МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2003

УДК 539.3:534.1

 Д.В. БАБИЧ

О ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ МИКРОРАЗРУШЕНИЯХ В МАТЕРИАЛЕ

В силу неоднородности прочностных свойств структурных элементов во многих материалах с ростом уровня нагружения происходит накопление микродефектов типа плоских трещин либо пор [1–3]. Следствием таких структурных изменений в материале является нелинейность диаграммы деформирования.

Один из способов описания совместного деформирования и повреждаемости материала предложен в [4], где разрушенные микрообъемы моделируются структурными микроэлементами в виде микропор.

Ниже предлагается континуальная модель деформирования упруго-хрупких материалов, сопровождающегося накоплением повреждений в виде плоских микротрещин, случайным образом расположенных по объему деформируемого тела. При построении модели считалось, что в процессе деформирования микротрещины не растут и не взаимодействуют между собой. Предложенная модель используется для исследования местной потери устойчивости выпуклых оболочек вращения. С нелинейностью уравнений состояния за счет накопления плоских микротрещин в материале подобно ситуации, имеющей место при исследовании устойчивости за пределом упругости [5], связаны два варианта потери устойчивости, а именно: потеря устойчивости при продолжающемся нагружении (отсутствие областей разгрузки) и потеря устойчивости при постоянной нагрузке (наличие областей разгрузки и догрузки). На участках разгрузки концентрация трещин не меняется, поэтому деформирование происходит по линейному закону. При догрузке материал деформируется нелинейно вследствие увеличения концентрации трещин. Следствием такой особенности деформирования оболочки при постоянном нагружении является то, что приведенно-модульная нагрузка получается выше касательно-модульной. Из соображений простоты постановки и точности результатов решения задачи устойчивости в работе используется концепция продолжающегося нагружения.

1. Связанное деформирование и трещинообразование материала. В работах [6, 7] с использованием энергетического метода [8] получены уравнения состояния для поврежденного материала с постоянной концентрацией плоских микродефектов. Связь между макронапряжениями и макродеформациями для изотропного трещиноватого материала имеет обычный вид

$$\sigma_{11} = \frac{E_c\nu_c}{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)}\Theta + \frac{E_c}{(1+\nu_c)}e_{11}, \quad \sigma_{12} = G_c e_{12} \tag{1.1}$$

$$\Theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

Остальные соотношения получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3. В отличие от сплошного материала выражения для технических постоянных в (1.1) при сжатии ($\sigma_{ii} < 0$) с учетом трения скольжения поверхностей микротрещин определяются через постоянные упругости сплошной среды E_0, G_0, ν_0 и параметры микротрещин [7]

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_0} + a_{11}, \quad -\frac{\nu_c}{E_c} = -\frac{\nu_0}{E_0} + a_{12}, \quad \frac{1}{G_c} = \frac{1}{G_0} + a_{66} \tag{1.2}$$

где в случае изотропного материала, поврежденного дефектами в виде эллиптических трещин с полуосями a, b, статистически однородно изотропно распределенными по объему, слагаемые a_{ij} в (1.2) будут определяться соотношениями [7]:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2/15(1-3f^2)(A_1+A_2), \quad a_{12} = (-1/15)(1+2f^2)(A_1+A_2)\\
a_{66} &= 2/15(3-4f^2)(A_1+A_2)\\
A_1 &= \frac{(1-\nu_0)}{E_0}R(k,\nu_0)\varepsilon, \quad A_2 = \frac{(1-\nu_0)}{E_0}Q(k,\nu_0)\varepsilon\\
R(k,\nu_0) &= k^2[(k^2-\nu_0)E(k)+\nu_0k_1^2K(k)]^{-1}\\
Q(k,\nu_0) &= k^2[(k^2+\nu_0k_1^2)E(k)-\nu_0k_1^2K(k)]^{-1}\\
k^2 &= 1-b^2/a^2, \quad k_1^2 = 1-k^2\\
\varepsilon &= \frac{4\pi}{3}\iint\limits_{a\,b} ab^2F(a,b)da\,db = \frac{4\pi}{3}N_0\langle ab^2\rangle
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где ε – малый параметр, определяющий концентрацию трещин, $F(a, b)$ – плотность распределения микротрещин по размерам, f – коэффициент трения скольжения, N_0 – количество трещин в единице объема, $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

В случае круговых трещин радиуса a указанные постоянные имеют вид:

$$A_1 = A_2 = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi(2-\nu_0)E_0}\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{4\pi}{3}N_0\langle a^3\rangle \tag{1.4}$$

а технические постоянные упругости будут определяться формулами

$$\begin{aligned}
E_c &= E_0\left[1-\frac{16}{5\pi}(1-3f^2)\frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)}\varepsilon\right]\\
\nu_c &= \nu_0+\frac{8}{5\pi}\left[1-2\nu_0+2f^2(1+3\nu_0)\frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)}\right]\varepsilon\\
G_c &= G_0\left[1-\frac{8}{15\pi}(3-2f^2)\frac{(1-\nu_0^2)}{(2-\nu_0)}\varepsilon\right]
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Приведенные выше соотношения позволяют описать процесс совместного деформирования и трещинообразования упруго-хрупких материалов, обусловленный неоднородностью прочностных свойств структурных микроэлементов. В этом случае объемная концентрация микротрещин ε является переменной величиной, зависящей от подходящих для конкретного материала критерия разрушения и функции распределения микропрочности, а также истории нагружения.

В качестве примера за критерий разрушения микроэлементов материала принимается соотношение 1-ой теории прочности [1–3]

$$\sigma_n \geq \sigma \tag{1.6}$$

где σ – случайная величина, которая может обозначать предельные значения растягивающего либо сжимающего напряжений, вызывающих разрушение структурных элементов материала. Предполагается, что при достижении растягивающим напряжением σ_n значения σ на соответствующей площадке образуется микротрещина, плоскость которой нормальна к направлению действия напряжения σ_n. В случае сжимающего напряжения σ_n микротрещины ориентируются преимущественно параллельно направлению σ_n [1, 2]. В дальнейшем рассматривается именно этот случай.

Если в качестве представительного объема выбрать шар некоторого радиуса, в котором известны средние напряжения σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, то нормальное напряжение σ_n на площадке, ориентация нормали к которой задана сферическими координатами θ (широта) и φ (долгота), будет определяться выражением [3]:

$$\begin{aligned}\sigma_n = {} & \sigma_{11}\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\varphi\sin^2\theta + \sigma_{33}\cos^2\theta + 2\sigma_{12}\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta + \\ & + 2\sigma_{13}\cos\varphi\sin\theta\cos\theta + 2\sigma_{23}\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{1.7}$$

Для аппроксимации распределения прочностных свойств кристаллитов и зерен различной ориентации по аналогии с [4, 9] используется соотношение

$$P(\sigma) = \begin{cases} 0 & (\sigma < \sigma_0) \\ (\sigma - \sigma_0)^{\alpha}/(\sigma_c - \sigma_0)^{\alpha} & (\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c) \\ 1 & (\sigma > \sigma_c) \end{cases} \tag{1.8}$$

где параметры распределения α, σ_0, σ_c находятся по выборочным значениям, например, методом моментов [10], состоящим в приравнивании определенного количества выборочных моментов к соответствующим моментам распределения, которые являются функциями неизвестных параметров σ_0, σ_c, α. Основные моменты (средняя микропрочность $\langle\sigma\rangle$ и дисперсия D^2) для распределения (1.8) имеют вид

$$\langle\sigma\rangle = \frac{\alpha}{\alpha+1}(\sigma_c - \sigma_0) + \sigma_0 \tag{1.9}$$

$$D^2 = \frac{\alpha}{\alpha+2}\sigma_c^2 - \frac{2\alpha\langle\sigma\rangle\sigma_c}{\alpha+1} + \langle\sigma\rangle^2 \tag{1.10}$$

С учетом (1.8) средняя вероятность разрушения элементов структуры, пересекающих единицу площади поверхности представительного объема в виде шара некоторого радиуса будет определяться соотношением

$$p = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n \sin\theta d\theta d\varphi, \quad P_n = P(\sigma_n) \tag{1.11}$$

Физический смысл величины p заключается в том, что она представляет относительную долю площади поверхности шара, на которой нормальные напряжения σ_n превышают предел прочности σ микрочастиц, пересекаемых поверхностью шара. Вследствие этого частицы растрескиваются по поверхностям, ориентированным при сжатии в направлении действия σ_n. Если предположить, что характерные размеры и форма плоских дефектов и сечений структурных элементов материала близки, то отношение количества разрушенных микрочастиц N_p к их общему количеству N в представительном объеме будет определять объемную концентрацию плоских микродефектов ε, фигурирующую в соотношениях (1.4), (1.5). При этом $\varepsilon = p$. Действительно, пусть в шаре радиуса r имеется N микрочастиц. Если $\langle v\rangle = V/N$ – средний объем микрочастиц, то из соотношений $V = 4/3\pi r^3$, $S = 4\pi r^2$, $V = 1/3Sr$ следует

$$r = \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}\langle v\rangle}, \quad S = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}\langle v\rangle}\right)^2 \tag{1.12}$$

Поскольку в соответствии с (1.11) доля площади поверхности шара, содержащей разрушенные микрочастицы, равна $S_p = pS$, то в соответствии с формулами (1.12) объем разрушенных структурных элементов будет составлять

$$V_p = 1/3S_p r = pN\langle v\rangle \tag{1.13}$$

Далее можно определить концентрацию микротрещин, входящую в выражения (1.4), (1.5) в виде $\varepsilon = 4/3\pi N_0\langle ab^2\rangle$. В случае, например, эллипсоидальных структурных элементов для представительного элемента в виде шара единичного объема, содержащего N микрочастиц, имеют место соотношения

$$4/3\pi N\langle ab^2\rangle = 1, \quad \langle ab^2\rangle = 3/(4\pi N) \tag{1.14}$$

Поскольку $N_0 = N_p$ и $N_p = pN$, то

$$\varepsilon = 4/3\pi N_0\langle ab^2\rangle = p \tag{1.15}$$

Таким образом, связанный процесс деформирования и дисперсного разрушения в виде образования системы стохастически ориентированных плоских микротрещин моделируется замкнутой системой нелинейных уравнений (1.1), (1.5)–(1.8), (1.11), (1.15).

Применительно к постановке и решению задач устойчивости оболочек с учетом микроповреждаемости материала в дальнейшем понадобятся приведенные выше определяющие соотношения для случая плоского напряженного состояния ($\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$). С учетом равенства $\varepsilon_{33} = -\nu_c(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/(1 - \nu_c)$ уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2}(\varepsilon_{11} + \nu_c\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E_c}{1-\nu_c^2}(\varepsilon_{22} + \nu_c\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = G_c\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_c}(\sigma_{11} - \nu_c\sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E_c}(\sigma_{22} - \nu_c\sigma_{11}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{G_c}\sigma_{12}\end{gathered} \tag{1.16}$$

Здесь E_c, G_c, ν_c – секущие характеристики упругости, зависящие от наводимого в теле напряженного состояния, для обобщенной характеристики которого можно использовать интенсивности напряжений и деформаций

$$I_\sigma = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \tag{1.17}$$

$$I_\varepsilon = \frac{2}{3(1-\nu_c)}[(\varepsilon_{11} + \nu_c\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} + \nu_c\varepsilon_{11})^2 - (\varepsilon_{11} + \nu_c\varepsilon_{22})(\varepsilon_{22} + \nu_c\varepsilon_{11}) + 3/4(1 - \nu_c^2)\varepsilon_{12}^2]^{1/2} \tag{1.18}$$

Связь между интенсивностями и их приращениями определяется соотношениями

$$I_\sigma = 3G_c I_\varepsilon, \quad dI_\sigma = 3G_t dI_\varepsilon \tag{1.19}$$

где G_t – касательный модуль сдвига.

2. Устойчивость оболочек вращения из повреждающегося материала. Местная потеря устойчивости тонких оболочек вращения в упругой области деформирования рассматривалась в [11]. Аналогичная задача за пределом упругости решена в [5]. Ниже предлагается способ решения задач о местной потере устойчивости оболочек двоякой кривизны, сопровождающейся образованием плоских микродефектов в материале. Оболочка толщиной h относится к системе координат $0x_1x_2x_3$, связанной со срединной поверхностью. Координаты x_1, x_2, x_3 отсчитываются соответственно в меридиональном, окружном и нормальном к срединной поверхности направлениях. Перемещения точек срединной поверхности в указанных направлениях обозначаются u, v, w. Для рассматриваемого типа оболочек при решении задач устойчивости можно воспользоваться аппаратом теории пологих оболочек [11]. Тогда в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява в произвольной точке оболочки деформации будут определяться соотношениями

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + x_3\chi_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_{,1} - k_1 w, \quad e_{22} = v_{,2} - k_2 w, \quad e_{12} = u_{,2} + v_{,1} \\ \chi_{11} &= -w_{11}, \quad \chi_{22} = -w_{,22}, \quad \chi_{12} = -2w_{,12} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вид уравнений местной потери устойчивости оболочек в смешанной форме от свойств материала не зависит [11]

$$\begin{aligned} &M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + h(k_1\Phi_{,22} + k_2\Phi_{,11}) + \\ &+ h(\overset{0}{\sigma}_{11} w_{,11} + 2\overset{0}{\sigma}_{12} w_{,12} + \overset{0}{\sigma}_{22} w_{,22}) = 0 \\ &\bar{e}_{11,12} + \bar{e}_{22,11} - \bar{e}_{12,12} = -k_1 w_{,22} - k_2 w_{,11}, \quad M_{ij} = \int_{-1/2h}^{1/2h} x_3 \bar{\sigma}_{ij} dx_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь M_{ij}, $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{e}_{ij}$, w обозначают приращения моментов и напряжений в оболочке вследствие изгиба, а также деформаций и прогибов срединной поверхности в возмущенном состоянии; $\overset{0}{\sigma}_{ij}$ – напряжения в основном безмоментном напряженном состоянии; k_1, k_2 – главные кривизны оболочки в меридиональном и окружном направлениях. К этим уравнениям необходимо присоединить выражения для возмущений цепных напряжений через функцию напряжений Ф:

$$\bar{\bar{\sigma}}_{11} = \Phi_{,22}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{22} = \Phi_{,11}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{12} = -\Phi_{,12} \tag{2.4}$$

Приращения напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\bar{e}_{ij}$ определяются путем варьирования в окрестности основного состояния уравнений (1.16), связывающих конечные значения напряжений и деформаций для повреждающейся среды, с учетом зависимости секущих модулей от интенсивности напряжений и деформаций в форме (1.19). При этом интенсивности напряжений и деформаций в конечном счете будут определяться компонентами основного напряженного состояния $\overset{0}{\sigma}_{ij}$ в силу исчезающе малых, как это следует из постановки задачи о бифуркационной устойчивости, возмущений докритического напряженного состояния при переходе в бесконечно близкое равновесное состояние. В результате варьирования возмущения напряжений и деформаций представляются в виде

$$\begin{aligned} \bar\sigma_{11} &= \bar a_{11}\bar\varepsilon_{11} + \bar a_{12}\bar\varepsilon_{22} + \bar a_{13}\bar\varepsilon_{12}, \quad \bar\sigma_{22} = \bar a_{21}\bar\varepsilon_{11} + \bar a_{22}\bar\varepsilon_{22} + \bar a_{23}\bar\varepsilon_{12} \\ \bar\sigma_{12} &= \bar a_{31}\bar\varepsilon_{11} + \bar a_{32}\bar\varepsilon_{22} + \bar a_{33}\bar\varepsilon_{12} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \bar\varepsilon_{11} &= A_{11}\bar\sigma_{11} + A_{12}\bar\sigma_{22} + A_{13}\bar\sigma_{12}, \quad \bar\varepsilon_{22} = A_{21}\bar\sigma_{11} + A_{22}\bar\sigma_{22} + A_{23}\bar\sigma_{12} \\ \bar\varepsilon_{12} &= A_{31}\bar\sigma_{11} + A_{32}\bar\sigma_{22} + A_{33}\bar\sigma_{12} \end{aligned} \tag{2.6}$$

где коэффициенты $\bar a_{ij}$, A_{ij}, определяемые соотношениями $\bar a_{11} = \partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{11}$, $\bar a_{12} = \partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{22}$, $\bar a_{13} = \partial\sigma_{11}/\partial\varepsilon_{12}$, ..., $\bar a_{33} = \partial\sigma_{12}/\partial\varepsilon_{12}$; $A_{11} = \partial\varepsilon_{11}/\partial\sigma_{11}$, $A_{12} = \partial\varepsilon_{11}/\partial\sigma_{22}$, $A_{13} = \partial\varepsilon_{11}/\partial\sigma_{12}$, ..., $A_{33} = \partial\varepsilon_{12}/\partial\sigma_{12}$, имеют вид

$$\begin{aligned} \bar a_{11} &= \frac{E_c}{1-\nu_c^2} + \frac{(E_t - E_c)\left\lfloor(2-\nu_c)\sigma_{11}^0 + (2\nu_c - 1)\sigma_{22}^0\right\rfloor\sigma_{11}^0}{2(1-\nu_c^2)I_{\sigma^0}^2} \\ \bar a_{12} &= \frac{\nu_c E_c}{1-\nu_c^2} + \frac{(E_t - E_c)\left\lfloor(2-\nu_c)\sigma_{22}^0 + (2\nu_c - 1)\sigma_{11}^0\right\rfloor\sigma_{11}^0}{2(1-\nu_c^2)I_{\sigma^0}^2} \\ \bar a_{13} &= 3(G_t - G_c)\frac{\sigma_{11}^0\sigma_{12}^0}{I_{\sigma^0}^2}, \quad \bar a_{33} = G_c + 3(G_t - G_c)\frac{(\sigma_{12}^0)^2}{I_{\sigma^0}^2} \\ \bar a_{31} &= \frac{(E_t - E_c)\left\lfloor(2-\nu_c)\sigma_{11}^0 + (2\nu_c - 1)\sigma_{22}^0\right\rfloor\sigma_{12}^0}{2(1-\nu_c^2)I_{\sigma^0}^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{E_c} + \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_c}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu_c\sigma_{22}^0)(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)}{2I_{\sigma^0}^2} \\ A_{12} &= -\frac{\nu_c}{E_c} + \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_c}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu_c\sigma_{22}^0)(2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0)}{2I_{\sigma^0}^2} \\ A_{13} &= 3\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_c}\right)\frac{(\sigma_{11}^0 - \nu_c\sigma_{22}^0)\sigma_{12}^0}{I_{\sigma^0}^2}, \quad A_{33} = \frac{1}{G_c} + 3\left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_c}\right)\frac{(\sigma_{12}^0)^2}{I_{\sigma^0}^2} \\ A_{31} &= \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_c}\right)\frac{(2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0)\sigma_{12}^0}{I_{\sigma^0}^2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Коэффициенты $\bar a_{22}$, $\bar a_{21}$, $\bar a_{23}$, $\bar a_{32}$, A_{22}, A_{21}, A_{23}, A_{32} определяются приведенными выше соответствующими выражениями с помощью перестановки индексов $1 \Leftrightarrow 2$.

Представленные выше соотношения справедливы для общего случая напряженно-деформированного состояния оболочки. Далее с целью упрощения выкладок будут рассматриваться оболочки с однородным основным напряженно- деформированным состоянием. В этом случае уравнения (2.3) с учетом соотношений (2.4)–(2.8), справедливых для цепных и изгибных напряжений и деформаций, принимают вид

$$
\begin{aligned}
& D[a_1 w_{,1111} + a_2 w_{,1122} + a_3 w_{,2222} + 2a_4 w_{,1112} + 2a_5 w_{,1222}] - \\
& - T_{11}^0 w_{,11} - T_{22}^0 w_{,22} - 2T_{12}^0 w_{,12} - h(k_1 \Phi_{,22} + k_2 \Phi_{,11}) = 0 \\
& \bar{A}_1 \Phi_{,1111} + \bar{A}_2 \Phi_{,1122} + \bar{A}_3 \Phi_{,2222} - \bar{A}_4 \Phi_{,1112} - \bar{A}_5 \Phi_{,1222} = -E_0 h (k_1 w_{22} + k_2 w_{11}) \\
& D = E_0 h^3/12, \quad \bar{\bar{a}}_{ij} = \bar{a}_{ij}/E_0, \quad \bar{A}_{ij} = E_0 A_{ij} \\
& a_1 = \bar{\bar{a}}_{11}, \quad a_2 = \bar{\bar{a}}_{12} + \bar{\bar{a}}_{21} + 4\bar{\bar{a}}_{33}, \quad a_3 = \bar{\bar{a}}_{22}, \quad a_4 = \bar{\bar{a}}_{13} + \bar{\bar{a}}_{31}, \quad a_5 = \bar{\bar{a}}_{23} + \bar{\bar{a}}_{32} \\
& \bar{A}_1 = \bar{A}_{22}, \quad \bar{A}_2 = \bar{A}_{12} + \bar{A}_{21} + \bar{A}_{33}, \quad \bar{A}_3 = \bar{A}_{11}, \quad \bar{A}_4 = \bar{A}_{32} + \bar{A}_{23}, \quad \bar{A}_5 = \bar{A}_{13} + \bar{A}_{31}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

где обозначено $T_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 h$ – погонные тангенциальные усилия докритического напряженного состояния.

3. Осесимметричное нагружение оболочки. В качестве иллюстративного примера рассмотрена местная потеря устойчивости замкнутой оболочки вращения при воздействии внешнего равномерного давления интенсивностью q. В этом случае усилия в основном напряженном состоянии определяются выражениями

$$
\begin{aligned}
& T_{11}^0 = h\sigma_{11}^0 = -\frac{qR_2}{2}, \quad T_{22}^0 = h\sigma_{22}^0 = -\frac{qR_2}{2}(2-\chi) \\
& T_{12}^0 = h\sigma_{12}^0 = 0, \quad \chi = k_1/k_2
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Из соотношений (1.17), (2.7), (2.8) для рассматриваемого варианта нагружения следует

$$
a_4 = a_5 = \bar{A}_4 = \bar{A}_5 = 0 \tag{3.2}
$$

Решение системы уравнений (2.9) представляется в виде

$$
w = A \sin k_2 \lambda x_1 \sin k_2 n x_2, \quad \Phi = B \sin k_2 \lambda x_1 \sin k_2 n x_2, \quad \lambda = \chi m \tag{3.3}
$$

где m, n – волновые числа в меридиональном и окружном направлениях. Критическое давление можно найти по формуле

$$
\bar{q} = \frac{2k_2}{1 + (2-\chi)\gamma}\left[D k_2^2 \lambda^2 (a_1 + a_2\gamma + a_3\gamma^2) + \frac{E_0 h (1+\gamma\chi)^2}{\lambda^2(\bar{A}_1 + \bar{A}_2\gamma + \bar{A}_3\gamma^2)}\right] \tag{3.4}
$$

В случае $\gamma = n^2/\lambda^2 \gg 1$ минимальное значение критического давления по волновому числу n определяется соотношениями

$$
\begin{aligned}
& \bar{q} = \frac{2E_0 h^2 k_1 k_2^2}{\sqrt{3}(2k_2 - k_1)}\sqrt{\frac{a_3}{\bar{A}_3}} \\
& a_3(1-\nu_c^2) = \frac{E_c}{E_0} + \frac{(E_t - E_c)[6 + (2\nu_c - 7)\chi + (2-\nu_c)\chi^2]}{2E_0(3 - 3\chi + \chi^2)} \\
& \bar{A}_3 = \frac{E_0}{E_c} + E_0\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_c}\right)\left[\frac{(1-2\nu_c)\chi + \nu_c\chi^2}{2(3 - 3\chi + \chi^2)}\right]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Для сплошного упругого материала ($E_t = E_c = E_0$, $\nu_c = \nu_0$) выражение (3.5) переходит в известную формулу [11]:

$$\bar{q} = \frac{2E_0}{\sqrt{3(1-\nu_0^2)}}\frac{k_1}{(2k_2-k_1)}\frac{h^2}{R_2^2} \tag{3.6}$$

В формулах (3.5), (3.6) R_1, R_2 представляют некоторые средние значения главных радиусов кривизны участков оболочки, ограниченных узловыми линиями локальных форм потери устойчивости. Из бесчисленного множества значений $\bar{q}$, определяемых формулами (3.5).(3.6), искомым является минимальное. В случае выпуклых оболочек вращения, для которых справедливо неравенство $R_1 > R_2$, наиболее слабым в смысле локальной устойчивости участком будет область поверхности оболочки, содержащая касательные к образующей, параллельные либо перпендикулярные к оси вращения.

В предположении накопления в материале при рассматриваемом виде нагружения оболочки микродефектов типа круговых трещин в формуле (3.5) секущие модуль упругости E_c и коэффициент Пуассона ν_c будут определяться формулами (1.5), в которых концентрация микротрещин ε при двухпараметрическом распределении микропрочности (формула (1.8) при $\sigma_0 = 0$) в зависимости от величины сжимающих напряжений σ_{11}^0, σ_{22}^0 находится из выражения

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sigma_{11}^0}{\sigma_c}\right)^{2\alpha}[\cos^2\varphi + (2-\chi)\sin^2\varphi]^{\alpha}\sin^{2\alpha+1}\theta\partial\theta\partial\varphi \tag{3.7}$$

Последовательность значений касательного модуля упругости, соответствующих определенным значениям напряжений $(\sigma_{11}^0)_i$, можно найти по формуле

$$(E_t)_i = \frac{(1-\nu_c)_i\left\lfloor(\sigma_{11}^0)_{i+1} - (\sigma_{11}^0)_i\right\rfloor}{(\varepsilon_{11}^0)_{i+1} - (\varepsilon_{11}^0)_i} \tag{3.8}$$

где $(\sigma_{11}^0)_i$ обозначает значение напряжения на i-ом этапе нагружения с малым шагом $\Delta\sigma_{11}^0$. Связь между напряжениями $(\sigma_{11}^0)_i$ и деформациями $(\varepsilon_{11}^0)_i$ устанавливается соотношениями (1.5), (1.16), (3.7).

Правая часть соотношения (3.5) представляет собой нелинейную зависимость от $\bar{q}$, поэтому для вычисления критических значений давления необходимо воспользоваться итерационными методами. Влияние прогрессирующего трещинообразования можно оценить и путем сравнения относительных толщин оболочек для заданной последовательности критических значений напряжения σ_{11}^0.

В качестве иллюстративного примера рассмотрена сферическая оболочка. Критическое давление в этом случае определяется формулой

$$\bar{q} = \frac{2h^2}{\sqrt{3(1-\nu_c^2)}R^2}\sqrt{E_cE_t} \tag{3.9}$$

Расчеты проводились для оболочек из материала со следующими характеристиками: $E_0 = 4.2 \cdot 10^{11}$ Па, $\upsilon_0 = 0.2$, $\langle\sigma\rangle = 1.9 \cdot 10^9$ Па, $D = 0.672 \cdot 10^9$ Па, $f = 0.2$. Расчетные значе-

$\sigma_{11}^0 \cdot 10^{-9}$ [Па]	$\varepsilon \cdot 10$	$E_c \cdot 10^{-12}$ [Па]	$E_t \cdot 10^{-12}$ [Па]	$(h/R)_n \cdot 10^2$	$(h/R)_y \cdot 10^2$
0.560	0.213	0.415	0.407	0.227	0.226
0.700	0.333	0.413	0.401	0.292	0.283
0.840	0.480	0.410	0.394	0.354	0.339
0.980	0.653	0.407	0.385	0.419	0.396
1.120	0.853	0.403	0.375	0.488	0.453
1.260	1.080	0.398	0.365	0.559	0.509
1.400	1.333	0.393	0.353	0.636	0.566
1.540	1.613	0.387	0.340	0.718	0.622
1.680	1.920	0.381	0.327	0.804	0.679
1.820	2.253	0.375	0.312	0.898	0.735

ния параметров распределения прочности в соответствии с (1.9), (1.10) для этого случая имеют значения $\alpha = 2$, $\sigma_c = 2.8 \cdot 10^9$ Па.

Концентрация трещин с учетом (3.7) определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{8}{15}\left(\frac{\sigma_{11}^0}{\sigma_c}\right)^2 = \frac{2}{15}\left(\frac{\bar{q}R}{h\sigma_c}\right)^2$$

Результаты вычислений представлены в таблице. Индексами n и y обозначены результаты, полученные с учетом и без учета повреждаемости материала. Расчеты проводились с шагом $\Delta\sigma_{11}^0 = \sigma_c/20$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Германович Л.Н., Дыскин А.В.* Модель разрушения хрупкого материала с трещинами при одноосном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ.1988. № 2. С. 118–131.
2. *Драган А., Мруз З.* Континуальная модель пластически хрупкого поведения скальных пород и бетона // Механика деформируемых твердых тел. Направление развития / Под ред. Г.С. Шапиро. М.: Мир, 1983. С. 163–188.
3. *Тамуж В.П., Куксенко В.С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
4. *Хорошун Л.П.* Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость // Прикл. механика. 1998. Т. 34. № 10. С.120–127.
5. *Григолюк Э.И.* Пластическое выпучивание оболочек вращения // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 2. С. 130–132.
6. *Бабич Д.В.* Приближенный учет поврежденности материала в задачах о равновесии упругих оболочек // Проблемы прочности. 1996. № 3.С. 20–30.
7. *Бабич Д.В.* Исследование устойчивости композитных оболочек с учетом трещиноватости компонентов материала // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 11. С.46–54.
8. *Салганик Р.Л.* Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. МТТ.1973. № 4. С. 149–158.
9. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
10. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1976. 648 с.
11. *Работнов Ю.Н.* Локальная устойчивость оболочек // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. № 2. С. 111–112.

Киев — Поступила в редакцию 18.01.2001