

© 2003 г. В.Ф. ЖУРАВЛЕВ

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТРЕНИЯ ПРИ КОМБИНАЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ И ВЕРЧЕНИЯ

Задача качения твердых тел по шероховатым поверхностям в случае точечного контакта обычно решается в предположении отсутствия относительного проскальзывания в точке контакта, что приводит к неголономной постановке задачи.

На неудовлетворительность такого подхода обратил внимание Контенсу [1]. Он выяснил, что при наличии сколь угодно малого верчения сила трения трогания обращается в нуль и условие отсутствия проскальзывания не может быть реализовано.

Анализ, выполненный Контенсу, был дополнен в [2]. В этой работе помимо силы трения в контакте был также вычислен и момент сил трения. Кроме того выражения для этих величин в виде интегралов были сведены к элементарным функциям, после чего для окончательной записи модели силового взаимодействия в контакте использованы аппроксимации Паде.

В [3] было продолжено изучение связи трения скольжения и верчения для случая, когда область контакта не является точечной. Получены выражения для силы и момента с помощью аппроксимации Паде для контакта однородного диска с плоскостью, а также изучена динамика такого диска.

В настоящем исследовании связь верчения со скольжением изучается в случае произвольного осесимметричного распределения нормальных напряжений в контакте. Рассмотрены частные примеры.

1. Модель трения при комбинации скольжения и верчения. Будем рассматривать область контакта в виде круга радиуса R , в котором нормальное напряжение зависит только от расстояния ρ до центра круга $\sigma(\rho)$. Относительное скольжение осуществляется со скоростью v , угловая скорость верчения обозначена ω (фиг. 1).

Скорость относительного скольжения v_c в точке области контакта, имеющей полярные координаты ρ, θ , выражается так: $v_c = (v - \omega \rho \sin \theta, \omega \rho \cos \theta)$.

Дифференциал силы трения, направленной против относительной скорости в этой точке, в соответствии с законом Кулона имеет вид

$$d\mathbf{F} = -f_0 \sigma(\rho) \frac{\mathbf{v}_c}{|\mathbf{v}_c|} ds$$

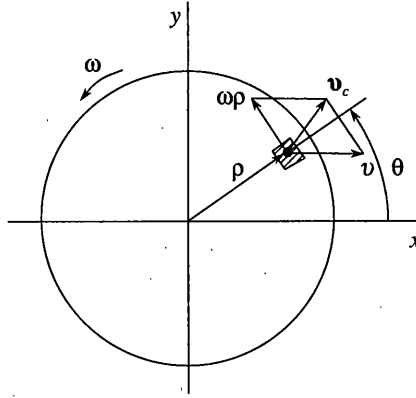
Момент этой элементарной силы

$$dM = -|\boldsymbol{\rho} \times d\mathbf{F}| = -\rho_x dF_y + \rho_y dF_x = f_0 \sigma(\rho) (\rho^2 \omega - v \rho \sin \theta) \frac{ds}{|\mathbf{v}_c|}$$

В итоге для момента и силы получим следующие выражения

$$M = -f_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 \omega - v \rho \sin \theta) \sigma(\rho) \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\omega^2 \rho^2 - 2v\omega \rho \sin \theta + v^2}}$$

$$F = -f_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{(v - \omega \rho \sin \theta, \omega \rho \cos \theta) \sigma(\rho) \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\omega^2 \rho^2 - 2v\omega \rho \sin \theta + v^2}}$$



Фиг. 1

Заметим, что по причине симметрии выражения для силы относительно оси x ее компонента вдоль оси y равна нулю.

Введем обозначения $u = \omega R$, $r = \rho/R$. Учитывая эти обозначения, перепишем выражения для модуля момента и модуля ненулевой компоненты силы

$$M = f_0 R^3 \int_0^1 r \sigma(r) \int_0^{2\pi} \frac{ur^2 - v r \sin \theta}{\sqrt{u^2 r^2 - 2u v r \sin \theta + v^2}} d\theta dr \quad (1.1)$$

$$F = f_0 R^2 \int_0^1 r \sigma(r) \int_0^{2\pi} \frac{v - u r \sin \theta}{\sqrt{u^2 r^2 - 2u v r \sin \theta + v^2}} d\theta dr \quad (1.2)$$

В представленной форме оба выражения имеют вид эллиптических интегралов, однако в подходящим образом выбранных переменных они могут быть вычислены в элементарных функциях [2].

Функции $M(u, v)$ и $F(u, v)$ являются мероморфными функциями указанных аргументов и могут быть удобно представлены в области $u > 0$, $v > 0$ следующими аппроксимациями Паде:

$$M = M_0 \frac{u}{u + av}, \quad F = F_0 \frac{v}{v + bu} \quad (1.3)$$

$$M_0 = M|_{v=0}, \quad F_0 = F|_{u=0}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a и b исходим из условия равенства в нуле производных от исходных функций и от их аппроксимаций

$$\left. \frac{\partial M}{\partial u} \right|_{u=0} = \frac{M_0}{av}, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{v=0} = \frac{F_0}{bu}$$

Дифференцируя (1) и (2) под знаком интеграла, находим

$$\left. \frac{\partial M}{\partial u} \right|_{u=0} = \frac{\pi}{Rv} \int_0^1 r^3 \sigma(r) dr, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial v} \right|_{v=0} = \frac{R\pi}{u} \int_0^1 \sigma(r) dr$$

Необходимо еще вычислить M_0 и F_0 :

$$M_0 = 2\pi R^3 f_0 \int_0^1 r^2 \sigma(r) dr, \quad F_0 = 2\pi R^2 f_0 \int_0^1 r \sigma(r) dr$$

В результате находим

$$a = \frac{M_0}{v} \frac{\partial M}{\partial u} \Big|_{u=0} = 2 \int_0^1 r^2 \sigma(r) dr / \int_0^1 r^3 \sigma(r) dr$$

$$b = \frac{F_0}{u} \frac{\partial F}{\partial v} \Big|_{v=0} = 2 \int_0^1 r \sigma(r) dr / \int_0^1 \sigma(r) dr$$

Таким образом, коэффициенты Паде-аппроксимации (1.3) выражаются через четыре первых момента нормального напряжения в области контакта.

Модель силового взаимодействия трущихся тел, вытекающая из гипотезы Кулона, сформулированной им для простейшего случая, в рассмотренной постановке получилась такой

$$M = M_0 \frac{u}{|u| + a|v|}, \quad F = F_0 \frac{v}{|v| + b|u|}$$

$$a = 2 \int_0^1 r^2 \sigma(r) dr / \int_0^1 r^3 \sigma(r) dr, \quad b = 2 \int_0^1 r \sigma(r) dr / \int_0^1 \sigma(r) dr \quad (1.4)$$

В последней записи учтено, что скорости u и v могут иметь произвольный знак. Модель Кулона получается частным случаем из модели (1.4). Например, если верчение отсутствует ($u \equiv 0$), то $F = F_0 \operatorname{sign} v$.

2. Некоторые частные случаи.

1. Точечный контакт (Герц):

$$\sigma(r) = \frac{N}{2\pi R^2} \sqrt{1-r^2}, \quad a = \frac{15\pi}{16}, \quad b = \frac{8}{3\pi}$$

2. Плоский круглый диск (Галин) [4]:

$$\sigma(r) = \frac{N}{2\pi R^2 \sqrt{1-r^2}}, \quad a = \frac{3\pi}{4}, \quad b = \frac{4}{\pi}$$

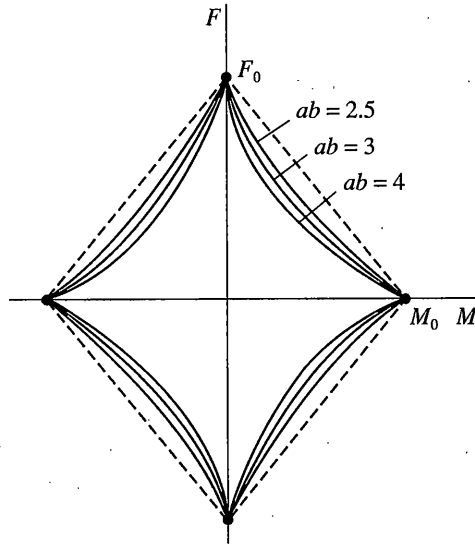
3. Тонкое кольцо:

$$\sigma(r) = \frac{N}{2\pi R^2} \delta(r-1), \quad a = 2, \quad b = 2$$

В этих формулах N представляет собой величину силы, прижимающей трущиеся тела друг к другу, $\delta(r-1)$ – дельта-функция Дирака в точке 1.

3. Зона застоя. Выражения (1.4) показывают, что точка $u = 0$, $v = 0$ является для них особой точкой, в которой предел функции по совокупности переменных (u , v) не существует. Обозначим $p = M/M_0$, $q = F/F_0$ и рассмотрим в (1.4) частичный предел при $u \rightarrow 0$ вдоль луча $v = \alpha u$. В первом квадранте имеем $p = 1/(1 + \alpha a)$; $q = \alpha/(\alpha + b) \Rightarrow \alpha = (1-p)/ap$. Следовательно

$$p + (ab - 1)pq + q = 1 \quad (p > 0, q > 0)$$



Фиг. 2

Это выражение и определяет зону застоя. В размерных переменных и во всей плоскости оно может быть переписано так

$$\frac{|M|}{M_0} + (ab - 1) \frac{|MF|}{M_0 F_0} + \frac{|F|}{F_0} = 1 \quad (3.1)$$

Для точечного контакта $ab = 2.5$, для диска $ab = 3$, для кольца $ab = 4$ и соответствующие кривые, ограничивающие зону застоя, изображены на фиг. 2. Оценкой сверху для всех указанных случаев является выражение $|M|/M_0 + |F|/F_0 = 1$, изображенное на фигуре штриховыми линиями.

Из вида зоны застоя следует, что приложение к покоящемуся телу даже небольшого момента приводит к резкому уменьшению силы трения трогания. И, наоборот, при приложении силы резко падает величина момента трогания. Это объясняет хорошо известное явление “заноса” автомобиля при повороте с одновременным ускорением, или торможением.

4. Скатывание по наклонной плоскости. В качестве примера использования построенной модели силового взаимодействия контактирующих тел с трением рассмотрим динамику вешомого тела, скатывающегося по наклонной плоскости (фиг. 3).

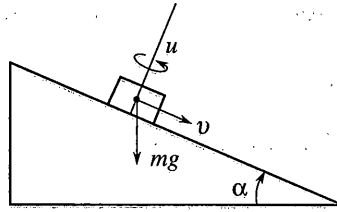
Пусть однородное симметричное тело имеет массу m , а момент инерции J . Тогда уравнения движения этого тела можно записать так

$$\frac{J}{R} \ddot{u} = -\frac{M_0 u}{u + av}, \quad m \ddot{v} = -\frac{F_0 v}{v + bu} + mg \sin \alpha$$

Очевидно, что при положительных начальных условиях переменные останутся положительными и при любом t .

Выполним замену времени $\tau = (F_0/m)t$ и обозначим $\varepsilon = M_0 R m / F_0 J$, $l = (mg \sin \alpha) / F_0$. Тогда исходные уравнения переписутся так

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{\varepsilon u}{u + av}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{v}{v + bu} + l \quad (4.1)$$



Фиг. 3

В случае точечного контакта

$$M_0 = 2\pi R^3 f_0 \int_0^1 r^2 \sigma(r) dr = \frac{3f_0}{16} RN = \frac{3}{16} RF_0$$

поэтому $\varepsilon = 3mR^2/(16J) \rightarrow 0$ ($R \rightarrow 0$).

Для диска $M_0 = \pi f_0 RN/4 = \pi RF_0/4 \Rightarrow \varepsilon = \pi/2$ и уравнения (4.1) для диска приобретают вид

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{\pi u/2}{u + 3\pi v/4}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{v}{v + 4u/\pi} + l \quad (4.2)$$

Уравнения (4.1) в случае кольца

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{u}{u + 2v}, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{v}{v + 2u} + l \quad (4.3)$$

5. Точное интегрирование уравнений движения. Уравнения (4.1) могут быть проинтегрированы в квадратурах. Для простоты рассмотрим случай кольца при $l = 0$. Выполним замену переменных $(u, v) \rightarrow (p, q)$: $p = v/u$, $q = \ln u$. В этих переменных уравнения (4.3) приобретают вид

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{p(1-p)e^{-q}}{(1+2p)(2+p)}, \quad \frac{dq}{d\tau} = -\frac{e^{-q}}{1+2p}$$

и сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными

$$dp/dq = p(p-1)/(2+p)$$

Интегрирование этого уравнения и возвращение затем к старым переменным позволяет получить локальный первый интеграл системы (4.3) при $l = 0$:

$$(u-v)^3/u^2 v^2 = \text{const}$$

В общем случае уравнений (4.1) к успеху приводит та же самая замена переменных, однако вид первого интеграла существенно сложнее.

6. Качественный анализ уравнений движения. Рассмотрим уравнения (4.3) при $l = 0$. Запишем их в эквивалентной форме

$$\frac{dv}{du} = \frac{v(u+2v)}{u(v+2u)}$$

Эти уравнения фазовых траекторий могут быть получены из следующей системы с гладкими правыми частями:

$$du/d\lambda = -u(2u + v), \quad dv/d\lambda = -v(u + 2v)$$

Старое время связано с новым следующей формулой

$$\tau = \int_0^{\lambda} (2u + v)(u + 2v) d\lambda \quad (6.1)$$

Из написанной системы последовательно находим

$$\frac{d}{d\lambda}(u^2 + v^2) = -u^2(2u + v) - v^2(u + 2v) \leq -(u^2 + v^2)^{3/2}$$

Откуда следует неравенство

$$\sqrt{u^2 + v^2} \leq \frac{2\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{2 + \sqrt{u_0^2 + v_0^2}\lambda}$$

Из этого неравенства следует, что интеграл (6.1) при $\lambda = \infty$ сходится, что означает, что все траектории системы (4.3) при $l = 0$ попадают в начало координат за конечное время. Т.е. скольжение и верчение кольца на горизонтальной плоскости заканчиваются одновременно и за конечное время. Этот же вывод аналогичными рассуждениями получается для любого тела на горизонтальной плоскости. Если в начальный момент времени либо $u_0 = 0$, либо $v_0 = 0$, то траектория представляет собой отрезок одной из координатных осей, она завершается в нуле за конечное время, однако говорить об одновременном окончании скольжения и верчения уже нельзя.

В случае наклонной плоскости ($l \neq 0$) имеются три подслучая. В первом, когда $l < 1$, сохраняются все только что установленные свойства. Во втором, когда $l \geq 1$ и скольжение и верчение (если оно не равнялось нулю в начальный момент времени) существуют бесконечно долго.

Запишем теперь систему (4.3) в форме одного уравнения в фазовых переменных

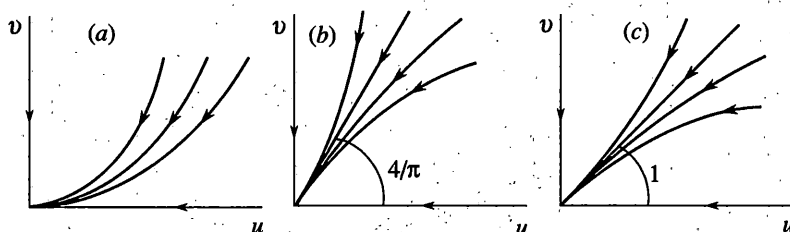
$$\frac{dv}{du} = \frac{[(l-1)v + lbu](u + av)}{\epsilon u(v + bu)} \quad (6.2)$$

Случай $l = 0$. Найдем частные решения в виде прямолинейной траектории, идущей в начало координат: $v = \alpha u$. Подстановка в (6.2) позволяет найти $\alpha = (1 - \epsilon b)/(\epsilon - a)$.

В случае точечного контакта $\epsilon \rightarrow 0$ и положительных значений α нет. Для диска $\alpha = 4/\pi$, а для кольца $\alpha = 1$. Такое частное решение для кольца означает, что кольцо скользит в плоскости, обкатывая без проскальзывания неподвижную прямую, являющуюся для него геометрическим местом мгновенных центров скоростей, так что и в момент остановки мгновенный центр скоростей оказывается на самом кольце. Этот результат согласуется с полученным ранее в [5].

Поведение траекторий в окрестности нуля будем изучать, разыскивая их в малом в виде параболы $v = \alpha u^\beta$. Подставляя это представление в (6.2), найдем

$$\beta = \frac{u + a\alpha u^\beta}{\epsilon(\alpha u^\beta + bu)}$$



Фиг. 4

Отсюда следует, что если $\beta < 1$, то

$$\beta = \frac{a}{\varepsilon} = \begin{cases} \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0) \text{ (точечный контакт)} \\ 5 \text{ (диск)} \\ 2 \text{ (кольцо)} \end{cases}$$

Все эти результаты противоречат предположению, что $\beta < 1$. Полагая, что $\beta > 1$, находим

$$\beta = \frac{1}{\varepsilon b} = \begin{cases} \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0) \text{ (точечный контакт)} \\ 1/2 \text{ (диск)} \\ 1/2 \text{ (кольцо)} \end{cases}$$

Следовательно, для тела с точечным контактом траектории входят в начало координат, касаясь оси абсцисс; а для диска и кольца траектории осей координат в нуле не касаются. Поведение их в целой плоскости определяет производная от (6.2), которую приведем для кольца

$$\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = 2 \frac{v(u^2 + 4uv + v^2)}{u^2(v + 2u)^3} (v - u)$$

Видно, что знак этой производной определяется знаком $v - u$. Расчет показывает, что для диска вогнутость, или выпуклость траектории определяется знаком разности $v - (4/\pi)u$.

Суммируя все изложенное, приведем фазовые портреты системы (4.1) в случае $l = 0$ (фиг. 4): a – контакт в точке, b – диск, c – кольцо.

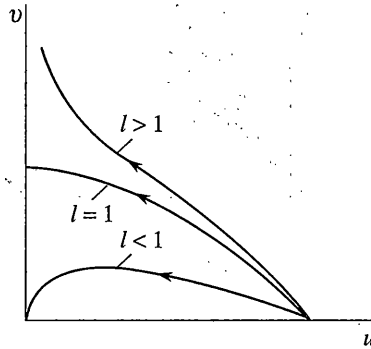
Случай $l \neq 0$.

Подставим $v = \alpha u^\beta$ в (6.2):

$$\alpha \beta u^{\beta-1} = \frac{[(l-1)\alpha u^\beta + lb u](u + a \alpha u^\beta)}{\varepsilon u(\alpha u^\beta + b u)}$$

В случае касания в нуле оси ординат $\beta < 1$, следовательно из полученного уравнения вытекает $\beta = -(l-1)a/\varepsilon$. Если при этом $l > 1$, то $\beta < 0$, т.е. траектория ведет себя как гипербола, уходя в бесконечность при $u \rightarrow 0$. Если $l < 1$, то

$$\beta = \frac{(1-l)a}{\varepsilon} = \begin{cases} \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0) \text{ (точечный контакт)} \\ (1-l)3/2 \text{ (диск)} \\ (1-l)2 \text{ (кольцо)} \end{cases}$$



Фиг. 5

Касание в нуле оси абсцисс ($\beta > 1$) при $l \neq 0$ невозможно, поскольку приводит к невыполняемому условию $\alpha b u^{\beta-1} = -l/\epsilon$.

Поведение траекторий при $l \neq 0$ изображено на фиг. 5.

7. Заключение. Рассмотренный выше частный случай точечного контакта имеет отношение к широко распространенной в научной литературе задаче о качении твердых тел по шероховатым поверхностям.

Часто в подобного рода исследованиях принимается неголономная модель качения, когда со ссылкой на закон Кулона принимают условие отсутствия проскальзывания в точке контакта. Более того, “классическим” примером неголономной связи как раз и является задача качения шара по шероховатой плоскости.

Сам этот пример, а также и все такие подходы к задаче качения основаны на ошибочном толковании закона сухого трения Кулона, в том случае, когда относительное движение контактирующих тел не сводится к какому-либо простейшему.

Есть попытки отказаться от ссылки на закон Кулона при записи неголономной связи посредством перехода к пределу в условии вязкого трения.

Однако неясно, какая физика стоит за таким “трением”, кроме того, подобные предельные переходы связаны с уравнениями, в которых вырождается размерность. А в таких случаях близость решений в предельной и в допредельной системах гарантируется только на конечном интервале времени. Такой близости недостаточно в большинстве случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Contensou P. Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupie // Kreiselprobleme Gyrodynamics: IUTAM Symp. Celerina, 1962. Berlin etc., Springer, 1963. P. 201–216.
2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
3. Киреевков А.А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. РАН, МТТ. 2002. № 1. С. 60–67.
4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
5. Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 4. С. 17–28.