сил изучено уже достаточно подробно [1–6]. Однако здесь имеется еще много вопросов, представляющих интерес с точки зрения нелинейной динамики. В этом отношении весьма интересна и показательна задача о поведении обращенного пространственного двухзвенного маятника при нагружении мертвой и следящей силами. Представляет интерес исследование сочетания квазистатического (дивергенция) и динамического (флаттер) типов потери устойчивости. Здесь возможны явления вторичного флаттера и глобальной неустойчивости в области дивергенции, впервые обнаруженные для аэроупругих систем [7] и в дальнейшем подробно изученные в [8, 9].

В работе [5] исследовано поведение обращенного двухзвенного ортогонального маятника, т.е. маятника, у звеньев которого совпадают главные плоскости жесткости и инерции. В данной статье рассматривается неортогональный маятник, у которого главные плоскости верхнего звена повернуты относительно главных плоскостей нижнего на произвольный угол. Звенья соединены между собой и с основанием при помощи линейно вязкоупругих двухстепенных (кардановых) шарниров. Проводится полный систематический анализ как равновесных состояний типа дивергенции, так и движений в области флаттера. Основным методом исследования является вычислительный эксперимент, за исключением анализа первичной устойчивости.

1. Уравнения движения. Обращенный пространственный маятник, состоящий из двух прямолинейных стержневых звеньев, нагружен на верхнем конце мертвой вертикальной силой P и следящей силой Q , направленной вдоль оси верхнего звена. Звенья соединены между собой и с основанием при помощи линейно вязкоупругих двухстепенных (кардановых) шарниров. Оси шарниров ортогональны между собой, и в ненагруженном состоянии плоскости этих осей ортогональны осям звеньев маятника. Каждая ось жестко связана с одним из соединяемых звеньев. В ненагруженном состоянии оси верхнего шарнира повернуты в горизонтальной плоскости относительно осей нижнего на угол $\theta \neq 0$, измеряемый между однотипными осями. Такой маятник будем называть неортогональным. При $\theta = 0$ маятник становится ортогональным.

Введем неподвижные декартовы координаты $OX_1X_2X_3$ (X) с началом в узле, соединяющем нижнее звено с основанием, и вертикальной осью X_3 . Оси X_1 и X_2 совпадают с осями нижнего шарнира в ненагруженном состоянии. Наряду с неподвижной системой координат, для каждого звена введем жестко связанную с ним систему $OY_1Y_2Y_3$ (Y). В ненагруженном состоянии подвижные оси нижнего звена совпадают с неподвижными, оси Y_1, Y_2 верхнего повернуты относительно осей X_1, X_2 в горизонтальной плоскости на угол θ . Ось Y_2 в каждом звене направлена по неподвижной относительно него оси шарнира. При движении она остается ортогональной другой оси шарнира, жестко связанной с соседним нижним звеном (основанием), и вращается вокруг нее. Относительное движение звена есть сумма вращений вокруг ортогональных осей шарнира. Векторы задаем компонентами либо в системе X , либо в системе Y .

Выберем в качестве обобщенных координат углы поворота звеньев относительно осей соединительных шарниров φ_k, ψ_k ($k = 1, 2$): φ_k угол поворота вокруг оси, жестко связанной с соседним нижним звеном (основанием), ψ_k угол поворота вокруг оси, жестко связанной с рассматриваемым звеном. Поворот рассматриваемого звена относительно соседнего нижнего звена (основания) задается матрицей ортогонального преобразования ($k = 1, 2; \theta_1 = 0; \theta_2 = \theta$):

$$H(\varphi_k, \psi_k, \theta_k) = \begin{vmatrix} \cos \psi_k & \sin \varphi_k \sin \psi_k & -\cos \varphi_k \sin \psi_k \\ 0 & \cos \varphi_k & \sin \varphi_k \\ \sin \psi_k & -\sin \varphi_k \cos \psi_k & \cos \varphi_k \cos \psi_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k & 0 \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Для ортогонального маятника уравнения движения были получены в статье [5]. В случае неортогонального маятника эти уравнения сохраняют свой вид

$$a_{jk}(\mathbf{q}, \theta) q_k'' + \varepsilon_j q_j' + \sigma_j q_j + \left[\frac{\partial a_{jl}(\mathbf{q}, \theta)}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}(\mathbf{q}, \theta)}{\partial q_j} \right] q_k' q_l' - (\alpha + \gamma) f_j(\mathbf{q}, \theta) - \gamma g_j(\mathbf{q}, \theta) + \beta h_j(\mathbf{q}, \theta) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.2)$$

$$[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \psi_1 \ \psi_2]^T$$

где по дважды повторяющимся индексам k и l подразумевается суммирование от 1 до 4. По индексу j нет суммирования и введены безразмерные параметры

$$c_j = \sigma_j c, \quad \omega_0^2 = \frac{12c}{ml^2}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \varepsilon_j = \frac{12b_j}{ml^2 \omega_0}$$

$$\alpha = \frac{Pl}{c}, \quad \beta = \frac{Ql}{c}, \quad \gamma = \frac{mgl}{2c}$$

В последних формулах m и l – масса и длина звена (одинаковые для обоих звеньев) c_j, b_j параметры жесткости и демпфирования шарниров, c – характерная жесткость (например, минимальная из c_j). В уравнениях (1.2) штрихами обозначены производные по безразмерному времени τ .

Компоненты матрицы инерции в уравнениях (1.2) определяются выражениями

$$a_{11}(\mathbf{q}, \theta) = 5 + \cos^2 \theta \cos^2 q_3 [12 \cos q_2 \cos q_4 - (a - 4) \cos^2 q_4 + a + 11] + 2 \cos \theta \cos q_3 \sin q_4 [(a - 4) \sin \theta \sin q_2 \cos q_3 \cos q_4 + \sin q_3 ((a - 4) \cos q_2 \cos q_4 - 6)] + \sin^2 \theta \cos^2 q_3 \{ 3 \cos^2 q_2 + 12 \cos q_2 \cos q_4 + \sin^2 q_2 [(a - 4) \cos^2 q_4 + 3] + 12 \} + 2 \sin \theta \sin q_2 \sin q_3 \cos q_3 \cos q_4 [(a - 4) \cos q_2 \cos q_4 - 6] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos^2 q_2 \sin^2 q_3 [(a-4) \cos^2 q_4 + 3] + 3 \sin^2 q_2 \sin^2 q_3 + (a-4) \sin^2 q_3 \\
 a_{12}(\mathbf{q}, \theta) = & \cos \theta \cos q_3 [6 \cos q_2 \cos q_4 - (a-4) \cos^2 q_4 + a] + \\
 & + (a-4) \sin q_4 \cos q_4 [\sin \theta \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3] + \\
 & + (a-4) \sin q_4 \cos q_4 [\sin \theta \sin q_2 \cos q_3 + \cos q_2 \sin q_3] \\
 a_{13}(\mathbf{q}, \theta) = & -(a-4) \cos^2 \theta \sin q_2 \cos q_3 \sin q_4 \cos q_4 - \\
 & - \cos \theta [(a-4) \sin \theta \cos q_3 (\sin^2 q_2 \cos^2 q_4 - \sin^2 q_4) + (a-4) \sin q_2 \cos q_2 \sin q_3 \cos^2 q_4 - \\
 & - 6 \sin q_2 \sin q_3 \cos q_4] + (a-4) \sin^2 \theta \sin q_2 \cos q_3 \sin q_4 \cos q_4 + \\
 & + \sin \theta \sin q_3 \sin q_4 [(a-4) \cos q_2 \cos q_4 - 6] \\
 a_{14}(\mathbf{q}, \theta) = & - \cos q_3 [6 \cos \theta \sin q_2 \sin q_4 + \sin \theta (4 \cos q_2 + 6 \cos q_4)] + 4 \sin q_2 \sin q_3 \\
 a_{23}(\mathbf{q}, \theta) = & -(a-4) \cos \theta \sin q_2 \sin q_4 \cos q_4 + \sin \theta (6 \cos q_2 \cos q_4 - (a-4) \cos^2 q_4 + a) \\
 a_{33}(\mathbf{q}, \theta) = & 5 + \cos^2 \theta [3 \cos^2 q_2 + 12 \cos q_2 \cos q_4 + \sin^2 q_2 [(a-4) \cos^2 q_4 + 3] + 12] - \\
 & - 2(a-4) \sin \theta \cos \theta \sin q_2 \sin q_4 \cos q_4 + \sin^2 \theta [12 \cos q_2 \cos q_4 - (a-4) \cos^2 q_4 + a + 11] \\
 a_{34}(\mathbf{q}, \theta) = & \cos \theta (4 \cos q_2 + 6 \cos q_4) - 6 \sin \theta \sin q_2 \sin q_4 \\
 a_{22}(\mathbf{q}, \theta) = & -(a-4) \cos^2 q_4 + a, \quad a_{24}(\mathbf{q}, \theta) = 0, \quad a_{44}(\mathbf{q}, \theta) = 4, \quad a_{jk} = a_{kj}
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

где $a = I_3/I$, $I_1 = I_2 = I = ml^2/12$, I_3 – главные моменты инерции звеньев. Кроме того, в уравнениях (1.2) использованы следующие обозначения для обобщенных сил:

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{q}, \theta) = & \cos \theta (\cos q_1 \sin q_2 \cos q_4 - \sin q_1 \sin q_3 \sin q_4) - \\
 & - \sin \theta (\cos q_1 \sin q_4 + \sin q_1 \sin q_2 \sin q_3 \cos q_4) + \sin q_1 \cos q_3 (\cos q_2 \cos q_4 + 1) \\
 f_2(\mathbf{q}, \theta) = & \cos q_4 [\cos \theta \sin q_1 \cos q_2 + \\
 & + \cos q_1 \cos q_4 (\sin \theta \cos q_2 \sin q_3 + \sin q_2 \cos q_3)] \\
 f_3(\mathbf{q}, \theta) = & \cos q_1 [\cos q_3 (\cos \theta \sin q_4 + \sin \theta \sin q_2 \cos q_4) + \\
 & + \sin q_3 (\cos q_2 \cos q_4 + 1)] \\
 f_4(\mathbf{q}, \theta) = & \cos \theta (\cos q_1 \sin q_3 \cos q_4 - \sin q_1 \sin q_2 \sin q_4) - \\
 & - \sin \theta (\cos q_1 \sin q_2 \sin q_3 \sin q_4 + \sin q_1 \cos q_4) + \cos q_1 \cos q_2 \cos q_3 \sin q_4 \\
 g_1(\mathbf{q}, \theta) = & 2 \sin q_1 \cos q_3, \quad g_2(\mathbf{q}, \theta) = g_4(\mathbf{q}, \theta) = 0, \quad g_3(\mathbf{q}, \theta) = 2 \cos q_1 \sin q_3 \\
 h_1(\mathbf{q}, \theta) = & \cos q_3 (\cos \theta \sin q_2 \cos q_4 - \sin \theta \sin q_4), \quad h_2(\mathbf{q}, \theta) = h_4(\mathbf{q}, \theta) = 0 \\
 h_3(\mathbf{q}, \theta) = & \cos \theta \sin q_4 + \sin \theta \sin q_2 \cos q_4
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

2. Дивергенция и флаттер. Исследуем устойчивость тривиального решения уравнений (1.2) $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$. Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\mathbf{Aq}'' + \mathbf{Bq}' + [\mathbf{C} - (\alpha + \gamma)\mathbf{F} - \gamma\mathbf{G} + \beta\mathbf{H}]\mathbf{q} = 0
 \tag{2.1}$$

где матрицы определяются выражениями

$$A = \begin{vmatrix} 32 & 10\cos\theta & 0 & -10\sin\theta \\ 10\cos\theta & 4 & 10\sin\theta & 0 \\ 0 & 10\sin\theta & 32 & 10\cos\theta \\ -10\sin\theta & 0 & 10\cos\theta & 4 \end{vmatrix}$$

$$B = \text{diag}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_4), \quad C = \text{diag}(\sigma_1 \dots \sigma_4)$$

$$F = \begin{vmatrix} 2 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \cos\theta & 1 & \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 2 & \cos\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}, \quad G = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Потеря устойчивости может быть либо квазистатической (дивергенция), либо динамической (флаттер). Характеристическое уравнение для системы (2.1) имеет вид

$$\lambda^8 + p_1\lambda^7 + \dots + p_8 = 0 \quad (2.2)$$

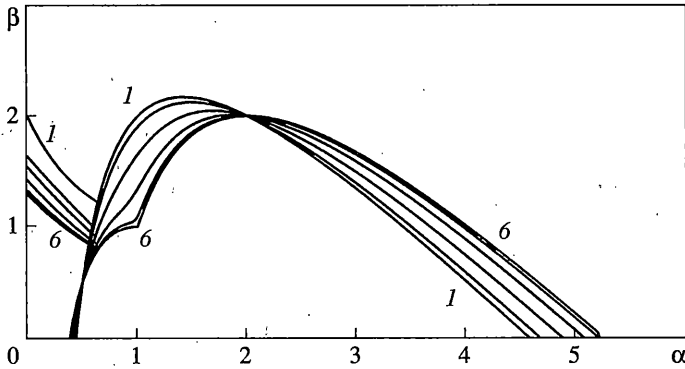
Выражений для коэффициентов p_1, \dots, p_8 не приводим, так как они слишком громоздки. Они были получены средствами компьютерной алгебры, а затем скопированы в вычислительную программу.

Изучим устойчивость маятника в зависимости от изменения двух управляющих параметров: α (мертвая сила) и β (следящая сила). Уравнение (2.2) почти всегда имеет простые корни. Кратные корни появляются лишь в особых точках коразмерности 2 (изолированные особые точки на плоскости α, β). В области устойчивости все корни имеют отрицательные действительные части. Потеря устойчивости в случае общего положения (т.е. когда все корни простые) происходит тогда, когда один действительный корень (дивергенция) или одна комплексная пара корней (флаттер) пересекает мнимую ось. Отображение множества точек пересечения корнями мнимой оси при различных значениях α и β на плоскость α, β образует линии – границы областей дивергенции и флаттера. На фиг. 1 они представлены для маятника с параметрами $(\sigma_1, \dots, \sigma_4) = (1, 2, 2, 1)$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4) = (0.05, 0.25, 0.25, 0.05)$, $a = 0.05$, $\gamma = 0$. Границы были построены для значений угла $\theta = (0, 0.1, \dots, 0.5)\pi$. Крайние кривые отмечены цифрами 1 и 6.

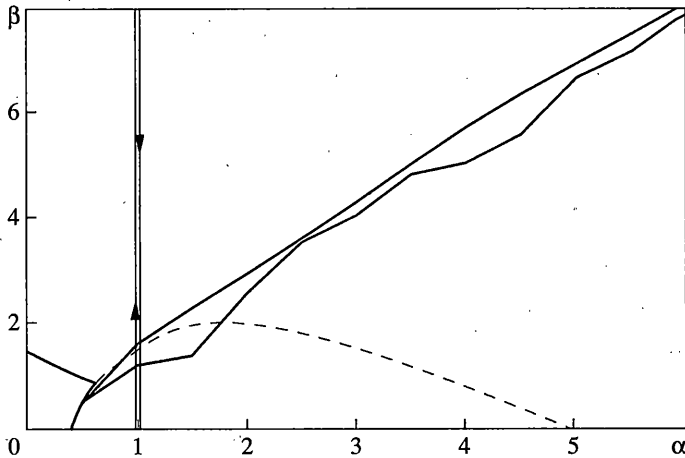
Нетривиальные состояния равновесия в области дивергенции описываются статическими решениями системы (1.2). Они удовлетворяют уравнениям

$$F_j(\mathbf{q}) = (\alpha + \gamma)f_j(\mathbf{q}) + \gamma g_j(\mathbf{q}) - \beta h_j(\mathbf{q}) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (2.3)$$

Верхняя граница множества состояний равновесия в области дивергенции является складкой. Определитель, составленный из производных $\partial F_j / \partial q_k$, на складке обращается в нуль. При заданном α это условие плюс уравнения (2.3) позволяют определить



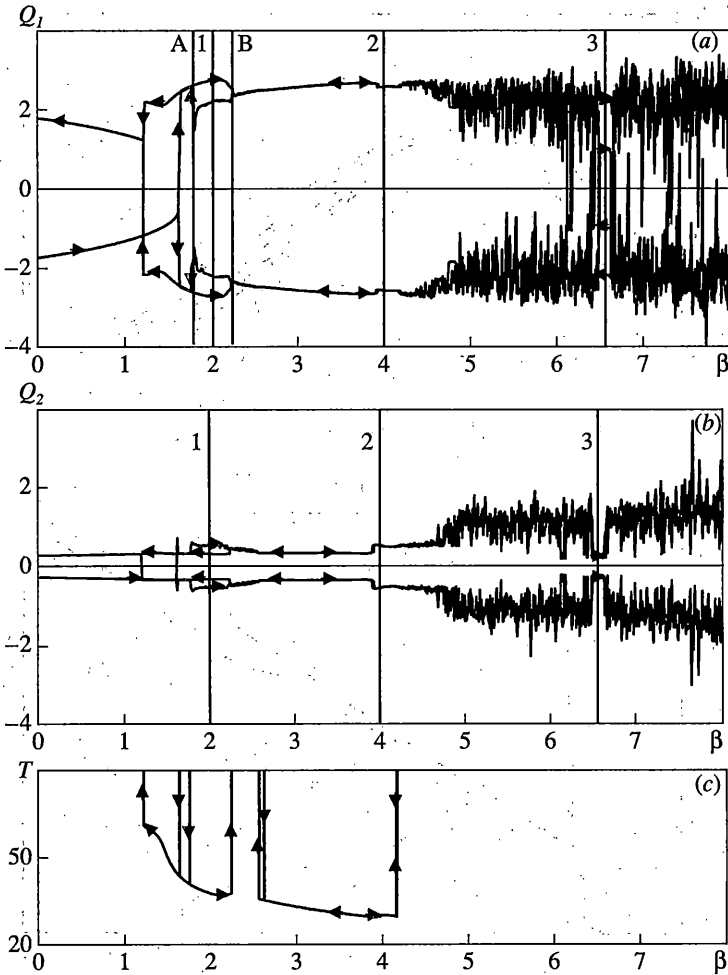
Фиг. 1



Фиг. 2

верхнюю границу по β (кривая D на фиг. 2) и значения обобщенных координат q_j . Для решения этой задачи был применен метод деформируемого многогранника (модифицированный метод Нелдера-Мида). Искался нулевой абсолютный минимум целевой функции, равной сумме квадратов определителя $|\partial F_j / \partial q_k|$ и левых частей уравнений (2.3). Фиг. 2 соответствует тем же значениям параметров, что и фиг. 1, значение угла между осями шарниров в ненагруженном состоянии θ принято равным $\pi/4$.

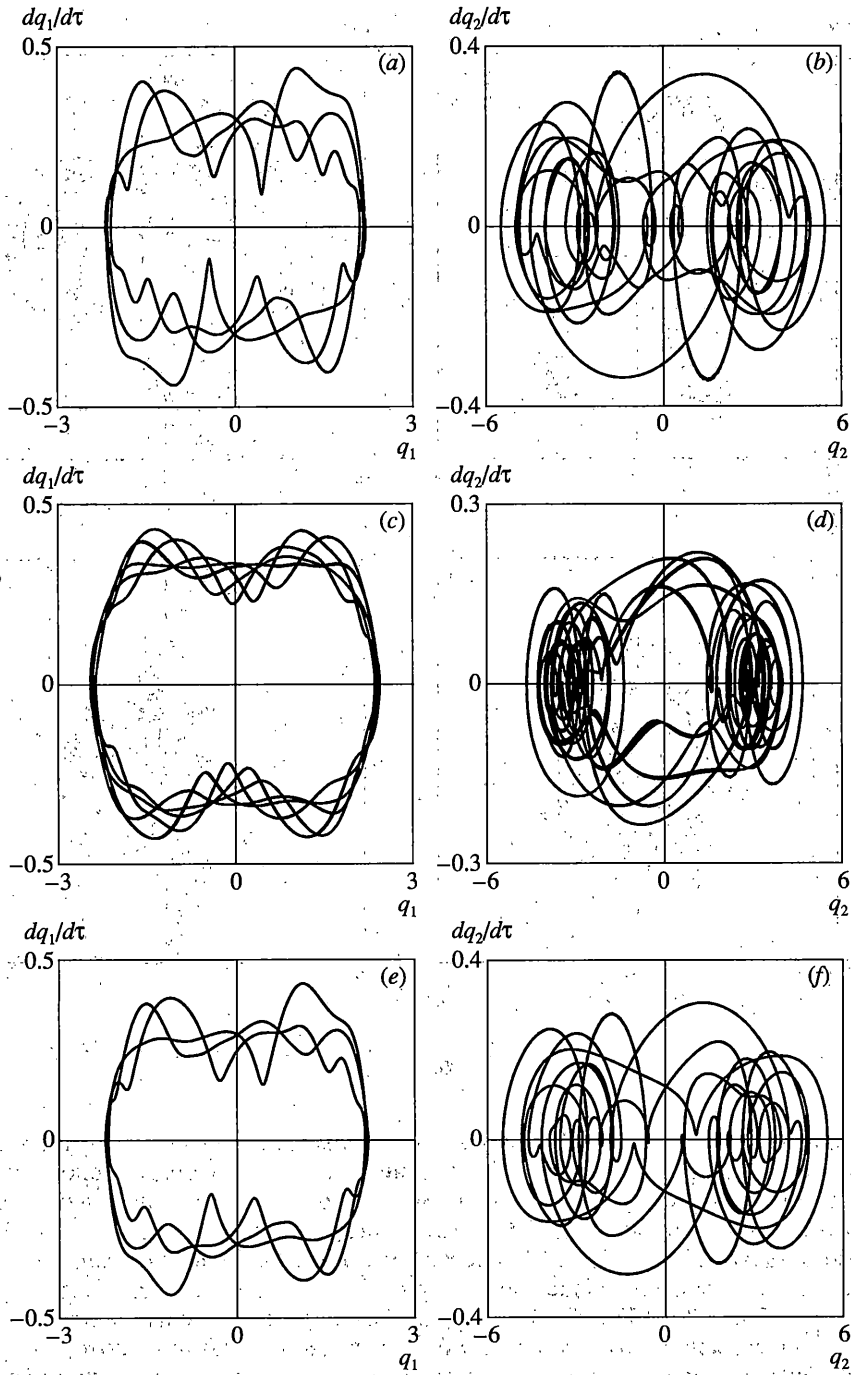
3. Динамическое послекритическое поведение. Для исследования характера поведения системы в дальних закритических областях был проведен вычислительный эксперимент с медленным изменением управляющих параметров [7–9]. Приняты те же значения параметров маятника, что и для фиг. 2. При фиксированном α менялся параметр β на величину 10^{-6} за один шаг интегрирования уравнений (1.2). Изменение β останавливалось при определенных значениях с шагом 10^{-2} . При каждой такой остановке проводилось интегрирование уравнений в течение 10^5 шагов по времени для того, чтобы колебательный режим установился. Затем на реализации длиной в 10^5 шагов определялись максимальные и минимальные значения Q_j координат q_j (огibaю-



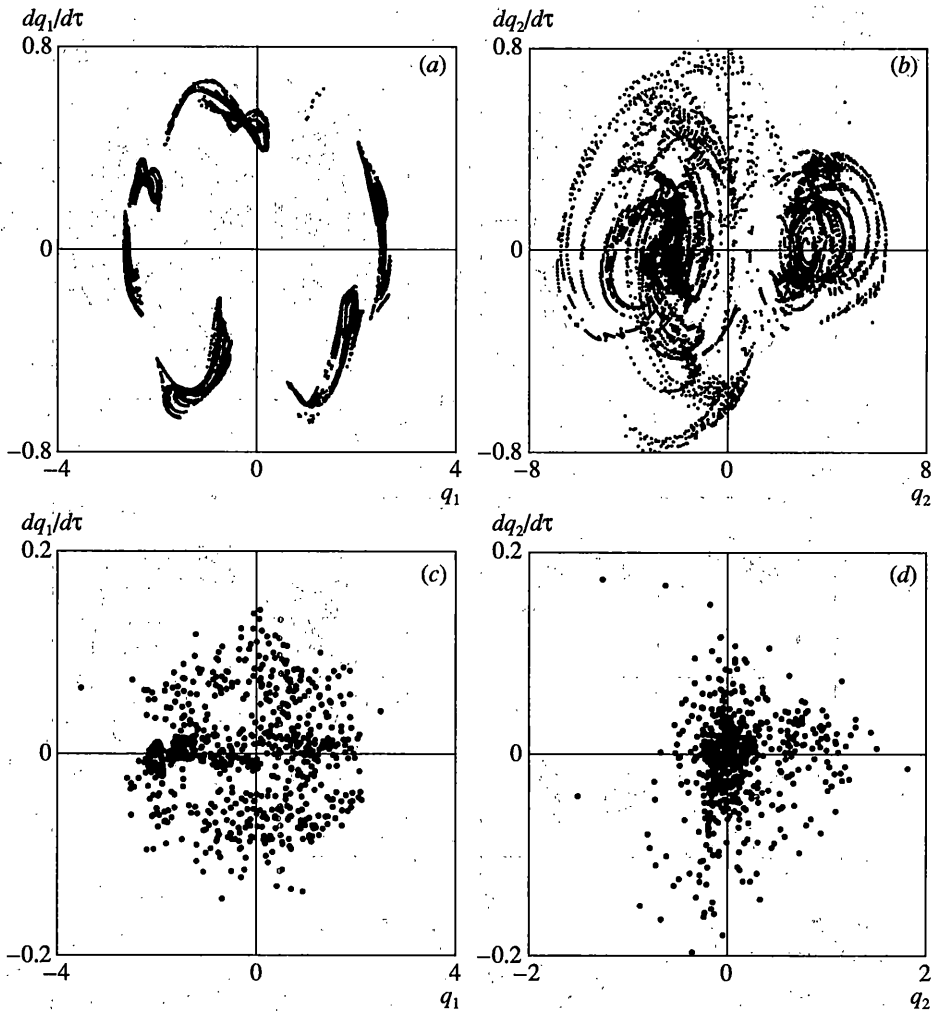
Фиг. 3

щие колебаний), а также период колебаний, если движение периодическое (для идентификации непериодического движения в алгоритме были предусмотрены специальные меры). Такой метод обеспечил практически абсолютную достоверность результатов, что показали контрольные вычислительные проверки.

Поведение размаха и периода колебаний при $\alpha = 1$ и изменяющемся β показано на фиг. 3. Параметр β менялся от 0 до 8 и обратно. Этот процесс показан на фиг. 2 вертикальными линиями со стрелками. Характерно, что колебания начинаются не по типу “вилки”, а сразу с конечной амплитудой и последующим установлением периодического движения (фиг. 3, c). Прямой и обратный ход (увеличение и уменьшение β) указаны на фиг. 3 стрелками. Как видно из графиков, имеет место затягивание периодических колебаний при обратном ходе, т.е. имеет место гистерезис. На фиг. 2 линия E является границей между режимами колебаний и равновесия при обратном ходе. Она была построена в результате серии описанных выше вычислительных экспериментов при различных значениях α . Возбуждение колебаний при увеличении β происходило точно на складке (линия D на фиг. 2).



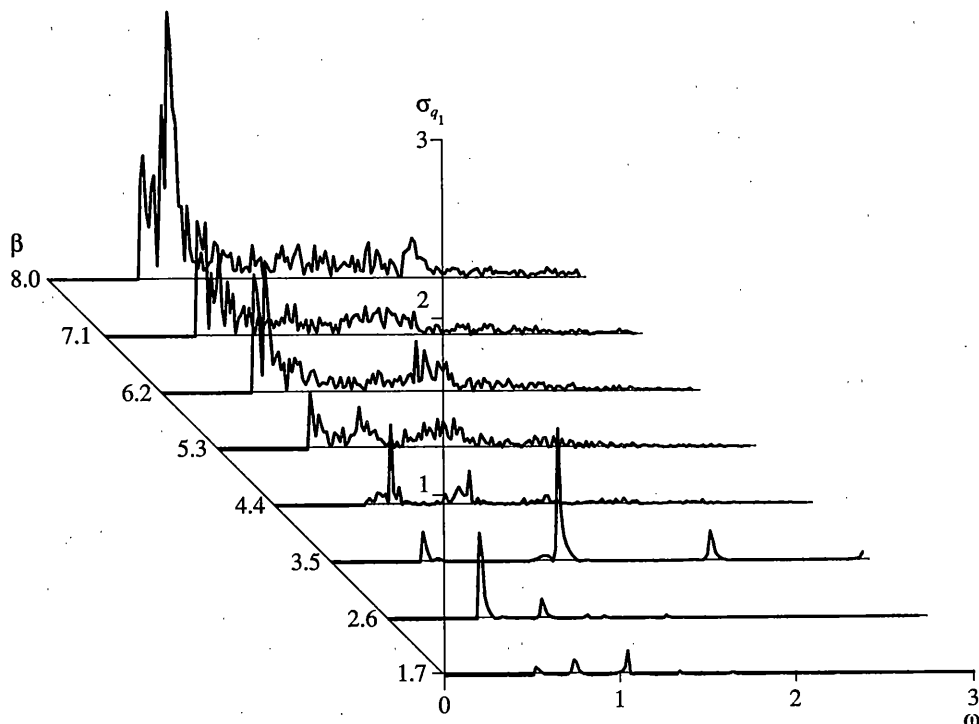
Фиг. 4



Фиг. 5

Периодические движения при прямом и обратном ходе в большей части области изменения параметра β идентичны за исключением полос, в которых период колебаний существенно выше. Всюду, за исключением этих полос, период колебаний составляет величину порядка 35 (фиг. 3, c). Наблюдались полосы с большим периодом. При прямом ходе в области $\beta \in (2.25, 2.63)$ имеется два интервала с периодами $T \approx 183$ и $T \approx 251$, при обратном наблюдалась область $\beta \in (2.56, 1.76)$, состоящая из трех интервалов с $T \approx 251$, $T \approx 183$ и $152 > T > 116$. При любом переходе от одного периодического режима к существенно другому в системе происходит бифуркация, которая приводит к скачкообразному изменению периода колебаний. Амплитуда колебаний при бифуркации на прямом ходе (вертикальная прямая B на фиг. 3, a) сохраняется, на обратном ходе (вертикальная прямая A на фиг. 3, a) происходит скачок амплитуды.

Фазовые портреты периодических движений для обобщенных координат q_1 и q_2 при $\alpha = 1$ приведены на фиг. 4. Движение, представленное на фиг. 4, a, b, получено при $\beta = 2$ (линия 1 на фиг. 3, a, b) на прямом ходе. Оно периодическое с периодом $T = 37.7$.



Фиг. 6

На фиг. 4, *c, d*, представлены фазовые портреты периодического движения, которое устанавливается после первой бифуркации на прямом ходе изменения β (при $\beta = 2.4$). Период колебаний здесь существенно выше (183.6). Фазовые портреты периодического движения из аналогичной полосы при уменьшающемся β ($\beta = 2.15$) приведены на фиг. 4, *e, f*. Период колебаний здесь составляет величину 116.5. Ход изменения периода колебаний при увеличении и уменьшении β отмечен стрелками на фиг. 3, *c*. С уменьшением β маятник приходит в первоначальное положение равновесия или симметричное ему (с противоположными знаками обобщенных координат). Это видно на фиг. 3, *a*.

При увеличении и уменьшении β приблизительно в полосе $\beta \in (3.8, 4.3)$ область периодического движения сменяется областью хаоса и наоборот. Фазовые портреты в этой полосе мало информативны. В этом случае полезную информацию могут дать сечения Пуанкаре. На фиг. 5, *a, b* показаны сечения Пуанкаре для $\alpha = 1, \beta = 4$ (линия 2 на фиг. 3, *a, b*), прямой ход. Представлена выборка реализации движения объемом в 10^5 точек, принадлежащая семимерному подпространству $q_3' = 0$ фазового пространства. Фиксировались лишь те точки, в которых q_3' меняет значения от отрицательного к положительному. Видно, что зарождение хаоса из периодического режима проходит через квазипериодический режим. Фиг. 5, *a* и *b* дают иллюстрацию начальной стадии хаоса.

Переход от периодического режима к хаотическому содержит стадию квазипериодического движения. Это подтверждают графики спектров среднеквадратических отклонений координаты q_1 , определяемых как $\sigma_{q_1}(\omega) = S_{q_1}^{1/2}(\omega)\Delta\omega$ при $\Delta\omega = 1$ (фиг. 6).

Видна зарождающаяся широкополосность процесса при доминировании пиков на отдельных несоизмеримых частотах. Можно заметить, что расстояния между доминирующими пиками на графиках $\sigma_{q_1}(\omega)$ при $\beta = 4.4$ (хаотический режим) и $\beta = 3.5$ (периодический режим) явно различаются, причем во втором случае пики расположены на кратных частотах, в первом – на несоизмеримых. В области хаоса имеется полоса, где график размаха колебаний выглядит так же, как при периодическом движении. Внутри этой полосы на фиг. 3, *a* и *b* проведена вертикальная прямая z ($\beta = 6.55$). Но движение в ней не является периодическим. Сечение Пуанкаре $q_3' = 0$ (фиг. 5, *c* и *d*) соответствует стохастическому движению. Как видно из сравнения с другими фазовыми портретами, это движение происходит с существенно большими скоростями. Тот же результат получается при другом выборе сечений Пуанкаре.

Стохастичность движения при значениях $\beta > 3.8$ подтверждают графики спектров среднеквадратических отклонений на фиг. 6. Все спектры из области $\beta > 3.8$ – широкополосные.

Сложный, перемежающийся характер движения с чередованием периодических, квазипериодических и хаотических движений обнаруживали в более простых системах, например, в системе из связанных обращенных пространственных однозвенных маятников [10] при изменяющихся амплитуде возбуждения и характеристике связи, где эти процессы проходят через удвоения периода. Хаотическое движение обращенного маятника может быть подавлено при помощи ограниченного возбуждения [11]. В сложной системе роль такого возбуждения для отдельных степеней свободы может играть взаимодействие с другими степенями свободы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 00–01–00102 и 00–15–96138).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. О колебаниях и устойчивости стержней, находящихся под действием неконсервативных сил // Колебания в турбомашинах. М.: Изд. АН СССР, 1959. С. 23–42.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Bolotin V.V., Zhinzher N.I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces // Intern. J. Solid and Structures. 1969. V. 5. № 9. P. 965–989.
4. Жинжер Н.И. Влияние диссипативных сил с неполной диссипацией на устойчивость упругих систем // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 149–155.
5. Петровский А.В. Устойчивость и послекритическое поведение обращенного пространственного маятника при непотенциальном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 165–176.
6. Jin J.-D., Matsuzaki Y. Bifurcation analysis of double pendulum with a follower force // J. Sound and Vibrat. 1992. V. 154. № 2. P. 191–204.
7. Bolotin V.V., Petrovsky A.V., Grishko A.A. Secondary bifurcations and global instability of an aeroelastic nonlinear system in the divergence domain // J. Sound and Vibrat. 1996. V. 191. № 3. P. 431–451.
8. Bolotin V.V., Grishko A.A., Kounadis A.N., Gantes Ch. Non-linear panel flutter in remote post-critical domain // Intern. J. Non-Linear Mechanics. 1998. V. 33. № 5. P. 753–764.
9. Гришко А.А., Дубовских Ю.А., Петровский А.В. О послекритическом поведении диссипативных нелинейных систем // Прикл. механика. 1998. Т. 34. № 6. С. 92–98.
10. Kim Sang-Yoon, Bambi Hu. Critical behavior of period doublings in coupled inverted pendulums // Phys. Rev. E. 1998. 58. № 6a. P. 7231–7242.
11. Kim Sang-Yoon, Bambi Hu. Bifurcations and transitions to chaos in an inverted pendulum // Phys. Rev. E. 1998. 58. № 3a. P. 3028–3035.