

УДК 531.8

© 2003 г. Д.В. БАЛАНДИН, Н.Н. БОЛОТНИК

### **УПРЕЖДАЮЩЕЕ УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ ПРОТИВОУДАРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ**

Исследуется эффект использования принципа упреждающего управления в системах противоударной изоляции. В соответствии с этим принципом отработка ударного воздействия противоударным изолятором начинается до того, как несущее тело (основание) защищаемого объекта подвергнется удару. Для модельной системы с одной степенью свободы в случае мгновенного удара проводится анализ предельных возможностей изолятора с упреждающим управлением. За критерий качества функционирования системы принимается максимум модуля смещения защищаемого объекта относительно основания при условии, что величина управляющей силы, приложенной к объекту, не превышает заданного значения. Установлено значительное преимущество изоляторов с упреждением перед изоляторами неупреждающего действия. Обсуждается реализация изолятора упреждающего действия на основе пассивного упругого элемента (пружины), отделяющего защищаемый объект от основания. Проведен модельный расчет параметров такого изолятора.

**1. Введение.** Удары – один из наиболее распространенных типов механических воздействий, которым подвергаются различные технические системы и сооружения в процессе их эксплуатации. Удары лежат в основе принципа действия многих механизмов и выполняют полезную функцию (например, в отбойных молотках, прессах или механизмах для забивания свай). С другой стороны, весьма часто удары возникают в нештатных или экстремальных ситуациях (дорожно-транспортные происшествия, аварийная посадка летательных аппаратов, производственные аварии, происшествия в спорте, боевые действия). В этом случае они наносят серьезный ущерб, приводя к нарушению функциональной целостности и даже к физическому разрушению оборудования и причиняя серьезные травмы людям (водителям и пассажирам транспортных средств, рабочему, в которого попал отлетевший осколок обрабатываемой детали, или хоккеисту, в которого попала летящая с большой скоростью шайба). При эксплуатации машин и механизмов ударного действия удары, производящие полезную работу, могут в то же самое время представлять серьезную опасность. Например, при работе с отбойным молотком удары, разрушающие горную породу или асфальтовое покрытие при производстве дорожных работ, передаются на корпус инструмента и могут серьезно травмировать суставы рук рабочего. При работе кузнечно-прессового оборудования удары могут вызвать существенные повреждения фундамента, на котором эта оборудование установлено. Разработка принципов и средств эффективной защиты от ударов представляет актуальную научно-техническую проблему большой социальной важности. Здесь уместно отметить, что, по некоторым статистическим данным, в промышленленно развитых странах (в том числе в России) травматизм стоит на третьем месте среди причин смерти (после сердечно-сосудистых и онкологических заболеваний). Значительная часть травм происходит в результате механических ударов.

Основным принципом защиты от ударов является противоударная изоляция (амортизация). В соответствии с этим принципом между несущим телом (основанием), непосредственно подвергающимся удару, и защищаемым объектом помещается промежуточная среда (противоударный изолятор), допускающая смещение защищаемого объекта относительно основания и снижающая максимальную величину силы, действующей на объект, по сравнению со случаем его жесткого крепления к основанию. Простейшие (пассивные) противоударные изоляторы представляют собой прослойки из материалов, обладающих упругой податливостью, или устройства из пружин и демпферов. В общем случае противоударный изолятор может представлять собой сложное управляемое устройство с измерительными датчиками, управляющими микропроцессорами и приводами.

Принцип противоударной изоляции известен давно и, по-видимому, используется с древнейших времен. Однако интенсивное всестороннее научное исследование и обоснование этого принципа было предпринято только в прошлом веке, в особенности в его второй половине. Это связано в значительной мере с интенсивным развитием авиационно-космической отрасли и разработкой средств защиты технических сооружений (прежде всего военного назначения) от ударных воздействий (сейсмического типа) при ядерных взрывах. Был обнаружен ряд интересных и, на первый взгляд, неожиданных фактов. Оказалось, что в некоторых случаях применение противоударных изоляторов приводит к противоположному эффекту: максимальная величина силы, действующей на объект, отделенный от основания изолирующей прослойкой, не уменьшается, а увеличивается по сравнению со случаем жесткого соединения объекта с основанием. Это явление имеет простое объяснение. Сила, действующая на защищаемый объект, пропорциональна его абсолютному ускорению. Время действия на основание внешней силы, производящей удар, хотя и мало, но конечно. Пусть масса объекта значительно меньше массы основания, что часто имеет место на практике. В этом случае влияние объекта на движение основания можно не учитывать. Пусть, кроме того, сила, производящая удар, постоянна и, следовательно, во время ее действия основание движется с постоянным ускорением. Если период упругих колебаний изолированного объекта окажется меньше продолжительности удара, то в некоторый момент абсолютное ускорение основания и относительное ускорение объекта совпадут по направлению, величина абсолютного ускорения объекта превысит ускорение основания и в результате сила, действующая на объект, превысит силу, которая действовала бы в случае его жесткого крепления к основанию. По-видимому, впервые внимание на этот факт обратил В.С. Анастасевич и проиллюстрировал его простым примером для системы с одной степенью свободы [1]. Более детально и, по-видимому, независимо от публикации В.С. Анастасевича это явление исследовал А.Ю. Иплинский [2, 3]. Он сформулировал и доказал теорему, связывающую принципиально достижимую эффективность изоляции с отношением хода изолятора (максимального смещения объекта относительно основания) к расстоянию, проходимому основанием при постоянном по направлению ускорении. Чем больше это отношение, тем выше эффективность изоляции. Отмеченные результаты привели к осознанию важности проблемы выбора оптимальных характеристик противоударных изоляторов.

В шестидесятые годы прошлого столетия возникло новое направление в исследовании проблемы противоударной и вибрационной изоляции, трактующее изоляторы как управляющие устройства, генерирующие силу между основанием и защищаемым объектом. Одним из основателей этого направления был М.З. Коловский, который начал широко использовать методы теории управления для исследования виброзащитных систем [4, 5]. В это же время возникла теория оптимальной противоударной защиты, базирующаяся на математической теории оптимального управления и методах математического программирования. Первая постановка задачи противоударной изоляции

как задачи оптимального управления принадлежит В.В. Гурецкому [6]. В этой задаче требовалось найти программное оптимальное управление (силу, действующую между объектом и основанием как функцию времени), минимизирующее максимум модуля отклонения защищаемого объекта относительно основания при условии, что сила, приложенная к объекту, не превышает по абсолютной величине заданного значения. Важно отметить, что такая постановка не налагает никаких ограничений на конструкцию изолятора и в принципе позволяет определять абсолютный минимум критерия качества изоляции, зависящий только от внешнего возмущения (силы, производящей удар, или ускорения основания во время удара), инерционных параметров объекта и максимально допустимого значения силы, действующей на этот объект. Данный подход положил начало концепции анализа предельных возможностей противоударной изоляции. Независимо от исследований В.В. Гурецкого, идея анализа предельных возможностей противоударной изоляции средствами теории оптимального управления была высказана и продвинута в США Е. Севиньм (E. Sevin) и У. Пилки (W.D. Pilkey) [7].

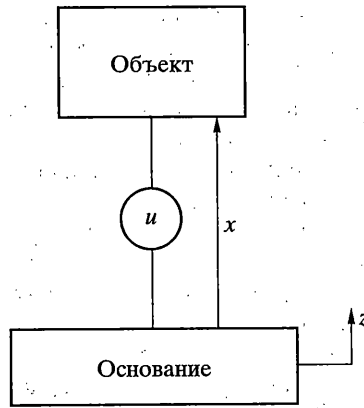
Насколько известно авторам, противоударные изоляторы, применяемые в настоящее время, начинают реагировать на удар только после того как он произошел. Фактически удар служит сигналом для включения противоударной системы. Вместе с тем в ряде случаев возможен достаточно точный прогноз времени начала ударного воздействия и его характеристик. В таких случаях отработку ударного воздействия можно начать заранее. В настоящей статье на простом примере системы с одной степенью свободы в случае мгновенного удара исследуются предельные возможности изоляторов упреждающего действия. Оценивается эффективность такого изолятора в сравнении с традиционным. Обсуждается реализация изолятора упреждающего действия на основе пассивного упругого элемента (пружины), отделяющего защищаемый объект от основания. Данная идея использует принцип упреждающего управления, известный в теории управления. В соответствии с этим принципом для формирования управляющего воздействия используется не только информация о текущем и предшествующих состояниях системы, но и прогноз ее поведения в будущем. При достаточно точном прогнозе это позволяет существенно улучшить качество управления.

Изложение общих принципов противоударной изоляции и описание конструкции основных типов противоударных изоляторов можно найти в справочниках [8, 9]. Читателю, желающему более детально познакомиться с историей и основными достижениями теории оптимальной противоударной изоляции, а также с новыми проблемами в этой области, рекомендуем обратиться к обзорной статье [10] или к монографии [11]. Обе эти публикации содержат обширный список литературы по данной теме, который в настоящее время, по-видимому, наиболее полон.

**2. Постановка задачи и некоторые известные результаты.** Рассмотрим простейшую модель противоударной изоляции объекта с одной степенью свободы. Защищаемый объект подвижно связан с несущим телом (основанием) посредством противоударного изолятора, трактуемого как управляющее устройство, генерирующее управляющую силу, действующую между основанием и объектом (фиг. 1). Основание и объект предполагаются абсолютно твердыми телами, которые могут двигаться поступательно вдоль одной прямой. В этом случае движение защищаемого объекта относительно основания описывается уравнением

$$m\ddot{x} + u = m\dot{v}, \quad v = -\dot{z} \quad (2.1)$$

где  $m$  – масса защищаемого объекта,  $x$  – его смещение относительно основания,  $z$  – смещение основания относительно неподвижной (инерциальной) системы координат,  $u$  – управляющая сила, приложенная к объекту. Абсолютное ускорение основания  $\dot{z}$  и,



Фиг. 1

следовательно, переменную  $u$  в (2.1) будем считать известными функциями времени, характеризующими ударное воздействие на основание.

Для системы (2.1) В.В. Гурецим поставлена следующая задача оптимального управления [6]:

**Задача 1.** Для системы (2.1) с заданной функцией  $u(t)$  и нулевыми начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.2)$$

найти оптимальное управление  $u_0(t)$  в классе кусочно-непрерывных функций, которое удовлетворяет ограничению

$$|u_0(t)| \leq U \quad (2.3)$$

где  $U$  – заданная положительная постоянная, минимизируя при этом максимум модуля отклонения объекта:

$$J(u_0) = \min_u J(u), \quad J(u) = \max_{t \in [0, \infty)} |x(t; u)| \quad (2.4)$$

Через  $x(t; u)$  в (2.4) обозначено решение задачи Коши (2.1), (2.2) при фиксированном управлении  $u = u(t)$ .

Функционал  $J(u)$  в (2.4) дает оценку свободному месту, необходимому для размещения защищаемого объекта на основании при управлении  $u$ . Неравенство (2.3) ограничивает абсолютную величину силы, действующей на объект со стороны изолятора. Значение  $U$  выбирается таким, чтобы управляющая сила не нарушила функциональную целостность объекта. Таким образом, задачу 1 можно рассматривать как задачу минимизации свободного места, необходимого для размещения объекта на основании при условии ненарушения его функциональной целостности.

Задача 1 получила название задачи о предельных возможностях противоударной изоляции, так как ее решение позволяет найти абсолютный минимум критерия качества  $J$ , не зависящий от конструктивной реализации изолятора.

Концепция анализа предельных возможностей противоударной изоляции на основе решения задачи 1 была независимо разработана Е. Севиным и У. Пилки [7]. Подробнее см. [7, 11, 12].

Приведем известное решение задачи 1 для случая мгновенного удара, в результате которого скорость основания  $\dot{z}$  скачком меняется на величину  $-u_0$ ; соответственно,

относительная скорость защищаемого объекта  $\dot{x}$  мгновенно становится равной  $v_0$ . Предполагается, что удар происходит в момент времени  $t = 0$ , совпадающий с моментом начала действия управления. В этом случае имеем  $v(t) = v_0\delta(t)$ , где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака и задача Коши (2.1), (2.2) становится эквивалентной следующей начальной задаче:

$$m\ddot{x} + u = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.5)$$

Без ограничения общности полагаем  $v_0 > 0$ .

Оптимальное управление в данном случае тождественно равно  $U$  на интервале времени  $0 \leq t \leq mv_0/U$ , в течение которого защищаемое тело тормозится от начальной скорости до полной остановки в положении  $x_* = mv_0^2/(2U)$ . При  $t > mv_0/U$  управление определяется неоднозначно; оно может быть любым, лишь бы выполнялись условия  $|u(t)| \leq U$  и  $|x(t; u)| \leq mv_0^2/(2U)$ . В частности можно положить  $u(t) \equiv 0$  при  $t > mv_0/U$ . Из изложенного следует, что

$$J(u_0) = mv_0^2/(2U) \quad (2.6)$$

Это решение получается из энергетического соотношения для системы (2.5). Из начальных условий при  $v_0 > 0$  и непрерывности функций  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$  вытекает, что функция  $x(t)$  монотонно возрастает до момента первого обращения скорости  $\dot{x}(t)$  в нуль. Обозначим через  $x_*$  точку, в которой скорость обращается в нуль, и запишем соотношение, вытекающее из теоремы о кинетической энергии для материальной точки, движение которой подчиняется уравнению и начальным условиям (2.5),

$$\frac{mv_0^2}{2} = \int_0^{x_*} u dx \quad (2.7)$$

Из (2.7) и неравенства  $u \leq U$  имеем

$$mv_0^2/2 \leq Ux_*, \quad x_* \geq mv_0^2/(2U)$$

причем при  $u \equiv U$  достигается равенство. Отсюда непосредственно вытекает соотношение (2.6).

Наряду с задачей о предельных возможностях противоударной изоляции рассматривается задача построения управления  $u$ , формируемого по принципу обратной связи на основе измерения текущих значений координаты  $x$  и скорости  $\dot{x}$  защищаемого объекта относительно основания. Один из распространенных приемов построения такого управления состоит в параметрической оптимизации заданного семейства функций  $u(x, \dot{x}, \alpha)$ , где  $\alpha$  – совокупность параметров, подлежащих определению. Параметры находятся в результате решения оптимизационной задачи, формулировка которой совпадает с формулировкой задачи 1 с единственным отличием, что оптимальное управление ищется не в классе кусочно-непрерывных функций времени, а среди функций заданного семейства. В этом случае задача оптимального управления сводится к задаче минимизации функции конечного числа переменных при наличии ограничений. В отличие от анализа предельных возможностей, такой подход, называемый иногда параметрическим синтезом противоударного изолятора, использует информацию о конструктивной реализации последнего, что находит косвенное отражение в заданной структуре зависимости управления от фазовых переменных  $x$  и  $\dot{x}$ . Значение кри-

терия качества противоударной защиты, обеспечиваемое изолятором, построенным путем параметрического синтеза, в общем случае превышает значение, отвечающее предельным возможностям. Близость этих значений свидетельствует об удачном выборе конструктивной схемы изолятора.

Приведем некоторые примеры оптимальных изоляторов, рассчитанных для мгновенного удара  $v(t) = v_0\delta(t)$  путем параметрического синтеза.

1. Упругий изолятор без демпфирования. Управляющая сила для такого изолятора имеет вид

$$u = c|x|^n \operatorname{sign} x, \quad n \geq 0 \quad (2.8)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости, подлежащий определению, а  $n$  – показатель степени характеристики упругого элемента (пружины).

В данном случае соотношения (2.5), определяющие движение защищаемого тела относительно основания, имеют вид

$$m\ddot{x} + c|x|^n \operatorname{sign} x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.9)$$

В этой системе сохраняется полная механическая энергия:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{c|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{mv_0^2}{2} \quad (2.10)$$

Из последнего соотношения находим

$$\max_t |x(t)| = \left[ \frac{(n+1)mv_0^2}{2c} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad \max_t |u(t)| = \left[ \frac{c^n(n+1)mv_0^2}{2} \right]^{\frac{n}{n+1}} \quad (2.11)$$

Как следует из (2.11), максимум модуля отклонения защищаемого объекта монотонно убывает, а максимум модуля управляющей силы монотонно возрастает с увеличением  $c$ . Отсюда вытекает, что при оптимальном коэффициенте жесткости  $c_0$ , минимизирующем критерий  $J$  (2.4), максимальное значение модуля управляющей силы должно равняться  $U$ . Соответственно получаем

$$c_0 = U \left[ \frac{2U}{(n+1)mv_0^2} \right]^n, \quad J(c_0) = \frac{mv_0^2}{2U}(n+1) \quad (2.12)$$

Сравнивая выражения (2.6) и (2.12), находим, что

$$\frac{J(c_0) - J(u_0)}{J(u_0)} = n \quad (2.13)$$

и, следовательно, относительное отличие минимума максимального модуля отклонения в случае упругого изолятора с характеристикой (2.8) от абсолютного минимума возрастает с ростом показателя  $n$ . В пределе при  $n \rightarrow 0$  изолятор с характеристикой (2.8) реализует предельные возможности изоляции.

2. Демпфирующий изолятор со степенной характеристикой без упругого элемента. Управляющая сила для такого изолятора имеет вид

$$u = k|\dot{x}|^r \operatorname{sign} \dot{x}, \quad r \geq 0 \quad (2.14)$$

где  $k$  – коэффициент демпфирования, подлежащий определению, а  $r$  – показатель степени характеристики демпфера.

Соотношения (2.5), определяющие движение защищаемого тела относительно основания, для такого изолятора имеют вид

$$m\ddot{x} + c|\dot{x}|^r \operatorname{sign} \dot{x} = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.15)$$

Перейдем в уравнении (2.15) от независимой переменной  $t$  к независимой переменной  $x$  и запишем дифференциальное уравнение для скорости

$$m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} + k\dot{x}^r = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.16)$$

Решение начальной задачи (2.16) приводит к выражениям

$$x = \frac{m(v_0^{2-r} - \dot{x}^{2-r})}{k(2-r)}, \quad \text{если } r \neq 2; \quad x = \frac{m}{k} \ln \frac{v_0}{\dot{x}}, \quad \text{если } r = 2 \quad (2.17)$$

Максимальное значение  $x$  достигается в момент обращения в нуль скорости  $\dot{x}$ . Из (2.17) вытекает, что если  $r \geq 2$ , то  $x \rightarrow \infty$  при  $\dot{x} \rightarrow 0$ . Таким образом, если показатель степени демпфирования больше или равен двум, то защищаемое тело уходит на бесконечность. При  $r < 2$  значение критерия  $J$ , определенного в (2.4), конечно

$$J(k) = \frac{mv_0^{2-r}}{k(2-r)} \quad (2.18)$$

Так как скорость движения объекта в рассматриваемом случае монотонно убывает, максимальная величина демпфирующей силы достигается в начальный момент времени и равна  $kv_0^r$ . Минимум функции  $J(k)$  при ограничении  $kv_0^r \leq U$  достигается при  $k = k_0 = U/v_0^r$  и определяется выражением

$$J(k_0) = \frac{mv_0^2}{U(2-r)} \quad (2.19)$$

Сравнивая выражения (2.6) и (2.19), получаем

$$\frac{J(k_0) - J(u_0)}{J(u_0)} = \frac{r}{2-r}, \quad r < 2 \quad (2.20)$$

Анализ выражения (2.20) показывает, что относительное отличие величины  $J(k_0)$  от  $J(u_0)$  возрастает с ростом  $r$  и в пределе при  $r \rightarrow 0$  изолятор с характеристикой (2.14) реализует предельные возможности противоударной защиты. Отметим, что зависимость демпфирующей силы от скорости согласно (2.14) при  $r = 0$  соответствует сухому трению.

3. Упругодемпфированный изолятор со степенной характеристикой. Управляющая сила такого изолятора определяется суммой выражений (2.8) и (2.14), т.е.

$$u = k|\dot{x}|^r \operatorname{sign} \dot{x} + c|\dot{x}|^n \operatorname{sign} \dot{x}, \quad r > 0, \quad n > 0 \quad (2.21)$$

Выражения (2.8) и (2.14) суть частные случаи (2.21) при  $k = 0$  и  $c = 0$  соответственно. Противоударные изоляторы с характеристикой (2.21) исследованы в [11–13]. Показано, что, наряду с изоляторами (2.8) при  $n = 0$ ,  $c = U$  и (2.14) при  $r = 0$ ,  $k = U$ , предельные

возможности противоударной защиты, определяемые соотношением (2.6), обеспечиваются еще в двух случаях:

$$r = 2, \quad n = 1, \quad k = \frac{U}{v_0^2}, \quad c = \frac{2U^2}{mv_0^2} \quad (2.22)$$

$$r = 0, \quad n = 0, \quad k + c = U \quad (2.23)$$

Случай (2.22) отвечает весьма распространенному типу изолятора с линейной пружиной и квадратичным демпфированием. Случай (2.23) отвечает демпферу с сухим трением, соединенному параллельно с "релейной" пружиной, сила упругого сопротивления которой постоянно по величине и направлена противоположно смещению от защищаемого объекта.

Отметим еще, что существуют изоляторы класса (2.21), которые обеспечивают качество защиты очень близкое к предельно возможному, хотя и не совпадающее с ним. Например, линейный изолятор ( $r = 1, n = 1$ ) с коэффициентами  $k = 0.931U/v_0$ ,  $c = 1.330U^2/(mv_0^2)$  обеспечивает значение функционала  $J = 0.521 mv_0^2/U$ , что всего на 4% превышает значение (2.6), отвечающее абсолютному минимуму [12, 13].

**3. Задача о предельных возможностях противоударной изоляции при допущении упреждающего управления.** Формулировка задачи 1 предполагает, что время начала управления фиксировано и совпадает со временем начала действия возмущения. В ряде случаев, однако, возможен прогноз действия возмущения и заблаговременное включение управляющего устройства, позволяющее улучшить качество противоударной защиты. Управление, включаемое до начала действия возмущения, часто называют упреждающим. Упреждающее управление противоударными изоляторами, по-видимому, можно использовать в сейсмозащитных системах и травмозащитных системах некоторых наземных и воздушных транспортных средств. Пусть, например, вертолет совершает аварийную посадку с неработающим двигателем. Для снижения тяжести возможных травм пилота и пассажиров в подобных ситуациях их сиденья целесообразно оборудовать активно управляемыми противоударными изоляторами. В описываемом случае вполне реально заранее рассчитать скорость и время удара вертолета о землю, основываясь на измерении высоты и скорости снижения. Осуществление подобной идеи реально и на автомобилях. Если по каким-то причинам на пути автомобиля возникло препятствие на расстоянии, исключающем эффективное торможение или объезд препятствия с целью предотвращения столкновения, единственным средством снижения тяжести травм водителя и пассажиров при ударе будет эффективная их изоляция от этого удара. В этом случае время удара и скорость столкновения также легко рассчитать заранее, зная расстояние до препятствия и скорость автомобиля относительно препятствия. Для реализации этой возможности автомобиль должен быть оборудован специальными датчиками, позволяющими измерять расстояние до объекта впереди автомобиля и скорость автомобиля относительно этого объекта. Кроме того, на автомобиле должен быть установлен микропроцессор, обрабатывающий эту информацию и формирующий управляющие сигналы для системы противоударной изоляции.

Сформулируем задачу о предельных возможностях противоударной изоляции при допущении упреждающего управления.

**Задача 2.** Пусть движение защищаемого объекта относительно основания на интервале времени  $[-t_0, \infty)$ , где  $t_0 \geq 0$ , описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + u = mv \quad (3.1)$$

где  $v = v(t)$  – заданная функция времени, тождественно равная нулю при  $-t_0 \leq t < 0$ , с нулевыми начальными условиями

$$x(-t_0) = 0, \quad \dot{x}(-t_0) = 0 \quad (3.2)$$



Требуется найти оптимальное значение величины  $t_0^*$  и кусочно-непрерывное оптимальное управление  $u_0(t)$ , которое определено при  $t \geq -t_0$ , удовлетворяет ограничению

$$|u_0(t)| \leq U \quad (3.3)$$

где  $U$  – заданная положительная постоянная, и минимизирует максимум модуля отклонения защищаемого объекта:

$$J(u_0, t_0^*) = \min_{u, t_0} J(u, t_0), \quad J(u, t_0) = \max_{t \in [-t_0, \infty)} |x(t; t_0, u)| \quad (3.4)$$

Через  $x(t; t_0, u)$  в (2.4) обозначено решение задачи Коши (3.1), (3.2) при фиксированном управлении  $u = u(t)$ .

Эта задача обобщает задачу 1, рассмотренную в предыдущем разделе. Нулевой момент времени здесь отождествляется с моментом начала действия внешнего возмущения, а  $t_0$  – с промежутком времени от момента получения информации о предстоящем возмущении до его ожидаемого начала.

Задача 2 в принципе может быть решена следующим образом. Сначала величина  $t_0$  фиксируется и решается вспомогательная задача оптимального управления на полубесконечном интервале времени с фиксированным началом. Эта задача может быть решена любым методом, пригодным для решения задачи 1. Вспомогательная задача отличается от задачи 1 только дополнительным предположением, что в течение времени  $t_0$  от начального момента внешнего возмущения тождественно равно нулю, что не исключается и формулировкой задачи 1. Описание специфических методов решения задачи 1 можно найти, например, в [5, 6, 7, 11, 12, 14]. В результате решения вспомогательной задачи будем иметь значение минимизируемого функционала  $J$ , определенного в (3.4), зависящее от скалярного параметра  $t_0$ . После этого производится минимизация по этому параметру.

В данном разделе будет решена задача 2 для случая мгновенного удара, описываемого импульсной функцией  $v(t) = v_0 \delta(t)$ . Для удобства введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{U}{m v_0} x, \quad t' = \frac{U}{m v_0} t, \quad t_0' = \frac{U}{m v_0} t_0, \quad u' = \frac{u}{U}, \quad J' = \frac{U}{m v_0^2} J \quad (3.5)$$

Перейдя в соотношениях (3.1)–(3.4), где  $v(t) = v_0 \delta(t)$ , к безразмерным переменным (3.5), получим соотношения того же вида, в которых параметры  $m$ ,  $v_0$  и  $U$  равны единице. В дальнейшем штрихи, обозначающие безразмерные переменные, опускаются.

Оптимальное управление  $u_0^{t_0}$ , доставляющее минимум функционалу  $J(u, t_0)$  (3.4) при фиксированном  $t_0$ , определяется следующими выражениями:

если  $t_0 \leq \sqrt{2} - 1$ , то

$$u_0^{t_0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } -t_0 \leq t < 1 - t_0 \\ 0, & \text{если } t \geq 1 - t_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

если  $\sqrt{2} - 1 \leq t_0 \leq 1$ , то

$$u_0^{t_0}(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } -t_0 \leq t < -(t_0 + t_1)/2 \\ 1, & \text{если } -(t_0 + t_1)/2 \leq t < 1 - t_1 \\ 0, & \text{если } t \geq 1 - t_1 \end{cases} \quad t_1 = \frac{1 + t_0^2}{2(t_0 + 1)} \quad (3.7)$$

если  $t_0 > 1$ , то

$$u_0^{t_0}(t) = \begin{cases} \xi(t), & \text{если } -t_0 \leq t < -1/2 \\ 1, & \text{если } -1/2 \leq t < 1/2 \\ 0, & \text{если } t \geq 1/2 \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $\xi(t)$  – произвольная кусочно-дифференцируемая функция, которая удовлетворяет ограничению  $|\dot{\xi}(t)| \leq 1$  в точках дифференцируемости и интегральному равенству

$$\int_{-t_0}^{-1/2} \xi(t) dt = -\frac{1}{16} \quad (3.9)$$

Управления (3.6)–(3.8) строятся при помощи графоаналитического метода, предложенного в [14]. Описание этого метода можно найти также в [11, 12]. Техническая процедура построения в рассматриваемом случае мгновенного удара несложна, но громоздка для изложения и, по этой причине, не приводится в настоящей статье.

Минимум максимума модуля смещения защищаемого объекта относительно основания при оптимальном управлении  $u_0^{t_0}$ , задаваемом соотношениями (3.6)–(3.9), определяется выражениями

$$J(u_0^{t_0}, t_0) = \begin{cases} 1/2 - t_0, & \text{если } t_0 \leq \sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{t_0^4 - 4t_0^3 - 1}{16(t_0 + 1)^2}, & \text{если } \sqrt{2} - 1 < t_0 \leq 1 \\ 1/16, & \text{если } t_0 > 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

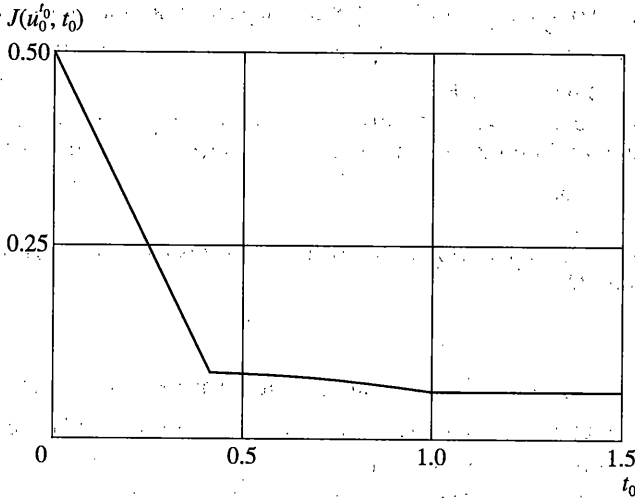
Зависимость величины  $J(u_0^{t_0}, t_0)$  от времени упреждения  $t_0$  представлена на фиг. 2.

На интервале  $0 \leq t_0 \leq 1$  максимум модуля смещения  $J(u_0^{t_0}, t_0)$  монотонно убывает от  $1/2$  при  $t_0 = 0$  (отсутствие упреждения) до  $1/16$  при  $t_0 = 1$ . При дальнейшем увеличении времени упреждения минимальное значение максимума модуля смещения объекта остается равным  $1/16$ . Следовательно, в безразмерных переменных (3.5) абсолютный минимум функционала (3.4) в классе упреждающих управлений равен  $1/16$ , а минимальное время упреждения, необходимое и достаточное для достижения этого минимума, равно  $t_0^* = 1$ .

Таким образом, управление (3.7) при  $t_0 = 1$  или (3.8) представляют оптимальное управление  $u_0(t)$ , искомое в задаче 2. В частности, оптимальное управление, отвечающее  $t_0 = t_0^* = 1$ , задается соотношениями

$$u_0(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leq t < -3/4 \\ 1, & \text{если } -3/4 \leq t < 1/2 \\ 0, & \text{если } t \geq 1/2 \end{cases} \quad (3.11)$$

Из соотношений (3.10) вытекает, что упреждение со временем  $t_0 > 1$  (в размерных переменных,  $t_0 > mv_0/U$ ) в принципе позволяет в 8 раз уменьшить максимум модуля от-



Фиг. 2

клонения объекта относительно основания по сравнению с управлением без упреждения, отвечающим  $t_0 = 0$ .

В исходных размерных переменных абсолютный минимум максимума модуля смещения объекта, теоретически достижимый в классе упреждающих управлений, определяется выражением

$$J(u_0, t_0^*) = m v_0^2 / (16U) \quad (3.12)$$

#### 4. Параметрический синтез пассивных упреждающих противоударных изоляторов.

Упреждающий противоударный изолятор можно реализовать на основе традиционных пассивных элементов, таких как пружины и демпферы. Упреждающее действие таких изоляторов можно обеспечить предварительным сжатием ("взводом") пружины и освобождением ее в определенное время до удара. Степень сжатия пружины и момент ее освобождения суть параметры настройки изолятора, которые определяются из условия его максимальной эффективности. Для иллюстрации этой идеи рассмотрим упругий изолятор без демпфирования с характеристикой (2.8). В этом случае движение защищаемого объекта относительно основания описывается уравнением

$$m\ddot{x} + c|x|^n \text{sign} x = 0, \quad n \geq 0 \quad (4.1)$$

В момент освобождения пружины  $t = -t_0$  (за  $t_0$  единиц времени до удара) защищаемое тело смещено в положение  $x = a$  (пружина взведена) и покоится. Соответственно имеем начальные условия

$$x(-t_0) = a, \quad \dot{x}(-t_0) = 0 \quad (4.2)$$

В момент удара ( $t = 0$ ) скорость защищаемого объекта относительно основания скачком меняется на величину  $v_0$ , что выражается дополнительным условием

$$\dot{x}(+0) = \dot{x}(-0) + v_0 \quad (4.3)$$

Здесь  $\dot{x}(-0)$  и  $\dot{x}(+0)$  обозначают скорости непосредственно перед ударом (предел слева функции  $\dot{x}(t)$  в точке  $t = 0$ ) и непосредственно после удара (предел справа функции  $\dot{x}(t)$  в точке  $t = 0$ ) соответственно.

За критерий качества изоляции, как и в предыдущих разделах, принимается максимум модуля смещения защищаемого объекта относительно основания,

$$J = J(t_0, a, c) = \max_{[t_0, \infty)} |x(t)| \quad (4.4)$$

при условии, что сила, действующая на объект со стороны изолятора, не превышает заданной величины  $U$ :

$$c|x(t)|^n \leq U \quad (4.5)$$

Определим оптимальные значения коэффициента жесткости пружины ( $c = c_0$ ), начальной координаты защищаемого объекта ( $a = a_0$ ) и времени упреждения ( $t_0 = t_0^*$ ), обеспечивающие минимум величины (4.4) при ограничении (4.5).

Для решения этой задачи воспользуемся энергетическими соотношениями. Энергия системы (4.1) сохраняется на интервалах времени  $[-t_0, 0)$  и  $(0, \infty)$ . На интервале  $[-t_0, 0)$  имеем

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{c|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{c|a|^{n+1}}{n+1}, \quad -t_0 \leq t < 0 \quad (4.6)$$

В момент удара кинетическая энергия защищаемого объекта изменяется на величину  $\Delta K = m(\dot{x}(-0) + v_0)^2/2 - m\dot{x}^2(-0)/2 = m(v_0^2/2 + \dot{x}(-0)v_0)$ , а потенциальная энергия пружины не изменяется. Таким образом, вследствие удара полная механическая энергия системы изменяется на величину  $\Delta K$ , и на интервале времени  $(0, \infty)$  выполняется соотношение

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{c|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{c|a|^{n+1}}{n+1} + m\left[\frac{v_0^2}{2} + \dot{x}(-0)v_0\right], \quad 0 < t < \infty \quad (4.7)$$

Из равенств (4.6) и (4.7) имеем

$$\max_{t \in [-t_0, 0)} |x(t)| = |a|, \quad |\dot{x}(t)| \leq \sqrt{\frac{2c|a|^{n+1}}{m(n+1)}}, \quad -t_0 \leq t < 0 \quad (4.8)$$

$$\max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| = \left[|a|^{n+1} + \frac{m(n+1)}{c} \left(\frac{v_0^2}{2} + \dot{x}(-0)v_0\right)\right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.9)$$

Будем при фиксированных значениях  $a$  и  $c$  выбирать время упреждения  $t_0$  (по которому однозначно определяется скорость в момент, предшествующий удару,  $\dot{x}(-0)$ ) так, чтобы максимум модуля отклонения объекта на интервале  $0 \leq t < \infty$  был минимальным. Из (4.8) и (4.9) вытекает, что такой выбор отвечает

$$\dot{x}(-0) = -\sqrt{\frac{2c|a|^{n+1}}{m(n+1)}} \quad (4.10)$$

$$\max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| = \left[|a|^{n+1} + \frac{m(n+1)}{c} \left(\frac{v_0^2}{2} - v_0 \sqrt{\frac{2c|a|^{n+1}}{m(n+1)}}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что если

$$c \geq \frac{(n+1)mv_0^2}{8|a|^{n+1}} \quad (4.12)$$

то  $\max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| \leq |a|$  и таким образом, в силу (4.8),  $\max_{t \in [-t_0, \infty)} |x(t)| = |a|$ . В противном слу-

чае выполняется неравенство  $\max_{t \in [-t_0, \infty)} |x(t)| > |a|$ . Следовательно, минимум величины

$\max_{t \in [-t_0, \infty)} |x(t)|$  при заданном  $a$  достигается при  $c$ , удовлетворяющих неравенству (4.12),

и равен  $|a|$ .

Найдем оптимальные значения  $c$  и  $|a|$  как решение системы неравенств

$$c \geq \frac{(n+1)mv_0^2}{8|a|^{n+1}}, \quad c|a|^n \leq U \quad (4.13)$$

соответствующее минимальному  $|a|$ . Первое из неравенств (4.13) повторяет (4.12), а второе выражает ограничение (4.5) с учетом того, что при выполнении первого неравенства максимум величины  $|x(t)|$  равен  $|a|$ . Искомое решение отвечает случаю, когда оба соотношения (4.13) выполнены со знаком равенства, и определяется выражениями

$$J(t_0, a_0, c_0) = |a_0| = \frac{(n+1)mv_0^2}{8U}, \quad c_0 = \left[ \frac{8}{(n+1)mv_0^2} \right]^n U^{n+1} \quad (4.14)$$

Подставляя вместо  $a$  и  $c$  в (4.10) соответствующие выражения (4.14), найдем оптимальное значение скорости объекта в момент, предшествующий удару

$$\dot{x}(-0) = -v_0/2 \quad (4.15)$$

Из (4.14) и (4.15) получаем, что при оптимальных параметрах кинетическая энергия системы в момент, предшествующий удару, равна потенциальной энергии изначально взведенной пружины  $(mx^2(-0))/2 = c_0|a_0|^{n+1}/(n+1) = mv_0^2/8$  и, следовательно, равна полной энергии системы на интервале движения до удара. Отсюда вытекает, что в момент удара защищаемое тело находится в положении  $x = 0$  и пружина недеформирована.

Вычислим оптимальное значение времени упреждения. Для этого воспользуемся соотношением (4.6), которое после подстановки  $c = c_0$ ,  $|a| = |a_0|$  в соответствии с (4.14) и введения новой переменной  $\xi$  можно представить в виде

$$\dot{\xi}^2 = \left[ \frac{4U}{(n+1)mv_0^2} \right]^2 (1 - |\xi|^{n+1}), \quad \xi = \frac{x}{|a_0|}, \quad -t_0 \leq t < 0 \quad (4.16)$$

Из начальных условий (4.2) вытекает, что  $\xi = \text{sign} a_0$  при  $t = -t_0$ . Выше показано, что при оптимальном выборе параметров  $x(0) = 0$  и  $\dot{x}(-0) = -v_0/2$  и, соответственно,  $\xi(0) = 0$ ,  $\dot{\xi}(-0) = -v_0/(2|a_0|)$ . Поэтому искомое время  $t_0 = t_0^*$  определяется как момент первого прохождения системы через нуль с отрицательной скоростью. Если  $a_0 > 0$ , то  $\xi(0) = 1$  и на участке движения из точки  $\xi = 1$  в точку  $\xi = 0$  производная  $\dot{\xi}$  отрицательна. В этом случае, интегрируя уравнение (4.16) по  $\xi$  от 1 до 0 и по  $t$  от  $-t_0$  до 0, находим

$$t_0 = \frac{(n+1)mv_0}{4U} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{n+1}}} = \frac{mv_0}{4U} B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\right) \quad (4.17)$$

где  $B(z, w)$  – бета-функция (интеграл Эйлера первого рода) [15].

Если  $a_0 < 0$ , то до первого прихода в нуль по координате с отрицательной скоростью система сначала пройдет участок от  $\xi = -1$  до  $\xi = 1$  с положительной скоростью и затем участок от  $\xi = 1$  до  $\xi = 0$  с отрицательной скоростью. В этом случае имеем

$$t_0 = \frac{3m v_0}{4U} B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\right) \quad (4.18)$$

что в три раза превышает значение (4.17). Следовательно, для минимизации времени упреждения пружина должна взводиться в положительном направлении.

Итак, оптимальные значения коэффициента жесткости пружины, начального смещения защищаемого объекта и времени упреждения будут равны

$$c_0 = \left[ \frac{8}{(n+1)m v_0^2} \right]^n U^{n+1}, \quad a_0 = \frac{(n+1)m v_0^2}{8U}, \quad t_0^* = \frac{m v_0}{4U} B\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}\right) \quad (4.19)$$

а соответствующее минимальное значение максимума модуля смещения защищаемого объекта определяется выражением

$$J(t_0^*, a_0, c_0) = \frac{(n+1)m v_0^2}{8U} \quad (4.20)$$

Сравнение равенств (2.12) и (4.20) показывает, что настройка пружины со степенной характеристикой (2.8) на упреждающий режим позволяет в четыре раза уменьшить значение критерия качества по сравнению с неупреждающим режимом.

Как и в неупреждающем случае, качество защиты в упреждающем режиме улучшается с уменьшением показателя степени характеристики пружины  $n$ . Наилучший показатель отвечает  $n = 0$ . В этом случае упреждающий режим позволяет в четыре раза уменьшить максимум модуля смещения защищаемого объекта по сравнению с предельными возможностями неупреждающего управления (см. (2.6)). Вместе с тем оптимальный упреждающий изолятор на основе пружины со степенной характеристикой (при  $n = 0$ ) дает в два раза худшее качество защиты по сравнению с предельными возможностями изолятора с упреждающим управлением (см. 3.12)).

**5. Заключение.** В некоторых случаях в системах противоударной изоляции можно использовать принцип упреждающего управления, подразумевающий заблаговременное начало управляющего воздействия на защищаемый объект до того, как основание подвергнется удару. Для реализации этого принципа требуется прогнозирование времени начала ударного воздействия и его динамических характеристик, в частности продолжительности и импульса. Анализ предельных возможностей показывает, что использование упреждающего управления позволяет очень существенно улучшить качество противоударной защиты, по сравнению с неупреждающим управлением, действие которого начинается одновременно с ударом. (Фактически реализовавшийся удар служит сигналом для начала работы противоударного изолятора с неупреждающим управлением.) Для модельной системы с одной степенью свободы в случае мгновенного удара это улучшение характеризуется коэффициентом 8 по критерию максимального смещения защищаемого тела относительно основания. Существенного улучшения качества противоударной защиты по сравнению с предельными возможностями изоляторов неупреждающего действия можно добиться с помощью широко используемого упругого изолятора (пружины), отделяющего защищаемый объект от основания, если изолятор предварительно деформировать и освободить за некоторое время до удара. Величина предварительной деформации, время освобождения изолятора и жесткость пружины выбираются оптимальным образом в зависимости от интенсивности удара и массы защищаемого объекта. Для модельной системы с одной

степенью свободы использование упреждающего пружинного изолятора позволяет уменьшить смещение защищаемого объекта в 4 раза, по сравнению с предельными возможностями изолятора неупреждающего действия, без увеличения максимума модуля силы, приложенной к объекту со стороны изолятора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 01-01-00591 и 02-01-00157).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анастасевич В.С.* Эффективность защиты прибора от удара при его амортизации // Инж. сб. 1941. Т. 1. Вып. 1. С. 71–72.
2. *Ишлинский А.Ю.* Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
3. *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
4. *Коловский М.З.* Нелинейная теория виброзащитных систем. М.: Наука, 1966. 317 с.
5. *Коловский М.З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.
6. *Гурецкий В.В.* Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
7. *Sevin E., Pilkey W.D.* Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington: Government Print Office, 1971. 162 p.
8. Вибрации в технике: Справочник. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. М.: Машиностроение, 1995. 460 с.
9. Shock and Vibration Handbook / Ed. C.M. Harris. N.Y.: McGraw-Hill, 1988. P. 1.1–1.26.
10. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal protection from impact and shock: Theory and methods // Appl. Mech. Rev-s. 2000. V. 53. № 9. P. 237–264.
11. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach, 2001. 436 p.
12. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
13. *Afimiwala K.A., Mayne R.W.* Optimum design of an impact absorber Trans. ASME J. Eng. Industry. 1974. V. 96. № 1. P. 124–130.
14. *Гурецкий В.В.* К задаче о минимизации наибольшего отклонения // Тр. ЛПИ. Механика и процессы управления. Вычислительная математика. 1969. Вып. 307. С. 11–21.
15. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.

Н. Новгород, Москва

Поступила в редакцию  
19.01.2003