МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2003

УДК 539.214; 539.374

© 2003 г. Ю.Н. РАДАЕВ

К ТЕОРИИ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматриваются трехмерные уравнения математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным с ним законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести. Показано, что поля собственных векторов тензора напряжений, отвечающих наибольшему (или наименьшему) главному напряжению, необходимо будут расслоенными. Вводятся такие криволинейные координаты, что уравнения равновесия, преобразованные к новым переменным, сводятся к трем интегрируемым уравнениям. Найдены инварианты, сохраняющие свои значения вдоль линий главных напряжений. Выделены классы пространственных задач теории пластичности, для которых поля напряжений соответствуют ребру призмы Треска и необходимо являются расслоенными. Доказано, что интегрирование уравнений пластичности для задач этих классов сводится к отысканию канонических отображений пространственных областей. Вводятся канонические координаты пространственной, плоской и осесимметричной задачи. Исследованы уравнения для производящих канонические преобразования функций, которые подлежат определению в плоских и осесимметричных задачах теории пластичности.

1. Уравнения математической теории пластичности для ребра призмы Треска. Уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви в 1870 г. [1], который принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скорости деформации. Длительное время уравнения пространственной задачи оставались не изученными.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений. Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [2–5]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определимы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения. Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими.

Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман выдвинули условие полной пластичности [6], которое по существу устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Треска, и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определимыми.

В 1923 г. Генки [7] предложил использовать условие полной пластичности Хаара–Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определимой системе уравнений равновесия, которая оказалась гиперболической.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [8] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности, доказав статическую определимость и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара–Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А.Ю. Ишлинским [9], который также использовал обобщенный закон пластического течения, не предполагающий столь жесткие ограничения на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений.

Результаты А.Ю. Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [10, 11], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара-Кармана для всей теории пластичности и развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения. Было установлено, что при условии полной пластичности уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определимыми и принадлежат к гиперболическому типу. Характеристические направления при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса.

Отметим, что уравнения осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для грани призмы Треска также являются гиперболическими, характеристические направления ориентированы так же как и главные направления тензора напряжений. Полное исследование уравнений осесимметричной задачи при условии пластичности Треска можно найти в [3], с. 258–268.

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска. Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений; $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ – ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений; σ_1, σ_2, σ_3 – соответствующие собственные значения (главные напряжения); k – предел текучести при чистом сдвиге.

Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \tag{1.1}$$

В пространстве главных напряжений условие текучести Треска изображается поверхностью шестигранной призмы с ребрами $\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$.

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$. Последнее условие означает, что главное напряжений σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Так как $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ – ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} = \mathbf{I} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Учитывая (1.1), (1.2) и уравнение ребра призмы $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I} \mp 2k\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} \tag{1.3}$$

Таким образом, тензор напряжений определяется скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем $\mathbf{n}$.

Уравнение равновесия $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ после подстановки в него разложения (1.3) можно представить в следующем виде:

$$\operatorname{grad}\sigma_3 \mp 2k\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1) \tag{1.4}$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора $\mathbf{n}$), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Обозначим через Σ отношение σ_3 к $\pm 2k$ и приведем уравнение (1.4) к виду

$$\operatorname{grad}\Sigma + \operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1) \tag{1.5}$$

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.5):

$$\nabla\Sigma + (\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{n} + \mathbf{n}(\nabla\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

Для единичного векторного поля справедлива формула

$$(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{n} = -\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n} \tag{1.7}$$

с помощью которой векторное уравнение (1.6) может быть также представлено в виде

$$\nabla\Sigma - \mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n} + \mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

В дальнейшем будем использовать также следующие равенства: $((\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{n})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n} = 0$, $((\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = 0$, вытекающие из (1.7).

Уравнение (1.8) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора $\mathbf{n}$. Ясно, что характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и также интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$ (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля $\mathbf{n}$).

Исследуем уравнение (1.8) сначала в предположении, что $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n} = \mathbf{0}$ всюду в области пластического течения. Выполнение приведенного условия возможно только при условии, что $\mathbf{n}$ – безвихревое векторное поле $\mathbf{n} = \operatorname{grad} f$. Так как $\mathbf{n}$ – единичное векторное поле, то его потенциал должен удовлетворять уравнению $|\nabla f| = 1$, известному как уравнение эйконала. Полный интеграл этого уравнения известен, поэтому нахождение решений этого уравнения не представляет затруднений.

Заметим, что полный интеграл уравнения эйконала (за вычетом аддитивной постоянной) есть $f(\mathbf{r}) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$, где $\mathbf{k}$ – единичный вектор.

Уравнение (1.8) при условии $\operatorname{rot}\mathbf{n} = \mathbf{0}$ существенно упрощается и может быть проинтегрировано. Полному интегралу уравнения эйконала отвечает равномерное пространственное напряженное состояние: вектор $\mathbf{n}$ не изменяется и совпадает с вектором $\mathbf{k}$, главные напряжения также постоянны. Ясно, что условию $\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n} = \mathbf{0}$ отвечают только пластические напряженные состояния сравнительно простой структуры.

Общий интеграл уравнения эйконала может быть получен из полного интеграла варьированием вектора $\mathbf{k}$: $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{r})$. Вводя углы ψ и ϑ, определяющие ориентацию вектора $\mathbf{k}(\mathbf{r})$:

$$k_1 = \sin\psi\sin\vartheta, \quad k_2 = -\cos\psi\sin\vartheta, \quad k_3 = \cos\vartheta$$

и произвольную зависимость $\vartheta = \omega(\psi)$, для определения $\psi = \psi(\mathbf{r})$ можно получить уравнение

$$\frac{d\omega}{d\psi} = \frac{x_1 + \operatorname{tg}\psi x_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\psi x_3 + (x_2 - \operatorname{tg}\psi x_1)\operatorname{ctg}\omega}}$$

Исследуем уравнение (1.8) в предположении, что $\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ всюду в пластической зоне.

Умножая обе части уравнения (1.6) скалярно на $\mathbf{n}$, $\operatorname{rot}\mathbf{n}$ и $\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}$, получим

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}\Sigma + \operatorname{div}\mathbf{n} = 0 \tag{1.9}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}\Sigma + (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{n})\operatorname{div}\mathbf{n} = 0 \tag{1.10}$$

$$(\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}) \cdot \operatorname{grad}\Sigma - |\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}|^2 = 0 \tag{1.11}$$

Уравнения (1.9)–(1.11) позволяют найти траектории, вдоль которых главное напряжение σ_3 не изменяется.

Пусть $\mathbf{s}$ – орт, направленный вдоль вектора $\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}$. В плоскости, образованной векторами $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$, рассмотрим орт $\mathbf{t}$, наклоненный к $\mathbf{s}$ под некоторым углом α: $\mathbf{t} = \cos\alpha\mathbf{s} + \sin\alpha\mathbf{n}$.

Умножив уравнение (1.9) на $\sin\alpha$, а уравнение (1.11) – на $\cos\alpha$ и сложив, находим

$$\mathbf{t} \cdot \nabla\Sigma + \sin\alpha\operatorname{div}\mathbf{n} - \cos\alpha|\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}| = 0$$

Следовательно, если траектория касается направлений $\mathbf{t}$, составляющих угол α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}|}{\operatorname{div}\mathbf{n}}$$

с направлением $\mathbf{s}$, то вдоль этой траектории

$$\mathbf{t} \cdot \nabla\sigma_3 = 0 \tag{1.12}$$

т.е. главное напряжение σ_3 не изменяется вдоль рассматриваемой траектории.

В плоскости, образованной векторами $\mathbf{s}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{n}$, рассмотрим орт $\mathbf{h}$, наклоненный к $\mathbf{s}$ под некоторым углом β:

$$\mathbf{h} = \cos\beta\mathbf{s} + \sin\beta\frac{\operatorname{rot}\mathbf{n}}{|\operatorname{rot}\mathbf{n}|}$$

Умножив уравнение (1.10) на $\sin\beta$, а уравнение (1.11) – на $\cos\beta$ и сложив, находим

$$\mathbf{h} \cdot \nabla\Sigma + \sin\beta\operatorname{div}n\frac{\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{n}}{|\operatorname{rot}\mathbf{n}|} - \cos\beta|\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{n}| = 0$$

Следовательно, если траектория касается направлений $\mathbf{h}$, составляющих угол β:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma|\operatorname{rot}\mathbf{n}|(\operatorname{div}n)^{-1}$$

где γ – угол между векторами $\mathrm{rot}\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}$, с направлением $\mathbf{s}$, то вдоль этой траектории

$$\mathbf{h}\cdot\nabla\sigma_3 = 0 \tag{1.13}$$

что означает, что главное напряжение σ_3 не изменяется вдоль рассматриваемой траектории.

Можно указать еще одно направление $\mathbf{p}$, производная от σ_3 вдоль которого равна нулю: если ориентировать вектор $\mathbf{p}$ ортогонально векторам $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$ так, что

$$\mathbf{p} = \mathbf{s}\times\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{n}}{|\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{n}|}\times\mathbf{n}$$

то с помощью уравнений (1.9), (1.10) можно найти, что

$$\mathbf{p}\cdot\nabla\sigma_3 = 0 \tag{1.14}$$

Таким образом, если $\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$ и $\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n}\neq 0$, то через каждую точку зоны пластического течения можно провести три различных траектории (касающиеся трех некомпланарных направлений $\mathbf{t}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{p}$), вдоль которых наибольшее главное напряжение σ_3 не изменяется. Но это означает, что $\nabla\sigma_3 = \mathbf{0}$ всюду в пластической зоне и, следовательно, все главные напряжения постоянны. Но тогда уравнение (1.8) приобретает вид

$$\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathrm{div}\mathbf{n}) \tag{1.15}$$

откуда сразу же следует, что $\nabla\cdot\mathbf{n} = 0$ и $\mathrm{rot}\mathbf{n} = \mathbf{0}$, это противоречит предположению $\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$, следовательно, никаких решений уравнения (1.8) при одновременном выполнении условий $\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$ и $\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n}\neq 0$ получить нельзя.

Поэтому наибольший интерес представляет тот случай, когда $\mathbf{n}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{n} = 0$ и $\mathrm{rot}\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$. В этом случае, который будет в деталях рассмотрен ниже, имеется лишь два направления (поскольку ориентации $\mathbf{h}$ и $\mathbf{p}$ совпадают), вдоль которых главное напряжение σ_3 не изменяется.

Обратимся к определяющим соотношениям теории пластического течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска так, что третье главное напряжение является максимальным: $\sigma_3-\sigma_1 = 2k$, $\sigma_3-\sigma_2 = 2k$. Обозначая через $d\varepsilon_j^P$ собственные значения тензора приращения пластической деформации, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения представим в виде

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda_1,\quad d\varepsilon_2^P = d\lambda_2,\quad d\varepsilon_3^P = -d\lambda_1-d\lambda_2 \tag{1.16}$$

где $d\lambda_\beta$ – неопределенные множители теории идеальной пластичности.

Если через $d\varepsilon_j^E$ обозначить приращение главного упругого удлинения ε_j^E, то на основании определяющего закона упругости находим

$$d\varepsilon_j^P - d\varepsilon/3 = ds_j/(2G) \tag{1.17}$$

где $d\varepsilon = d\varepsilon_1^E + d\varepsilon_2^E + d\varepsilon_3^E$, ds_j – приращение главного значения s_j девиатора тензора напряжений, G – упругий модуль сдвига.

Так как при нагружении вдоль ребра призмы Треска

$$ds_1 = ds_2 = ds_3 = 0 \tag{1.18}$$

то соотношения (1.17) приводят к

$$d\varepsilon_j^E - d\varepsilon/3 = 0 \tag{1.19}$$

Далее, замечая, что

$$d\varepsilon = \frac{d(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{3K} = \frac{d\sigma_3}{K}$$

где $d\sigma_j$ – приращения главных напряжений σ_j, K – объемный модуль упругости, и вводя обозначение

$$d\varepsilon_j = d\varepsilon_j^E + d\varepsilon_j^P \tag{1.20}$$

получаем полные соотношения в приращениях

$$d\varepsilon_1 - \frac{d\sigma_3}{3K} = d\lambda_1, \quad d\varepsilon_2 - \frac{d\sigma_3}{3K} = d\lambda_2, \quad d\varepsilon_3 - \frac{d\sigma_3}{3K} = -d\lambda_1 - d\lambda_2 \tag{1.21}$$

устанавливающие единственное соотношение, связывающее приращения $d\varepsilon_j$ и $d\sigma_j$:

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = d\sigma_3/K \tag{1.22}$$

При использовании этих соотношений не следует забывать о точном определении величин $d\varepsilon_j$, $d\varepsilon_j^E$, $d\varepsilon_j^P$ и $d\sigma_j$ и о том, что $d\varepsilon_j$, вообще говоря, не являются приращениями главных полных деформаций, а используются лишь как обозначения для суммы (1.20).

Уравнение (1.22) может быть проинтегрировано вдоль траектории нагружения. Предполагая, что напряжения и упругие деформации изменяются непрерывно при переходе элемента тела в состояние текучести, и актуальное напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, находим

$$\sigma_3 = \frac{4}{3}k + K(\varepsilon_1^E + \varepsilon_2^E + \varepsilon_3^E) \tag{1.23}$$

и, поскольку изменение объема – идеально обратимая часть деформации

$$\sigma_3 = \frac{4}{3}k + K(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \tag{1.24}$$

Если пренебрегать упругой составляющей деформации, то согласно (1.23) разность $\sigma_3 - \frac{4}{3}k$ становится неопределенным выражением типа $\infty \cdot 0$.

2. Расслоенные пластические поля напряжений. Поле напряжений в области G назовем расслоенным (или слоистым), если существует семейство поверхностей S, заполняющее область G, такое, что векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства S совпадает с полем $\mathbf{n}$ собственных векторов тензора напряжений.

Для того чтобы векторное поле $\mathbf{n}$ было расслоенным в области G, необходимо и достаточно, чтобы всюду в этой области выполнялось следующее соотношение:

$$\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{n} = 0 \tag{2.1}$$

Здесь опускаются детали вывода этого условия, но заметим, что оно выражает также тот факт, что дифференциальная форма $n_1dx_1 + n_2dx_2 + n_3dx_3$ после умножения на интегрирующий множитель μ превращается в полный дифференциал (см., например, [12, 13], с. 366–368): $\mu(n_1dx_1 + n_2dx_2 + n_3dx_3) = d\Psi$.

Кроме того, можно утверждать, что если векторное поле **n** не является расслоенным, то его можно "подправить" безвихревым векторным полем $\nabla\Phi$ так, что условие (2.1) будет выполняться для поля $\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \nabla\Phi$ и, следовательно, векторное поле **n** всегда можно представить в виде суммы безвихревого $\nabla\Phi$ и расслоенного (и притом вихревого, т.е. с ненулевым вихрем) векторного поля $\mathbf{n}'$:[1]

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}' + \nabla\Phi \tag{2.2}$$

Поскольку безвихревое векторное поле заведомо является расслоенным, то из приведенного рассуждения следует, что произвольное единичное векторное поле всегда можно представить в виде суммы двух расслоенных полей, первое из которых вихревое, а второе – безвихревое.

Как следует из результатов, приведенных в *п.* 1, единичное векторное поле **n**, удовлетворяющее уравнению (1.8), может быть либо безвихревым расслоенным, либо вихревым расслоенным, т.е. векторное поле **n** представляется либо только первым, либо только вторым слагаемыми в (2.2).

Расслоенность векторного поля **n** и его ненулевая завихренность гарантируют исключение всех вырожденных случаев, рассмотренных в *п.* 1.

При выполнении условия (2.1) слои поля **n**, т.е. поверхности семейства S, образуются векторными линиями поля rot**n** следующим образом: сначала выбирается некоторая поверхность S так, чтобы поле **n** касалось ее в каждой точке, и на поверхности S строится однопараметрическое семейство ортогональных к **n** траекторий, затем из каждой точки ортогональной траектории выпускаются векторные линии поля rot**n** и составляется слой поля **n**.

Итак, для невырожденного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, поле собственных векторов тензора напряжений с наибольшим (или наименьшим) собственным значением должно удовлетворять уравнениям:

$$\operatorname{rot}\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1 \tag{2.3}$$

В силу условия (2.1) векторы **n**, rot**n**, $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n}$ взаимно ортогональны, и уравнения (1.9)–(1.11) приобретают следующий вид:

$$\mathbf{n}\cdot\nabla\Sigma + \nabla\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{2.4}$$

$$(\nabla\times\mathbf{n})\cdot\nabla\Sigma = 0 \tag{2.5}$$

$$\mathbf{s}\cdot\nabla\Sigma - |\nabla\times\mathbf{n}| = 0 \tag{2.6}$$

где **s** – орт, направленный вдоль вектора $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{n}$. Напомним, что для расслоенного поля напряжений направления; rot**n** и **s** – характеристические, ориентации векторов rot**n** и **h** совпадают.

На основании (2.5) заключаем, что для вихревого расслоенного поля напряжений, соответствующего ребру призмы Треска, величина σ_3 не изменяется вдоль векторной линии вихря вектора **n**.

Учитывая (1.24), можно сделать также вывод о том, что относительное изменение объема элементов, составляющих векторную линию rot**n**, одно и то же.

[1] Это утверждение следует из того факта, что дифференциальная форма $n_1dx_1 + n_2dx_2 + n_3dx_3$ всегда может быть приведена к каноническому виду $n_1dx_1 + n_2dx_2 + n_3dx_3 = d\Phi + \mu^{-1}d\Psi$.

Существует еще только одна траектория, касающаяся вектора $\mathbf{t}$, вдоль которой величина σ_3 не изменяется (см. (1.12)). Вектор $\mathbf{t}$ ортогонален $\mathrm{rot}\mathbf{n}$ и составляет с вектором $\mathbf{s}$ угол α:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|\mathrm{rot}\mathbf{n}|}{\mathrm{div}\mathbf{n}}$$

Таким образом, в случае расслоенного поля напряжений через каждую точку зоны пластического течения проходят ровно две ортогональные друг другу траектории, вдоль которых величина главного напряжения σ_3 не изменяется. Ясно, что $\nabla\sigma_3 \times (\mathbf{h} \times \mathbf{t}) = \mathbf{0}$, поэтому вместо системы (2.4)–(2.6) удобнее рассматривать соответствующую систему в проекциях на оси ортогонального триэдра $\mathbf{h}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{h} \times \mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} \cdot \nabla\sigma_3 = 0, \quad \mathbf{h} \cdot \nabla\sigma_3 = 0, \quad |\nabla\sigma_3| \pm 2k\frac{\nabla \cdot \mathbf{n}}{\cos\alpha} = 0 \qquad (2.7)$$

Анализируя эту систему, заключаем, что вектор $\nabla\Sigma$ располагается в плоскости, ортогональной вектору $\mathrm{rot}\mathbf{n}$ и составляет с главным направлением $\mathbf{n}$ угол α. Несложные вычисления показывают также, что

$$|\nabla\sigma_3| = 2k\sqrt{(\mathrm{div}\mathbf{n})^2 + |\mathrm{rot}\mathbf{n}|^2} \qquad (2.8)$$

т.е. распределение σ_3, если поле $\mathbf{n}$ известно, может быть найдено интегрированием уравнения эйконала.

Уравнения равновесия жесткопластического тела в случае плоской деформации имеют вид [4]:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2k\left(\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2k\left(\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right) = 0 \qquad (2.9)$$

где $p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$, θ – угол наклона главного направления, соответствующего наибольшему собственному значению σ_1, к оси x_1. Как известно, если тело подвергается плоскому деформированию, то напряженное состояние соответствует грани призмы Треска, а не ребру. Тем не менее, если ввести обозначение $\Sigma = p/(2k)$ и плоское векторное поле n с компонентами $n_1 = \cos\theta$, $n_2 = \sin\theta$, то уравнения (2.9) приводятся к двумерному уравнению (1.5). Следует отметить, что любое плоское векторное поле в трехмерном пространстве будет расслоенным. Поэтому поле напряжений, возникающее при плоской деформации тела, как частный случай входит в рассматриваемый класс полей напряжений.

3. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений. Векторное уравнение (1.5) имеет инвариантную форму. Преобразуем его к криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 (см., например, [14]). Ковариантные компоненты поля $\mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ равны

$$(\mathrm{div}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}))_l = g^{-1/2} g_{kl}\frac{\partial(g^{1/2}n^k n^m)}{\partial\xi^m} + n^r n^s[rs, l] \quad (l = 1, 2, 3) \qquad (3.1)$$

где g_{ij} – компоненты метрического тензора, $g = \det\|g_{ij}\|$, $[rs, l]$ – символы Кристоффеля первого рода. Через n^m обозначены контравариантные компоненты векторного поля $\mathbf{n}$.

Используя формулу (3.1), представим уравнение (1.5) в ковариантной форме:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi^l} + g^{-1/2} g_{kl}\frac{\partial}{\partial\xi^m}(g^{1/2}n^k n^m) + n^r n^s[rs, l] = 0 \qquad (3.2)$$

Воспользуемся расслоенностью векторного поля **n** и выберем криволинейные координаты ξ^m специальным образом: координатные поверхности $\xi^3 = \text{const}$ есть слои поля **n**, а поверхности $\xi^1 = \text{const}$ и $\xi^2 = \text{const}$ – интегральные поверхности поля **n** (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых векторного поля **n**). Строго регламентированным, таким образом, является лишь выбор координатных поверхностей $\xi^3 = \text{const}$. Остальные координатные поверхности могут быть выбраны с известной долей произвола.

Здесь необходимо отметить, что возможность до известной степени произвольно выбирать координатные поверхности $\xi^1 = \text{const}$ и $\xi^2 = \text{const}$ позволяет констатировать, что криволинейная сетка ξ^1, ξ^2, ξ^3, вообще говоря, отличается от ортогональной изостатической сетки. Однако все три координатные линии системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 являются изостатами, правда координатные линии, соответствующие координатам ξ^1, ξ^2, могут не быть ортогональными друг другу. Это обусловлено тем, что в силу $\sigma_1 = \sigma_2$ любое направление на слое $\xi^3 = \text{const}$ является главным и, следовательно, любая траектория на этом слое будет изостатой. Поэтому выбор тех или иных направлений на слое $\xi^3 = \text{const}$ в качестве координатных диктуется прежде всего тем, чтобы в результате получалось бы такая локальная система трех ориентаций, для которой был бы осуществим подбор криволинейных координат с локальным базисом, ориентированным точно так же.

Ортогональная изостатическая криволинейная координатная сетка (т.е. сетка, координатные линии которой касаются трех взаимно ортогональных главных осей тензора напряжений) даже для расслоенного поля напряжений существует далеко не всегда. Если ортогональные изостатические координаты все же можно ввести, то поле напряжений необходимо является расслоенным. Обратное утверждение, конечно же, не является справедливым.

Дополнительно заметим, что поверхности $\xi^1 = \text{const}$ и $\xi^2 = \text{const}$ – характеристические для уравнения (1.5).

При таком выборе криволинейных координат имеем $g_{13} = 0$, $g_{23} = 0$, $n^1 = 0$, $n^2 = 0$, что позволяет существенно упростить уравнения (3.2):

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi^1} - \frac{1}{2}(n^3)^2\frac{\partial g_{33}}{\partial\xi^1} = 0, \quad \frac{\partial\Sigma}{\partial\xi^2} - \frac{1}{2}(n^3)^2\frac{\partial g_{33}}{\partial\xi^2} = 0$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi^3} + g_{33}\frac{\partial(n^3)^2}{\partial\xi^3} + \frac{1}{2}g_{33}(n^3)^2\frac{\partial}{\partial\xi^3}\ln(g_{33}g) = 0$$

Так как $(n^3)^2 = 1/g_{33}$, то последние уравнения эквивалентны следующим:

$$\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33} + \frac{1}{2}\ln g\right) = 0 \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.3) интегрируются вдоль линий главных напряжений. Инвариант $I_1 = \Sigma - 1/2\ln g_{33}$ сохраняет свое значение на каждом из слоев поля **n**. Инвариант $I_2 = \Sigma - 1/2\ln g_{33} + 1/2\ln g$ не изменяется вдоль векторной линии поля **n**. Таким образом, если напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, то поле главных направлений, определяющих ориентацию **n**, необходимо является расслоенным и, следовательно, в новых специальным образом подобранных координатах уравнения равновесия приводятся к трем интегрируемым соотношениям (3.3).

Необходимое и достаточное условие интегрируемости системы (3.3) состоит, как нетрудно заметить, в возможности разложения детерминанта g на произведение двух положительных функций:

$$g = G_1(\xi^3)G_2(\xi^1, \xi^2) \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) является одновременно и общим интегралом уравнений (2.3): если задаться криволинейными координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 так, чтобы $g_{13} = 0$ и $g_{23} = 0$ и выполнялось (3.4), то векторное поле $\mathbf{n} = \mathrm{grad}\xi^3/|\mathrm{grad}\xi^3|$, будет тождественно удовлетворять уравнениям (2.3).

В качестве примеров расслоенного поля напряжений можно привести осесимметричную задачу и задачу о плоской деформации. Действительно, любое осесимметричное или плоское векторное поле является расслоенным. Если ввести цилиндрические координаты r, φ, z, то слоями осесимметричного поля $\mathbf{n}$ будут поверхности, образованные вращением вокруг оси симметричных полю $\mathbf{n}$ траекторий, расположенных в плоскости $\varphi = 0$. Слоями плоского векторного поля являются цилиндрические поверхности над ортогональными линиями поля $\mathbf{n}$.

Ясно также, что если поле напряжений допускает ортогональную изостатическую координатную сетку ξ^1, ξ^2, ξ^3, то оно является расслоенным и соотношения (3.3) следует рассматривать как интегрируемые соотношения вдоль взаимно ортогональных линий главных напряжений.

Отметим, что пространственная задача для жесткопластической среды с критерием текучести Мизеса исследовалась [15] в координатной сетке линий главных напряжений. Осесимметричная жесткопластическая задача также анализировалась при помощи криволинейной сетки линий главных напряжений в [16–18].

Инварианты пространственных уравнений теории пластичности были получены в работе [19]. В этой же работе была установлена связь между преобразованием области пластического течения с помощью координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и каноническими преобразованиями, изучавшимися в свое время Пуанкаре [20, 21] (см. также [12, 22]). Канонические преобразования можно эффективно анализировать с помощью аппарата производящих функций. Уравнения для производящих функций, которые подлежат определению в плоских и осесимметричных задачах теории пластичности, были получены и исследованы в [23, 19].

4. Классы пространственных задач с расслоенными полями напряжений. Выше было показано, что напряженные состояния, соответствующие ребру призмы Треска, необходимо имеют расслоенные поля главных направлений напряжений, которые отвечают наибольшим (или наименьшим) главным напряжениям. Ниже указываются достаточные признаки того, что расслоенное поле напряжений, соответствующее ребру призмы Треска, действительно может реализоваться в том или ином состоянии равновесия твердого тела.

Рассмотрим тело Ω, часть границы A которого свободна, или на нее действует нормальная поверхностная нагрузка $\mathbf{p}(\mathbf{x})$.

В этом случае, как известно, "физическая задача Коши", если ограничиться только напряженными состояниями, соответствующими ребру призмы Треска,[2] приводится к двум математическим задачам Коши с начальными данными на поверхности A ($\mathbf{v}$ – единичный вектор нормали к поверхности A): *(1)* $\mathbf{n} = \mathbf{v}$, $\Sigma = p/(\pm 2k)$ на поверхности A; *(2)* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\Sigma = 1 + p/(\pm 2k)$ на поверхности A. Здесь p – модуль вектора $\mathbf{p}$, т.е. $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \pm p(\mathbf{x})\mathbf{v}$.

Вторая из сформулированных математических задач Коши (если бы вектор $\mathbf{n}$ однозначно определялся на граничной поверхности) ставилась бы, как это следует из условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, на характеристической поверхности и, следовательно, ее формулировка была бы некорректной: решения такой задачи либо вообще бы не существовало, либо

[2] Что представляется естественным, так как в этом случае имеется меньше всего кинематических ограничений.

если бы решение существовало, то оно было бы заведомо неединственным. Однако физическое краевое условие не определяет однозначно вектор **n**, устанавливая лишь только то, что вектор **n** ориентирован произвольно в касательной к граничной поверхности плоскости. Подобная неопределенность ориентации вектора **n** на граничной поверхности часто позволяет использовать начальное условие именно второго типа при решении краевых задач математической теории пластичности. Подробное исследование этой ситуации имеется в [5], с. 242, 243. Однако даже в этом случае, если удается построить поле напряжений, соответствующее ребру призмы Треска, то, как следует из результатов, полученных в *п.* 3, поле напряжений необходимо будет расслоенным, сама граничная поверхность уже не будет слоем поля **n**.

Рассмотрим теперь первую из указанных задач Коши и покажем, что она разрешима, что и будет означать, что поле напряжений, примыкающее к поверхности A, соответствует ребру призмы Треска и является расслоенным, независимо от характера распределения нормальной поверхностной нагрузки $p = p(\mathbf{x})$. Однако прежде выделим еще один класс задач пространственного равновесия с соответствующими ребру призмы Треска расслоенными полями напряжений.

Пусть тело Ω симметрично относительно некоторой плоскости Π и подвергается действию симметричной поверхностной нагрузки так, что материал, расположенный в плоскости симметрии, переходит в состояние пластического течения. Плоскую область, являющуюся сечением тела Ω плоскостью Π, обозначим через A. В силу симметрии плоская область A будет слоем векторного поля **n**, имеющего ориентацию главного направления. Предположим, что в сечении тела рассматриваемой плоскостью касательные напряжения отсутствуют. Если через $\boldsymbol{\nu}$ обозначить единичную нормаль к A, имеющую направление поля **n**, а через $p(\mathbf{x})$ – абсолютную величину вектора напряжений на площадке с нормалью $\boldsymbol{\nu}$, то на поверхности A, если считать напряженное состояние соответствующим ребру призмы Треска, имеем следующее условие: $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$, $\Sigma = p/(\pm 2k)$. Это условие формально (фактически, не зная характера распределения $p = p(\mathbf{x})$) можно принять в качестве краевого и исследовать поле напряжений в пространственных областях, примыкающих к A.

Таким образом для **n** и Σ в каждом из рассматриваемых случаев имеем формально эквивалентные математические задачи Коши: в области, примыкающей к поверхности A, требуется определить единичное векторное поле **n** и скалярное поле Σ, удовлетворяющие уравнению (1.5) и начальным условиям $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$, $\Sigma = \Sigma_A(\mathbf{x})$ на поверхности A.

Оказывается, что всегда существуют векторное поле **n** и скалярное поле Σ, являющиеся решением сформированной задачи Коши, независимо от характера распределения $\Sigma_A(\mathbf{x})$, причем поле **n** будет расслоенным в некоторой области, примыкающей к поверхности A. Именно справедливо следующее утверждение.

В некоторой области D, примыкающей к аналитической поверхности A, существует единственное аналитическое решение задачи Коши для уравнения (1.5) с аналитическими начальными данными $\mathbf{n} = \boldsymbol{\nu}$, $\Sigma = \Sigma_A(\mathbf{x})$ на поверхности A ($\boldsymbol{\nu}$ – вектор единичной нормали к поверхности A), причем векторное поле **n** будет расслоенным в области D.

Докажем сформулированное утверждение. Параметризуем поверхность A при помощи аналитических функций $x_i = \lambda_i(\xi^1, \xi^2)$ ($i = 1, 2, 3$). Здесь ξ^1, ξ^2 – Гауссовы параметры. По крайней мере один из миноров второго порядка матрицы $\|\partial\lambda_i/\xi^\alpha\|$ ($i = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2$) должен быть отличен от нуля, иначе параметризуемый объект не будет двумерной поверхностью. Предположим, что

$$W = \det\left\|\partial\lambda_\alpha/\partial\xi^\beta\right\| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{4.1}$$

На множестве расслоенных полей **n** уравнение (1.5) в специальных криволинейных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3 эквивалентно уравнениям (3.3). Первые два уравнения системы (3.3) и начальные условия для функции Σ дают возможности найти компоненту g_{33} на поверхности A (C – постоянная):

$$g_{33}|_A = Ce^{2\Sigma_A(\xi^1,\xi^2)} \tag{4.2}$$

Пусть начальному слою A векторного поля $\mathbf{n}$ соответствует значение $\xi^3 = 0$. Этого всегда можно добиться преобразованием трансляции координаты ξ^3, относительно которого система уравнений (3.3) инвариантна. Так как $g|_A = a(\xi^1, \xi^2)g_{33}|_A$, где $a(\xi^1, \xi^2)$ – детерминант первой квадратичной формы поверхности A, то, учитывая равенство (4.2), получим

$$g|_A = Ca(\xi^1,\xi^2)e^{2\Sigma_A(\xi^1,\xi^2)} \tag{4.3}$$

Координатная система ξ^k такова, что g разлагается в виде произведения (3.4). Сравнивая (3.4) и (4.3) при $\xi^3 = 0$, получим, что $G_2(\xi^1, \xi^2) = CG_1^{-1}(0)a(\xi^1, \xi^2)e^{2\Sigma_A(\xi^1,\xi^2)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $G_1(\xi^3) = C_1^{-1}e^{2\xi^3}$, так как любая замена вида $\xi^3 = \xi^3(\xi'^3)$ не изменяет слоев поля $\mathbf{n}$.

Таким образом, положив $CG_1^{-1}(0) = C_1$, имеем следующее равенство:

$$g = a(\xi^1,\xi^2)e^{(2\Sigma_A(\xi^1,\xi^2)+2\xi^3)} \tag{4.4}$$

Утверждение будет доказано, если доказать разрешимость следующей задачи Коши:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_1}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_2}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3} = 0\\
\frac{\partial f_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_1}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_2}{\partial\xi^3}+\frac{\partial f_3}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3} = 0\\
\left(\frac{\partial f_k}{\partial\xi^3}\frac{\partial f_k}{\partial\xi^3}\right)\left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_p}{\partial\xi^1}\right)\left(\frac{\partial f_r}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_r}{\partial\xi^2}\right)-\left(\frac{\partial f_s}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_s}{\partial\xi^2}\right)^2\right] = a(\xi^1,\xi^2)e^{(2\Sigma_A(\xi^1,\xi^2)+2\xi^3)}
\end{gathered} \tag{4.5}$$

с аналитическими начальными данными на плоскости $\xi^3 = 0$:

$$f_i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\big|_{\xi^3=0} = \lambda_i(\xi^1,\xi^2) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.6}$$

Тогда поверхности $\xi^3 = \mathrm{const}$ криволинейной системы координат $x_i = f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ($i = 1$, 2, 3) можно будет принять в качестве слое векторного поля $\mathbf{n}$, причем начальные условия на поверхности A также будут удовлетворены как для $\mathbf{n}$, так и для Σ.

Теорема Коши–Ковалевской (по поводу доказательства см., например, [24], [25]) приводит к заключению о разрешимости задачи Коши (4.5), (4.6), если доказать, что система уравнений (4.5) может быть приведена к нормальному по переменной ξ^3 виду. Для этого разрешим систему относительно частных производных $\partial f_i/\partial\xi^3$ ($i = 1, 2, 3$). Введем следующие обозначения:

$$\Delta_1 = \begin{Vmatrix}\dfrac{\partial f_2}{\partial\xi^1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial\xi^1}\\[2mm] \dfrac{\partial f_2}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial\xi^2}\end{Vmatrix},\quad \Delta_2 = \begin{Vmatrix}\dfrac{\partial f_3}{\partial\xi^1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\\[2mm] \dfrac{\partial f_3}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\xi^2}\end{Vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{Vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial\xi^1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\xi^1}\\[2mm] \dfrac{\partial f_1}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\end{Vmatrix}$$

Кроме того, обозначим через Z выражение, расположенное в квадратных скобках (4.5). После ряда алгебраических преобразований получим систему уравнений в частных производных (4.5) в нормальной по переменной ξ^3 форме

$$\partial f_i/\partial\xi^3 = \pm a^{1/2}Z^{-1/2}e^{(\Sigma_A+\xi^3)}\Delta_i(\Delta_k\Delta_k)^{-1/2} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{4.7}$$

Знак в уравнениях (4.7) выберем так, чтобы при возрастании переменной ξ^3 от нуля в сторону положительных значений точка $x_i = f_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ физического пространства двигалась от поверхности A внутрь тела Ω, если A – часть граничной поверхности тела.

Остается еще показать, что правые части в (4.7) аналитичны при $\xi^3 = 0$ для всех допустимых значений остальных аргументов ξ^1, ξ^2, $(\partial f_k)/(\partial\xi^\alpha)$.

На начальной плоскости $\xi^3 = 0$ имеем следующие равенства (см. (4.1), (4.3)): $\Delta_3|_{\xi^3=0} = W(\xi^1, \xi^2)$, $Z|_{\xi^3=0} = a(\xi^1, \xi^2)$. Так как для любой точки (ξ^1, ξ^2) справедливо $aW \neq 0$, то правые части системы (4.7) будут аналитическими функциями аргументов $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \partial f_k/\partial\xi^\alpha$ $(k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2)$ в окрестности любой точки

$$\xi^1 = \xi^1_{(0)}, \quad \xi^2 = \xi^2_{(0)}, \quad \xi^3 = 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial\xi^\alpha} = \left.\frac{\partial\lambda_k}{\partial\xi^\alpha}\right|_{\xi^1=\xi^1_{(0)},\ \xi^2=\xi^2_{(0)}} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2)$$

На основании теоремы Коши–Ковалевской можно сделать заключение о разрешимости задачи Коши (4.5), (4.6) и справедливости доказываемого утверждения.

Таким образом, для тела Ω, имеющего плоскость симметрии Π, подверженного действию симметричной поверхностной нагрузки, такой, что материал, расположенный в плоскости Π переходит в состояние пластического течения, не подвергаясь действию касательных напряжений, соответствующее ребру призмы Треска расслоенное поле напряжений является статически допустимым в пластической зоне, примыкающей к сечению тела плоскостью Π.

Внимательный анализ приведенного выше доказательства позволяет, практически не изменяя его, несколько обобщить формулировку утверждения о существовании соответствующего ребру призмы Треска расслоенного поля напряжений. Заключение о существовании соответствующего ребру призмы Треска расслоенного поля напряжений оказывается справедливым при следующих условиях: существует хотя бы одна аналитическая поверхность, в каждой точке которой нормаль имеет направление главной оси тензора напряжений, соответствующей главному напряжению, распределение которого на указанной поверхности аналитично. При этих условиях в некоторой области, примыкающей к поверхности, поле напряжений будет соответствовать ребру призмы Треска и необходимо будет расслоенным.

Заметим, что сформулированные условия должны иметь и важное практическое значение, поскольку они явно указывают на ситуации, когда напряженное состояние будет соответствовать ребру призмы Треска.

5. Канонические координаты пространственной, плоской и осесимметрической задачи. Существует связь между интегралами уравнений пластического равновесия (1.5) и отображениями пространственных областей, сохраняющими объем. Такие отображения будем называть каноническими. Более точно: отображение $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3)$ называется каноническим в области G, если оно взаимнооднозначно, непрерывно дифференцируемо, и объем любой подобласти B области G при отображении сохраняется.

Расслоенное статически допустимое поле напряжений в области G порождает каноническое отображение

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{5.1}$$

некоторой области пространства, арифметизированного переменными ω^s, на область пластического течения G. Заметим, что ω^s – специальные криволинейные координаты, определяемые ниже по векторному полю $\mathbf{n}$.

Действительно, выделим слой A векторного поля $\mathbf{n}$. Поскольку Гауссову параметризацию поверхности A можно выбирать в достаточной мере произвольно, то выберем ее таким образом, чтобы детерминант a первой квадратичной формы поверхности A принимал в точках поверхности заданные значения, равные $e^{-2\Sigma_A}$, где $\Sigma_A = \Sigma_A(x_1, x_2, x_3)$ – значения Σ на слое A.[3] Пусть ω^1, ω^2 – Гауссовы параметры поверхности A, удовлетворяющие указанному условию на детерминант a. После замены переменной $\omega^3 = e^{\xi^3}$ уравнения (4.5) приводятся к следующему виду ($k, r, p, s = 1, 2, 3$):

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3} = 0 \\
\frac{\partial f_1}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3} + \frac{\partial f_2}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3} + \frac{\partial f_3}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_3}{\partial\omega^3} = 0 \\
\left(\frac{\partial f_k}{\partial\omega^3}\frac{\partial f_k}{\partial\omega^3}\right)\left[\left(\frac{\partial f_p}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_p}{\partial\omega^1}\right)\left(\frac{\partial f_r}{\partial\omega^2}\frac{\partial f_r}{\partial\omega^2}\right) - \left(\frac{\partial f_s}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_s}{\partial\omega^2}\right)^2\right] = 1
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

Если через J обозначить определитель Якоби отображения (5.1), то последнее уравнение системы (5.2) эквивалентно уравнению $J^2 = 1$. Таким образом, приходим к заключению, что отображение (5.1) является каноническим.

Обратно, если отображение (5.1) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (5.2), то поверхности $\omega^3 = \text{const}$ можно принять в качестве слоев поля $\boldsymbol{n}$ и затем с помощью интегралов (3.3) восстановить поле напряжений.

Криволинейные координаты ω^1, ω^2, ω^3 будем называть каноническими координатами пространственной задачи теории пластичности. В канонических координатах инварианты I_1 и I_2 совпадают. Имеется три интегрируемых соотношения

$$
\frac{\partial}{\partial\omega^1}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\omega^2}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\omega^3}\left(\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}\right) = 0 \tag{5.3}
$$

Следовательно, разность $\Sigma - \frac{1}{2}\ln g_{33}$ является постоянной величиной всюду в области пластического течения.

В условиях плоского деформированного состояния в пределах пластической зоны компоненты тензора напряжений определяются соотношениями Леви:

$$
\sigma_{11} = p + k\cos 2\theta, \quad \sigma_{22} = p - k\cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = k\sin 2\theta \tag{5.4}
$$

где $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, θ – угол наклона главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему собственному значению тензора напряжений, к оси x_1.

Уравнения равновесия имеют вид (2.9). Каноническое отображение (5.1) следует искать в форме

$$
x_1 = f_1(\omega^1, \omega^3), \quad x_2 = f_2(\omega^1, \omega^3), \quad x_3 = \omega^2
$$

[3] Формальное обоснование этого факта опускается.

Естественно рассмотреть двумерное каноническое отображение, определяемое первыми двумя уравнениями. Ясно, что координатные линии, соответствующие криволинейным координатам ω^1, ω^3, есть взаимно ортогональные изостаты в плоскости течения.

Система (5.2) сводится к следующей системе:

$$\frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_2}{\partial\omega^3}-\frac{\partial f_2}{\partial\omega^1}\frac{\partial f_1}{\partial\omega^3} = \pm 1 \tag{5.5}$$

Введем производящую функцию $\Phi(x_1, \omega^1)$ плоского канонического отображения [22]:

$$x_2 = \frac{\partial\Phi(x_1, \omega^1)}{\partial x_1}, \quad \omega^3 = -\frac{\partial\Phi(x_1, \omega^1)}{\partial\omega^1} \tag{5.6}$$

Тогда первое уравнение системы (5.5) приводится к виду

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial(\omega^1)^2} = \left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial\omega^1}\right)^2-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial(\omega^1)^2}\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} \tag{5.7}$$

Второе уравнение системы (5.5) удовлетворяется тождественно в силу (5.6). Причем во втором уравнении системы (5.5) следует выбрать положительный знак.

Нелинейное уравнение (5.7) инвариантно относительно преобразования Лежандра: вводя тангенциальные координаты

$$x_1^* = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \quad \omega^1{}^* = \frac{\partial\Phi}{\partial\omega^1}, \quad \Phi^* = x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}+\omega^1\frac{\partial\Phi}{\partial\omega^1}-\Phi$$

имеем

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial(\omega^{1*})^2} = \left[\left(\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_1^*\omega^{1*}}\right)^2-\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_1^{*2}}\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial(\omega^{1*})^2}\right]\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial x_1^{*2}} \tag{5.8}$$

Действительно, в обозначениях Монжа

$$P = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}, \quad Q = \frac{\partial\Phi}{\partial\omega^1}, \quad R = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}, \quad S = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial\omega^1}, \quad T = \frac{\partial^2\Phi}{\partial(\omega^1)^2}$$

формулы, связывающие вторые частные производные, можно представить в виде

$$R = \frac{T^*}{R^*T^*-S^{*2}}, \quad S = \frac{-S^*}{R^*T^*-S^{*2}}, \quad T = \frac{R^*}{R^*T^*-S^{*2}}$$

Подстановка последних формул в уравнение (5.7) приводит к уравнению (5.8), форма которого неотличима от (5.7).

Уравнение (5.7) существенно нелинейно и нелинейность даже сильнее выражена, чем в классическом уравнении Монжа–Ампера. Несложные вычисления показывают, что дискриминант характеристического уравнения для (5.7) в точности равен $4[(1 + R^2)(S^2 - RT) - S^2]$. Поэтому для гиперболичности уравнения (5.7) достаточно выполнения неравенства $RT < 0$. Эллиптичность уравнения (5.7) гарантирована при выполнении условия $S^2 - RT < 0$.

Вводя функцию $U(x_1, \omega^1) = \partial\Phi/\partial x_1$, уравнение (5.7) можно преобразовать к квазилинейному уравнению, которое после преобразования Лежандра

$$X = \frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial \omega^1}, \quad Z = x_1\frac{\partial U}{\partial x_1} + \omega^1\frac{\partial U}{\partial \omega^1} - U$$

приводится к линейному уравнению второго порядка в частных производных относительно функции $Z = Z(X, Y)$:

$$(1 + X^2)\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2XY\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} - Y^2\frac{1 - X^2}{1 + X^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = 0 \tag{5.9}$$

Это уравнение, как нетрудно проверить, принадлежит к гиперболическому типу.

Преобразуем полученное уравнение к характеристическим переменным u, v и новой неизвестной функции $F(u, v)$ по формулам

$$u = \operatorname{arctg} X, \quad v = \frac{1}{2}\ln(1 + X^2) - \ln Y, \quad F = Z\cos u \tag{5.10}$$

В результате приходим к телеграфному уравнению

$$\partial^2 F/\partial u^2 - \partial^2 F/\partial v^2 + F = 0$$

Так как преобразование Лежандра инволютивно (см., например, [22]), т.е. повторное применение преобразования Лежандра дает исходную функцию, то можно выразить переменные x_1, x_2, ω^1 через переменные X, Y, Z:

$$x_1 = \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad x_2 = X\frac{\partial Z}{\partial X} + Y\frac{\partial Z}{\partial Y} - Z, \quad \omega^1 = \frac{\partial Z}{\partial Y}$$

Преобразуя последние формулы к переменным u, v и функции $F(u, v)$, получим

$$x_1 = \cos u\frac{\partial F}{\partial u} + \sin u\frac{\partial F}{\partial v} + F\sin u, \quad x_2 = \sin u\frac{F}{\partial u} - \cos u\frac{\partial F}{\partial v} - F\cos u \tag{5.11}$$

$$\omega^1 = -e^v\partial F/\partial v \tag{5.12}$$

Нетрудно заметить, что переменная u есть угол наклона первого главного направления тензора напряжений к оси x_1. Линии $\omega^1 = \text{const}$ есть траектории первого главного напряжения, поэтому

$$\operatorname{tg}\theta = \left.\frac{\partial^2\Phi(x_1, \omega^1)}{\partial x_1^2}\right|_{\omega^1 = \text{const}} \tag{5.13}$$

Распределение p вычисляется по формулам (опуская детали, сразу приведем результат [23]):

$$p = 2k\ln\sqrt{\left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega^1}{\partial x_2}\right)^2} + C \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega^1}{\partial x_1} &= \left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)}\right|^{-1}\left(\frac{\partial\omega^1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial\omega^1}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) \\ \frac{\partial\omega^1}{\partial x_2} &= \left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(u, v)}\right|^{-1}\left(\frac{\partial\omega^1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial\omega^1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

$|D(x_1, x_2)/D(u, v)|$ – якобиан отображения $(u, v) \to (x_1, x_2)$, C – константа интегрирования.

Поскольку $g_{11}g_{33} = 1$, то p вычисляется также в форме

$$p = -2k\ln\sqrt{\left(\frac{\partial\omega^3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega^3}{\partial x_2}\right)^2} + C \tag{5.16}$$

или в терминах производящей функции $\Phi(x_1, \Phi^1)$:

$$p = -k\ln\frac{T^2(1+R^2)}{R^2S^2} + C = -k\ln(\cos^2\theta S^2) + C \tag{5.17}$$

Иной метод линеаризации уравнений плоской деформации изложен в [2].

В случае осесимметричной задачи каноническое отображение (5.1) можно представить в форме:

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3)\cos\omega^2, \quad x_2 = f(\omega^1, \omega^3)\sin\omega^2, \quad x_3 = h(\omega^1, \omega^3) \tag{5.18}$$

При этом система (5.2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial f}{\partial\omega^1}\frac{\partial f}{\partial\omega^3} + \frac{\partial h}{\partial\omega^1}\frac{\partial h}{\partial\omega^3} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial\omega^1}\frac{\partial h}{\partial\omega^3} - \frac{\partial f}{\partial\omega^3}\frac{\partial h}{\partial\omega^1}\right)f = \pm 1 \tag{5.19}$$

Сделаем замену $f^2 = 2H$, тогда второе уравнение системы (5.19) позволяет утверждать, что трехмерное каноническое отображение (5.18) порождает плоское каноническое отображение

$$\frac{1}{2}x_1^2 = H(\omega^1, \omega^3), \quad x_2 = h(\omega^1, \omega^3) \tag{5.20}$$

Введем производящую функцию $\Omega(x_3, \omega^1)$ канонического отображения (5.20):

$$H = \frac{\partial\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3}, \quad \omega^3 = \frac{\partial\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial\omega^1} \tag{5.21}$$

Формулы (5.21) соответствуют положительному знаку во втором уравнении (5.19).

Второе уравнение системы (5.19) удовлетворяется тождественно в силу (5.21). Первое уравнение системы (5.19) позволяет получить следующее нелинейное уравнение относительно производящей функции:

$$2\frac{\partial\Omega}{\partial x_3}\frac{\partial^2\Omega}{\partial(\omega^1)^2} = \left[\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3\partial\omega^1}\right)^2 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial(\omega^1)^2}\right]\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2} \tag{5.22}$$

Уравнение (5.22) инвариантно относительно преобразования Ампера. Вводя переменные по формулам

$$x_3^* = x_3, \quad \omega^{1*} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\omega^1}, \quad \Omega^* = \Omega - \omega^1\frac{\partial\Omega}{\partial\omega^1}$$

в обозначениях Монжа

$$P = \frac{\partial\Omega}{\partial x_3}, \quad Q = \frac{\partial\Omega}{\partial\omega^1}, \quad R = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2}, \quad S = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3\partial\omega^1}, \quad T = \frac{\partial^2\Omega}{\partial(\omega^1)^2}$$

имеем

$$P = P^*, \quad Q = -\omega^{1*}, \quad \Omega = \Omega^* - \omega^{1*}Q^*, \quad R = \frac{R^*T^* - S^{*2}}{T^*}, \quad S = \frac{S^*}{T^*}, \quad T = \frac{-1}{T^*}$$

Подстановка этих формул в уравнение (5.22) приводит к уравнению

$$2\frac{\partial\Omega^*}{\partial x_3^*}\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial(\omega^{1*})^2} = \left[\left(\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x_3^*\partial\omega^{1*}}\right)^2 - \frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x_3^{*2}}\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial(\omega^{1*})^2}\right]\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial x_3^{*2}}$$

неотличимому по форме от (5.22).

Дополнительно заметим, что уравнение (5.7) также инвариантно относительно преобразования Ампера.

Дискриминант характеристического уравнения для (5.22) в точности равен $8[(R^2 + 2P)(S^2 - RT) - PS^2]$. Так как $2P = x_1^2 \geq 0$, то гиперболичность уравнения (5.22) гарантирована при выполнении условия $RT < 0$, а эллиптичность – при выполнении неравенства $S^2 - RT < 0$.

В плоскости x_1, x_3 интегральные кривые поля $\mathbf{n}$ определяются уравнением $1/2x_1^2 = \partial\Omega(x_3, \omega^1)/\partial x_3$ при фиксированном значении ω^1. Если θ – наклон траектории поля $\mathbf{n}$ к оси x_1, то

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A}{B}, \quad A = \sqrt{2\frac{\partial\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3}\bigg|_{\omega^1 = \text{cosnt}}}, \quad B = \frac{\partial^2\Omega(x_3, \omega^1)}{\partial x_3^2}\bigg|_{\omega^1 = \text{const}} \tag{5.23}$$

Кроме того, для канонических координат ω^s: $g \equiv 1$, следовательно, согласно формулам (3.3), $2\Sigma = \ln g_{33} + C$ и, вводя в это выражение производящую функцию, получим

$$2\Sigma = \ln\left\{\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3^2}\right)^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_3}\right)^{-1}\right]\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3\partial\omega^1}\right)^{-2}\right\} + C$$

или (ср. с (5.17)):

$$\frac{\sigma_3}{\pm k} = \ln\left[\sin^2\theta\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_3\partial\omega^1}\right)^2\right] - C = \ln(\sin^2\theta S^2) - C$$

Поэтому поля σ_3 и $\mathbf{n}$ определяются только через посредство производной $\partial\Omega/\partial x_3$.

Для функции $u = (2\partial\Omega/\partial x_3)^{1/2}$ имеем уравнение второго порядка типа Монжа–Ампера, являющееся следствием уравнения (5.22):

$$q^2\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}r - 2pqs + (p^2 + 1)t + \frac{u}{q^2} = 0 \tag{5.24}$$

где использованы обозначения Монжа

$$p = \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial\omega^1}, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x_3\partial\omega^1}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial(\omega^1)^2}$$

Дискриминант уравнения (5.24) равен единице, поэтому уравнение принадлежит к гиперболическому типу и может быть исследовано методом характеристик или на основе теории промежуточного интеграла [26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леви М.* К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 20–23.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
3. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
4. *Соколовский В.В.* Теория пластичности. М.: Высш. шк., 1969. 608 с.
5. *Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д.* Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
6. *Хаар А., Карман Т.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 41–56.
7. *Генки Г.* О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах // СБ. ст.: Теория пластичности. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1948. С. 80–101.
8. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
9. *Ишлинский А.Ю.* Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Учен. зап. МГУ. Механика. 1946. Вып. 117. С. 90–108.
10. *Ивлев Д.Д.* Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 1. С. 90–96.
11. *Ивлев Д.Д.* О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 124. № 3. С. 546–549.
12. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.: Гостехиздат, 1947. 356 с.
13. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
14. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 374 с.
15. *Jenne W.* Räumliche Spannungsverteilungen in festen Korpern bei plastischer Deformation // ZAMM. 1928. Bd. 8. H. 1. S. 18–44.
16. *Schield R.T.* On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 1955. V. 233. № 1193. P. 267–287.
17. *Lippman H.* Principal line theory of axially-symmetric plastic deformation // J. Mech. and Phys. Solid. 1962. V. 10. № 2. P. 111–122.
18. *Lippman H.* Statics and dynamics of axially-symmetric plastic flow // J. Mech. and Phys. Solids. 1965. V. 13. № 1. P. 29–39.
19. *Радаев Ю.Н.* О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 86–94.
20. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 9–445.
21. *Пуанкаре А.* Об одной геометрической теореме // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. С. 775–807.
22. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
23. *Радаев Ю.Н.* Предельное состояние шейки произвольного очертания в жесткопластическом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 69–75.
24. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
25. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
26. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. III. Ч. I. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 276 с.

Самара

Поступила в редакцию
2.08.2001