МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2003

УДК 539.375 + 539.4

© 2003 г. А.И. Искакбаев, А.А. Искакбаева

О ВЛИЯНИИ ТРЕЩИНЫ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ

Рассматривается влияние микро- и макродефектов на долговечность вязкоупругих тел в условиях старения материалов. Исследование проведено на основе синтеза теории накопления повреждений Работнова–Качанова и теории хрупкого разрушения Черепанова. Кинетические уравнения накопления повреждений представлены в виде интегральных уравнений Вольтерра второго рода, позволяющие установить вид ядра поврежденности через характеристики трещиностойкости материала. Обобщены формулы Журкова и Качанова-Работнова на случай учета влияния макротрещины на длительную прочность материалов. Установлено, что при значении коэффициента интенсивности напряжений (КИН) меньше некоторой "пороговой" величины трещина не развивается.

1. Введение. Необходимость оценки долговечности элементов конструкций с обнаруженными в них трещинами, длина которых меньше критической, определяет повышенный интерес к вопросам докритического подрастания трещин вязкоупругих тел в условиях старения материалов. Было проведено большое число экспериментальных исследований, посвященных изучению процесса докритического роста таких трещин [1], и выявлению параметров, адекватно его описывающих. Для теоретического описания процесса подрастания трещин предложены различные модели [1–4]. Основными их элементами являются аппроксимация поля напряжений в теле с трещиной и критерий роста трещины. В качестве последнего в большинстве работ используется достижение критического значения в вершине трещины или на некотором расстоянии от нее каким-либо параметром. Часто этим параметром является параметр поврежденности [3]. В данной работе, посвященной задаче о подрастании трещины при наличии зоны разрушения, примыкающей к ее вершине, также используется параметр поврежденности введенный на основе концепций континуального разрушения твердых тел Качанова–Работнова [5–6]. Аппроксимация поля напряжений в старом возрасте [4] в вязкоупругом теле с трещиной моделируется на основе концепций Г.П. Черепанова [7]. Целью настоящей работы является применение идеи работ [5–7] к исследованию влияния макродефектов на длительную прочность материалов.

2. Концепция Черепанова. Следуя [7] предположим, что развитие трещины стационарно в том смысле, что размер d малой пластической области в ее конце не изменяется при увеличении длины трещины и не зависит от приложенных нагрузок. Среднее растягивающее напряжение σ в пластической области, согласно вязкоупругой аналогии, таково [7]:

$$\sigma = \lambda K_I d^{-1/2} \tag{2.1}$$

где λ – некоторое число, которое считается постоянным для рассматриваемого материала, K_{I} – коэффициент интенсивности напряжений при нормальном отрыве.

Представляя развитие трещины последовательным скачкообразным разрушением малых пластических областей в ее конце, согласно [7], примем

$$dl/dt = d/\tau \tag{2.2}$$

Здесь τ – время длительной прочности данного материала, l – длина трещины.

Пусть длительная прочность описывается соотношением [8]:

$$\tau = B\exp(-\alpha\sigma_*\sigma/\sigma_* - \sigma) \tag{2.3}$$

где σ_* – временное сопротивление разрыву, σ – растягивающее напряжение, α, $B(T)$ – коэффициенты длительной прочности материала, T – абсолютная температура.

При $\sigma_* = \infty$ из (2.3) следует формула С.Н. Журкова [9]. Связь между критическим значением коэффициента интенсивности напряжений (K_*) и пределом мгновенной прочности (σ_*) в соответствии с работой [7] запишем в виде

$$\sigma_* = CK_* \tag{2.4}$$

здесь C – некоторое (размерное) число, которое можно считать постоянным для данного материала. При помощи формул (2.1), (2.3) и (2.4) из (2.2) получаем следующее выражение для скорости роста трещины dl/dt в зависимости от коэффициента интенсивности напряжений K_I:

$$dl/dt = B^{-1}\exp[\alpha CK_\text{I}(1 - K_\text{I}/K_*)^{-1}]d \tag{2.5}$$

где положено $\lambda = Cd^{1/2}$. При $K_\text{I} \gg K_*$ из (2.5) следует уравнение Г.П. Черепанова [7].

Если длительная прочность образца моделируется выражением [8]:

$$\tau = (1 - \sigma/\sigma_*)^n[A(n+1)\sigma^n]^{-1} \tag{2.6}$$

то вместо (2.5) получаем

$$dl/dt = A(n+1)C^nK_*(1 - K_\text{I}/K_*)^{-n}d \tag{2.7}$$

где $n(T)$, $A(T)$ – коэффициенты длительной прочности материала. При $\sigma_* = \infty$ из (2.6) следует формула Л.М. Качанова [5].

Таким образом, если $K_\text{I} < K_*$, то трещина будет развиваться за счет процесса накопления повреждений. В случае $K_\text{I} = K_*$ происходит мгновенное разрушение конструкции. Заметим, что зависимости вида (2.5) или (2.7) могут быть использованы для моделирования докритического роста трещин в упругих телах [7].

В качестве примера исследуем случай [1], когда

$$K_\text{I} = kp\sqrt{\pi l}, \quad p = \text{const} \tag{2.8}$$

Этот случай для плоской задачи при $k = 1$ соответствует задаче Гриффитса, при $k = 1, 12$ – одноосному растяжению полубесконечной плоскости с краевой трещиной, при $k = \xi(m)$ (m – число лучей) – всестороннему растяжению плоскости со звездообразной трещиной.

Критическая длина трещины определяется из (2.8)

$$l_* = (k^2\pi p^2)^{-1}(K_*)^2 \tag{2.9}$$

Наибольший практический интерес представляет отыскание времени до разрушения t_* при [7]:

$$l_* \gg l_0, \quad l_0 = l \quad (t = 0) \tag{2.10}$$

Принимая во внимание соотношения (2.8)–(2.10) решение уравнения (2.5) запишется так

$$t_* = D\exp(-\beta\sqrt{l_0}),\quad \beta = \alpha Ckp\sqrt{\pi}\quad D = \frac{2}{\beta d}\left(\sqrt{l_0}+\frac{1}{\beta}\right)B,\quad B>0,\quad \alpha>0 \tag{2.11}$$

С учетом (2.8)–(2.10) решение уравнения (2.7) имеет вид

$$\begin{aligned} t_* &= D_1 l_0^{-n/2} \\ D_1 &= [A(n+1)(n/2-1)\lambda^n d^{1-n/2}k^n p^n \pi^{n/2}]^{-1} l_0,\quad A>0,\quad n>2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Формулы (2.11), (2.12) описывают докритический рост трещины за счет процессов локального старения в конце трещины, если длительная прочность материалов моделируется формулами Журкова и Качанова. В общем случае уравнения вида (2.5) и (2.7) не допускают решения в квадратурах.

3. Исследование влияния макродефекта на прочность. Согласно концепции континуального разрушения твердых тел Качанова–Работнова кинетическое уравнение для функции поврежденности $\omega(t)$ записывается в виде

$$\omega(t) = 1/\sigma_*\left[\sigma(t)+\int_0^t \Pi(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau\right] \tag{3.1}$$

где $\Pi(t-\tau)$ – ядро поврежденности материала [8].

Время разрушения t^* определяется из условия

$$\omega(t^*) = 1 \tag{3.2}$$

При помощи формул (2.1) и (2.4) из (3.1), (3.2) получаем интегральное уравнение для определения зависимости между предельными и текущими значениями коэффициента интенсивности напряжений

$$K_* = K_{\rm I}(t^*) + \int_0^{t^*}\Pi(t^*-\tau)K_{\rm I}(\tau)d\tau \tag{3.3}$$

Вид ядра поврежденности материала устанавливается через закономерности долговечности $\sigma = \sigma(t^*)$ [8]:

$$d/dt^*[1/\sigma(t^*)] = 1/\sigma_*\Pi(t^*) \tag{3.4}$$

где σ_* определяется выражением (2.4).

В [3] исследование влияния макротрещины на длительную прочность конструкций проведено на основе критерия критического раскрытия трещины (КРТ) и рассмотрены конкретные виды ядра поврежденности при значении l_0 немного меньше предельного значения длины макротрещины $\bar{l}_*$ [3]. Заметное расхождение между двумя значениями l_* и $\bar{l}_*$ начинается со значения напряжения $p_* \approx 0.6\sigma_*$ [10].

Из (3.3) при постоянном напряжении находим

$$K_{\rm I}(t^*) = K_*\left[1+\int_0^{t^*}\Pi(t^*-\tau)d\tau\right]^{-1} \tag{3.5}$$

Предполагая, что закономерность изменения коэффициента интенсивности напряжений во времени известным, из (3.5) найдем зависимость

$$d/dt^*[1/K_{\mathrm{I}}(t^*)] = 1/K_*\Pi(t^*) \tag{3.6}$$

которая позволяет установить вид ядра поврежденности через изменения характеристик трещиностойкости [4].

Сравнивая (3.4) и (3.6) имеем

$$\sigma_*/\sigma(t^*) = K_*/K_{\mathrm{I}}(t^*) \tag{3.7}$$

Рассмотрим частные случаи ядра поврежденности $\Pi(t)$.

1) $\Pi(t) = \lambda e^{-\beta t}$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$ [3]. В этом случае из (3.5) находим

$$K_{\mathrm{I}}(t^*) = K_*[1 + \lambda/\beta(1 - e^{-\beta t^*})]^{-1}$$

которая имеет горизонтальную асимптоту $K_{\mathrm{I}}(\infty)$:

$$K_{\mathrm{I}}(\infty) = K_*(1 + \lambda/\beta)^{-1} \tag{3.8}$$

При значении $K_{\mathrm{I}} < K_{\mathrm{I}}(\infty)$ трещина вовсе не будет развиваться вследствие того, что процесс накопления повреждений в этом случае ограничен (при $t \to \infty$ $\omega < 1$). При $K_{\mathrm{I}} > K_{\mathrm{I}}(\infty)$ из (2.8), (2.9) и (3.5) получим формулу идентичную формулам из [3] при условии $l_0 < l_*$:

$$t^* = -\beta^{-1}\ln[1 - \beta/\lambda(\sqrt{l_*/l_0} - 1)]$$

Можно убедиться, что при сделанных выше ограничениях $t^* > 0$.

2) используя (2.6) из (3.4) находим

$$\Pi(t) = \delta t^{(1/n - 1)}, \quad \delta = (\sigma_*/n)[A(n+1)]^{1/n}, \quad n \ge 1$$

В этом случае $K_{\mathrm{I}}(\infty) = 0$, тогда при $K_{\mathrm{I}} > 0$ из (2.8), (2.9) и (3.5) получаем

$$t^* = [(1/n\delta)(\sqrt{l_*/l_0} - 1)]^n \tag{3.9}$$

Формула (3.9) идентична формулам из [3] при условии $l_0 < l_*$.

3) Переменные нагрузки. Пусть $\Pi(t) = \lambda Э_\alpha(-\beta, t)$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$, $Э_\alpha(t)$ – функция Работнова [11], $0 < \alpha < 1$, при этом задача имеет решение при $K_{\mathrm{I}} > K_{\mathrm{I}}(\infty)$, где $K_{\mathrm{I}}(\infty)$ – определяется соотношением (3.8). В этом случае решение (3.3) имеет вид:

$$z(t^*) = 1 - \lambda Э^*_\alpha(-\lambda - \beta;\, t^*), \quad z(t^*) = K_{\mathrm{I}}(t^*)/K_*, \quad K_{\mathrm{I}}(t^*) = k\sqrt{\pi l_0}p(t^*),$$
$$p(t) = p_0(a + bt) \tag{3.10}$$

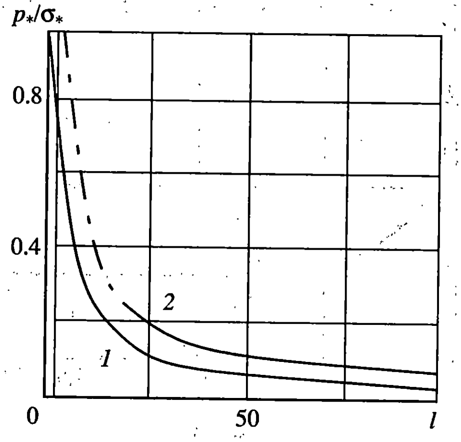
Здесь $Э^*_\alpha$ – оператор Работнова [11], p_0 – начальное значение внешней нагрузки, a, b – некоторые постоянные, причем $(a + bt) > 0$.

Если $\alpha = 0$, тогда из (3.10) находим $z(t^*) = 1 - \lambda Э^*_0(-\lambda - \beta;\, t^*)$, где $Э^*_0$ – экспоненциальный оператор [11].

Пусть $\Pi(t) = \lambda t^{-\beta}/\Gamma(1 - \beta)$, $0 < \beta < 1$, Γ – гамма функция [11]. В этом случае решение (3.3) можно записать так $z(t^*) = [1 + \lambda I^*_\alpha(t^*)]^{-1}$, где I^*_α – оператор Абеля [11].

Теперь вместо (3.3) рассмотрим уравнение вида:

$$(1/K_*)\int_0^{t^*}\Pi(t^* - \tau)K_{\mathrm{I}}(\tau)d\tau = 1 \tag{3.11}$$



Фиг. 1

С учетом (2.3), (3.4) и (2.8), (2.9) из (3.11) находим

$$t^* = B\exp(-\alpha\sigma_*\sqrt{l_0/l_*}) \tag{3.12}$$

где a, B – параметры длительной прочности материала, описываемой формулой Журкова [9].

С учетом (2.6), (3.4) и (2.8), (2.9) из (3.11) получаем

$$t^* = [A(n+1)(\sigma_*\sqrt{l_0/l_*})^n]^{-1} \tag{3.13}$$

где n, A – параметры длительной прочности материала, моделируемой формулой Качанова–Работнова [5.11].

4. Анализ кинетики трещины по двум моделям. Для дальнейших исследований преобразуем уравнение (2.9) сделав замену вида (2.4):

$$p_*/\sigma_* = (\sqrt{\bar{l}}\,)^{-1}, \quad \bar{l} = \pi C^2 l_* \tag{4.1}$$

где p_* – критическое значение нагрузки.

Классическая кривая разрушения (4.1), которая в нуле имеет особенность, не описывает зависимость p_*/σ_* от $\bar{l}$ при стремлении длины трещины к нулю, поэтому следуя [12] вместо (4.1) рассмотрим уравнение

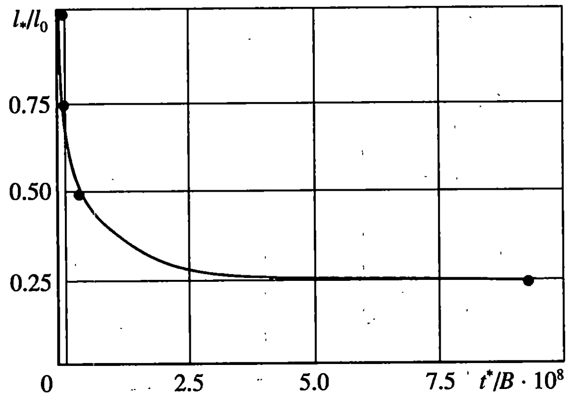
$$p_*/\sigma_* = (1 + \sqrt{\bar{l}}\,)^{-1} \tag{4.2}$$

При $l_* \to 0$ из (4.2) $p_* = \sigma_*$, что соответствует физическому смыслу [13]. На фиг. 1 приведены кривые разрушения: кривая *2* – кривая Гриффитса, кривая *1* – кривая соответствует необходимому критерию хрупкой прочности Новожилова [14]. Заметное расхождение между двумя кривыми начинается при $\bar{l} \leq 4$.

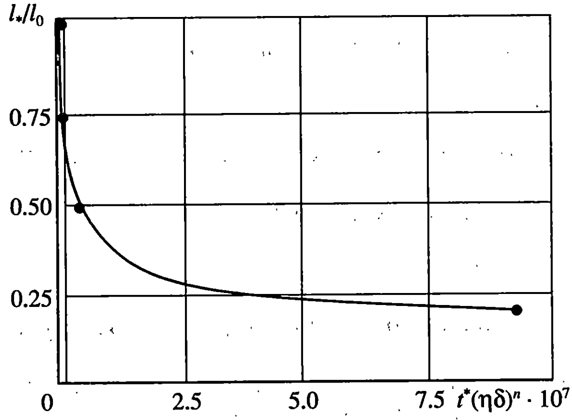
Преобразуем уравнение (3.12), сделав замену (4.1):

$$t^* = B\exp(-\alpha C\sqrt{\pi l_0 p_*}) \tag{4.3}$$

Эта формула идентична формулам Черепанова (2.11) при условии $l_0 \ll l_*$.



Фиг. 2



Фиг. 3

В качестве примера на основе (3.12) опишем долговечность целлулоида [9]: $\alpha = 0.38$ (МПа)$^{-1}$, $B = 10^{14}$ сек, $\sigma_* = 85$ МПа. На фиг. 2 приведена зависимость долговечности целлулоида от длины начальной трещины l_0.

Проделав замену (4.1), преобразуем (3.13) к виду

$$t^* = [A(n+1)p_*^n(\sqrt{\pi})^n C^n]^{-1} l_0^{-n/2} \tag{4.4}$$

Данная формула идентична формулам (2.12) при условии $l_0 \ll l_*$.

В качестве примера на основе (3.9) моделируем долговечность боропластика [15]: σ_* =155 МПа, $n = 20$, $A = 3.62 \cdot 10^{-51}$ (МПа)$^{-20}$ (сутки)$^{-1}$. На фиг. 3 приведена зависимость длительной прочности боропластика от длины начальной трещины l_0.

Анализ кривых на фиг. 2, 3 показывает, что изменения характеристик трещиностойкости $K_{\mathrm{I}}(t)$ у целлулоида и боропластика происходит по разному закону.

Сравнивая формулы (2.11), (2.12) с формулами (4.3), (4.4) заключаем, что $t_* \geq t^*$. Предлагаемая модель открывает возможность определять параметры длительной прочности материалов на основе экспериментов на ограниченных отрезках времени.

5. Заключение. На основе синтеза теории накопления повреждений и теории хрупкого разрушения разработана модель для прогнозирования долговечности стареющих тел с учетом микро- и макродефектов. Обобщены формулы Журкова и Качанова–Работнова на случай учета влияния макротещины на длительную прочность материалов. Установлено, что при $K_I < K_I(\infty)$ ($K_I(\infty)$ – "пороговая" величина КИН [7]) трещина не развивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каминский А.А., Гаврилов Д.А.* Механика разрушения полимеров. Киев: Наук. думка, 1988. 221 с.
2. *Костров Б.В., Никитин Л.В., Флитман Л.М.* Распространение трещин в упруго-вязких телах // Изв. АН СССР. Физика земли. 1970. № 7. С. 20–35.
3. *Ахундов М.Б., Никитин Л.В., Суворова Ю.В.* Кинетическая модель развития трещины в повреждающейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 128–138.
4. *Пестриков В.М.* О критериях разрушения вязкоупругих тел в условиях старения материалов // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С. 86–96.
5. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
6. *Работнов Ю.Н.* Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
7. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. *Искакбаев А.И.* Об одной модели длительной прочности материалов // Вестн. КазГУ. Сер. мат., мех., информатика. 1998. № 9. С. 66–77.
9. *Журков С.Н., Нарзуллаев Б.Н.* Временная зависимость прочности твердых тел // Ж. техн. физики. 1953. Т. 23. Вып. 10. С. 1677–1689.
10. *Партон В.З.* Механика разрушения: От теории к практике. М.: Наука, 1990. 238 с.
11. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
12. *Корнев В.И.* Иерархия критериев прочности структурированных хрупких сред. Сателлитное зарождение микротрещин // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 177–187.
13. *Морозов Е.М., Фридман Я.Б.* Анализ трещин как метод оценки характеристик разрушения // Заводская лаборатория. 1966. № 8. С. 977–984.
14. *Новожилов В.В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 2. С. 212–222.
15. *Суворова Ю.В.* О критерии прочности, основанном на накоплении поврежденности, и его приложении к композитам // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С.107–111.

Алматы

Поступила в редакцию
01.02.2001