

УДК 531.43

© 2003 г. П.К. ПЛОТНИКОВ

МОДЕЛИ СИЛ ТРЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР И СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Строится замкнутая модель сил трения скольжения и качения в рамках закона Амонтона – Кулона. На ее основе и с учетом концепции наличия третьего тела между парой тел трибосопряжения строятся две модели сил трения с учетом эффекта предварительного смещения. Все указанные модели применяются для анализа движений нескольких механических устройств.

1. Введение. Известна модель силы трения, описываемая в рамках закона Амонтона – Кулона соотношениями [1, 2]:

$$\vec{F} = \begin{cases} f_k & \text{при } \dot{x} > 0 \\ [-f_s, f_s] & \text{при } \dot{x} = 0 \\ -f_k & \text{при } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где f_k, f_s – динамическая и статическая составляющие силы трения, \dot{x} – скорость относительного движения в паре трения. Исследования свойств движения и статики тел затруднены в случае, когда требуется определить силу трения в интервале $[-f_s, f_s]$, где ее значения однозначно не описываются. В [1, 2] однозначные описания силы статического трения приведены, но не для кулонова трения, а для модели, в которой учтен эффект предварительного смещения [3, 4]. В [5, 6] учтена упругость в контакте пары трения, что характерно для эффекта предварительного смещения. Модель комбинированного трения Контенсу [5] скольжения (скорость V) и вращения (угловая скорость ω) разрешена в [6] – в этой работе впервые решена в элементарных функциях задача интегрирования касательных напряжений по площадке контакта. Аналитически решена также задача о качении однородного шара по плоскости с сухим трением. В результате решения указанных задач поставлена под сомнение обоснованность аксиоматики механики неголономных систем. Установлены эффекты взаимовлияния компонентов движения V и ω , в силу чего кулоново трение проявляется как вязкое. В то же время при получении из формул для силы трения F_f и момента силы трения M_f^0 работы [6] одномерных моделей трения путем исключения одного из компонентов движения (либо $\omega = 0$, либо $V = 0$), имеют место соотношения либо для силы трения скольжения, либо для момента силы трения вращения Кулона, т.е. без учета предварительного смещения.

В [7, 8], а также во многих других курсах по теоретической механике даются простые модели силы трения в соответствии с законом Амонтона – Кулона. Они не являются замкнутыми.

В [9, 10] представлена модель обобщенной силы кулонова трения, которая используется для исследования свойств движений механических систем. В [11] исследовано влияние моментов сил сухого трения, соответствующих модели (1.1), на режим затуха-

ния собственных колебаний гироскопа в кардановом подвесе. В [12] исследована устойчивость и вынужденные колебания гирорамы, а также движение гироскопа направления при учете момента трения в виде, подобном (1.1).

В данной статье предложена новая замкнутая модель силы трения в рамках закона Амонтона – Кулона [3], позволившая в задачах с трением устранить неопределенность для интервала $[-f_s, f_s]$. Данная модель, являющаяся обобщением известных, и концепция о наличии так называемого третьего тела между двумя телами трения [3] послужили основой для построения двух новых разновидностей моделей трения, которые описывают эффект предварительного смещения. Эти модели предложено использовать для описания сил трения скольжения и качения в одномерных кинематических парах, что важно, например, в механике систем твердых тел с трением. В отличие от модели [1] данные описывают скачок силы трения от статического значения к динамическому, собственные колебания одного из тел пары трибосопряжения в зоне предварительного смещения за счет упругости в ней и другие эффекты. По отношению к модели [2] данные модели имеют более простое физико-математическое представление. Модели применены в задачах о движении твердого тела с пружиной и демпфером, а также в осцилляторе. При моделировании работы систем продемонстрированы эффекты застоя, при использовании модели в рамках закона Амонтона – Кулона, и их отсутствия при использовании модели, учитывающей эффект предварительного смещения. Кроме того, рассмотрена задача о движении стержня по двум направляющим [7], на примере которой подтверждено наличие парадокса Пэнлеве при использовании модели кулонова трения и показано его отсутствие при использовании модели, учитывающей эффект предварительного смещения.

Предложенная в данной работе модель проще и в заключении статьи приводится в виде замкнутой модели обобщенной силы кулонова трения.

2. Модели сил трения. 2.1. Модель силы трения в рамках закона Амонтона – Кулона. Физической предпосылкой построения новой обобщенной модели силы кулонова трения является известное описание процессов трения скольжения, приведенное, например, в [8]. Оно необходимо для замыкания модели силы трения. На неподвижную горизонтальную плоскость положен брусок весом P . К этому бруску прикладывают горизонтальную силу Q . Брусок остается в покое до тех пор, пока сила Q не достигнет некоторой определенной величины. Это объясняется тем, что, кроме нормальной реакции N , возникает еще сила F , противоположная силе Q и препятствующая скольжению бруска. Эта сила F и есть сила трения между бруском и опорной плоскостью. Постепенно увеличивая силу, обеспечивают режим равновесия, при котором имеет место

$$N = P, \quad F = Q \quad (2.1)$$

Из данного равенства следует, что с увеличением силы Q возрастает и сила трения F . Наступит такой момент, когда брусок будет находиться на грани между покоем и движением, иначе, на грани скольжения. Дальнейшее увеличение силы Q , хотя бы самое малое, вызовет уже скольжение его по плоскости. Из рассмотренного следует, что модуль силы трения в покое может иметь любое значение от нуля до максимального значения. Сила трения в покое прямо пропорциональна нормальному давлению одного тела на другое

$$F = k_s N \quad (2.2)$$

где k_s – статический коэффициент трения скольжения. Формула (2.2) получена Амонтоном [3]. В законе Кулона к силе F добавляется сила трения F_0 , не зависящая от N . Она обусловлена адгезией [3]. Аналогично определяется сила трения в движении, но она несколько меньше статической. Коэффициенты трения являются функциями

многих переменных: шероховатости, смазки, скорости относительного движения в трибосопряжении и других. При расчетах этих коэффициентов можно использовать методики, изложенные в [3] и других трудах по трению. Последующие выкладки проведены с учетом этих обстоятельств. Дальше в статье для краткости сила трения называется кулоновой, хотя более строго в литературе закон трения называют законом Амонтона – Кулона, а, кроме того, известны уточнения этого закона [3].

С учетом изложенного выше, а также на основе [1, 2, 8] соотношениям для силы кулонова трения придадим следующий вид:

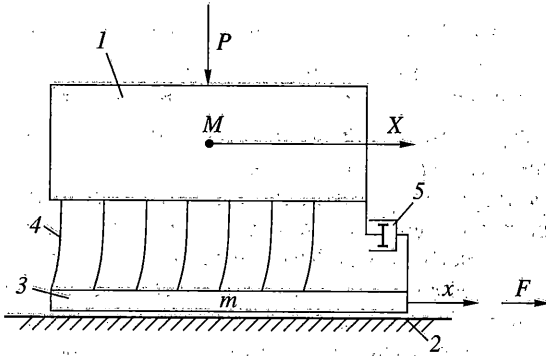
$$\begin{aligned}
 (a) \quad & F = f_k + f_s \\
 (b) \quad & f_k = f_k^0 \operatorname{sign} \dot{x}, \quad f_s = f_s^* (1 - (\operatorname{sign} \dot{x})^2) \\
 (c) \quad & f_s^* = 0.5Q(1 - \operatorname{sign}(|Q| - f_s^0)) + 0.5f_s^0(1 + \operatorname{sign}(|Q| - f_s^0)) \operatorname{sign} Q \\
 (d) \quad & f_s^0 \geq f_k^0, \quad \operatorname{sign} \dot{x} = \begin{cases} +1 & \text{при } \dot{x} > 0 \\ 0 & \text{при } \dot{x} = 0 \\ -1 & \text{при } \dot{x} < 0 \end{cases} \\
 (e) \quad & f_s^0 = k_s |N|, \quad f_k^0 = k_k |N|
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где k_s, k_k – статический и динамический коэффициенты трения. В (2.3) и далее функция sign от других аргументов имеет аналогичное с функцией $\operatorname{sign} \dot{x}$ описание. Из формул (2.3) легко усматривается переход от статического трения к динамическому и наоборот.

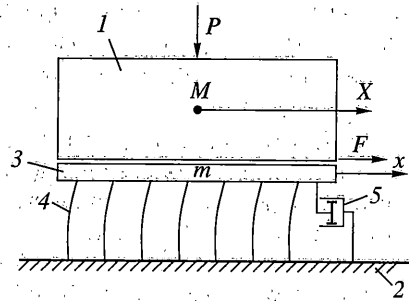
2.2. *Модели сил трения, в которых учитывается эффект предварительного смещения.* Исходной физической предпосылкой построения данной модели являются соотношения (2.3) и концепция о наличии третьего тела между парой тел трибосопряжения [3]. Оно состоит из пленки и деградированных материалов основных трущихся тел. Масса его мала по сравнению с массой любого из тел трения. Будем предполагать наличие упругодемпфирующей связи между третьим телом и одним из тел трения, которая определяет эффект предварительного смещения. Между другим телом и третьим телом имеет место кулоново трение. В соответствии с изложенным ниже приведены две физические и математические модели силы трения, в которых учитывается указанный выше эффект.

На фиг.1 представлен первый вариант физической модели пары тел трения 1 и 2, между которыми помещено третье тело 3, все тела – абсолютно твердые. Третье тело связано с телом 1 пружинами 4 и демпфером 5, моделирующими упругодемпфирующую связь в зоне предварительного смещения. Суммарная сила, развиваемая элементами 4 и 5, является силой трения в зоне предварительного смещения для тела 1, движение которого подлежит изучению. Сила трения между телами 2 и 3 описывается моделью кулонова трения (2.3). Эта сила преобразуется динамическим звеном, составленным из элементов 3, 4 и 5, в силу трения с учетом предварительного смещения.

На фиг. 2 представлен второй вариант физической модели пары тел трения 1 и 2, между которыми, как и в первом варианте, помещено третье тело 3. Это тело здесь связано пружинами 4 и демпфером 5 с телом 2, являющимся основанием. Между телами 1 и 3 действует сила кулонова трения. В соответствии с фиг. 2 тело 3 может перемещаться относительно тела 2 в пределах зоны предварительного смещения. Эта зона, как известно, является малой величиной и изменяется от значений единиц до десятков микрометров в зависимости от параметров тел пары трения [3, 4].



Фиг. 1



Фиг. 2

Первый вариант математической модели, соответствующей фиг.1, для которой в силе трения учитывается эффект предварительного смещения, представлен следующей системой дифференциальных уравнений:

$$(a) M\ddot{X} = -\Phi + Q$$

$$(b) m\ddot{x} = F + \Phi$$

$$(c) F = -f_k^0 \text{sign} \dot{x} - f_s^* (1 - (\text{sign} \dot{x})^2)$$

$$(d) f_s^* = 0.5\Phi(1 - \text{sign}(|\Phi| - f_s^0)) + 0.5f_s^0(1 + \text{sign}(|\Phi| - f_s^0)) \text{sign} \Phi \quad (2.4)$$

$$(e) \Phi = n(\dot{X} - \dot{x}) + c(X - x) - C(X - x)^3$$

$$(f) f_s^0 \geq f_k^0, \quad Q = Q(t, X, \dot{X}, \dots)$$

где Q – внешняя для тела 1 сила; Φ – сила трения, в которой учитывается эффект предварительного смещения и которая действует на тело 1; этот эффект достигается путем преобразования элементами 4, 5 силы кулонова трения F , развиваемой между телами 2 и 3, в силу Φ между телами 1 и 3; c, C – коэффициенты линейной и нелинейной составляющих жесткости пружин 4, n – коэффициент демпфирования элемента 5. Отметим, что силе Φ придан конкретный вид в соответствии с формулой для силы взаимодействия в зоне предварительного смещения [3, 4]; M, m – массы тел 1 и 3 соответственно. На схемах фиг. 1, 2 тело 1 массой M может быть связано с другими телами, действие которых может быть описано через конкретизацию силы Q , представленную в уравнениях (2.4) и (2.5) в самом общем виде.

Зона предварительного смещения x_{nc} может быть определена из (2.4, e) по известной величине $\Phi_c = -F_c$. Второй вариант математической модели, соответствующей фиг. 2, для которой в силе трения учитывается эффект предварительного смещения, имеет следующий вид:

$$(a) M\ddot{X} = F + Q; \quad Q = Q(t, X, \dot{X}, \dots)$$

$$(b) m\ddot{x} = -F + \Phi$$

$$(c) F = f_k^0 \text{sign}(\dot{x} - \dot{X}) + f_s^* (1 - (\text{sign}(\dot{x} - \dot{X}))^2) \quad (2.5)$$

$$(d) \Phi = -n\dot{x} - cx + Cx^3$$

Формулы для f_s^* и f_s^0 такие же, как и в уравнениях (2.4). В данном варианте модели сила кулонова трения F прикладывается непосредственно к телу 1. Влияние зоны предварительного смещения проявляется через посредство входящих в уравнение (2.5, b) переменных x , \dot{x} , благодаря которым сила F не может изменяться ступенчато так, как это имело бы место при отсутствии предварительного смещения.

3. Уравнения движения механических устройств с трением. В данном пункте рассматривается устройство в виде твердого тела с одной степенью свободы. Его поступательное движение ограничено пружиной и демпфером. Модели по фиг.1, 2 отличаются от данного устройства тем, что в них вводится третье тело со связями, описывающими явление предварительного смещения в трении. Подобное усложнение привело к тому, что исходное устройство трансформировалось в устройства с двумя степенями свободы. В своих макродвижениях они близки по свойствам к исходному устройству с одной степенью свободы, по свойствам в микродвижениях, т.е. происходящих в зоне предварительного смещения, — существенно отличаются. В связи с конкретизацией структуры устройства в его уравнения движения, а также в уравнения (2.4) и (2.5) вводится формула для внешней силы вида

$$Q = -v\dot{X} - \sigma X + q(t) \quad (3.1)$$

где v , σ — коэффициенты демпфирования и жесткости демпфера и пружины, ограничивающих движение тела 1 относительно тела (основания) 2, $q(t)$ — внешняя сила, являющаяся функцией времени.

Кроме того, в уравнениях (2.4) к силе F прибавляется малая по величине сила ΔF , которая обеспечивает при моделировании демпфирование третьего тела относительно второго

$$\Delta F = v_F \dot{x} \quad (3.2)$$

где v_F — коэффициент демпфирования, назначаемый из соображений минимального искажения динамики системы. Вместо выражения (3.2) в работе при моделировании преимущественно используется следующее:

$$\Delta F = 0.5v_F \dot{x} [1 - \text{sign}(v_F |\dot{x}| - \varepsilon_k^0)] \quad (3.3)$$

Оно позволяет описать плавный переход к динамической силе трения $f_k^0 \text{sign} \dot{x}$ от нулевого значения; в целом видоизмененная формула для динамической составляющей силы трения приобретает вид:

$$f_k = 0.5v_F \dot{x} [1 - \text{sign}(v_F |\dot{x}| - \varepsilon_k^0)] + f_k^0 \text{sign} \dot{x} \quad (3.4)$$

где ε_k^0 — некоторое пороговое значение динамической составляющей силы трения.

Динамическая составляющая силы трения (3.3) в меньшей степени искажает динамику системы, чем сила по формуле (3.2); к тому же ее можно рассматривать как расширение модели динамической составляющей силы кулонова трения, которая представляется в форме (3.4).

Уравнения (2.5) могут быть также дополнены соотношениями (3.2), (3.3) или (3.4) с заменой аргумента \dot{x} на $\dot{x} - \dot{X}$. При моделировании установлено, что идеальная сигнатурная функция (2.3, d) не позволяет описать статическое трение в устройстве, так

как случаи отсутствия скорости в динамическом звене чрезвычайно редки. Поэтому при моделировании статики и динамики применялась следующая функция:

$$\text{sign } \dot{x} = \begin{cases} -1, & \text{при } \dot{x} > \varepsilon \\ 0, & \text{при } |\dot{x}| = \varepsilon \\ +1, & \text{при } |\dot{x}| < \varepsilon \end{cases} \quad (3.5)$$

где ε – некоторое малое положительное число; при моделировании оно бралось в пределах $\varepsilon = 8 \cdot (1^{-5} \dots 10^{-6})$.

Рассмотрены системы с трением, уравнения движения которых в зависимости от модели силы трения видоизменяются.

3.1. *Модель механического устройства с кулоновым трением.* Оно имеет одну степень свободы, кулоново трение учитывается в виде соотношений (2.3)

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + v\dot{X} + \sigma X &= q(t) - F, \quad Q = q(t) - v\dot{X} - \sigma X \\ F &= f_k + f_s, \quad f_k = f_k^0 \text{sign } \dot{X}, \quad f_s = f_s^* (1 - (\text{sign } \dot{X})^2) \\ f_s^* &= 0.5Q(1 - \text{sign}(|Q| - f_s^0)) + 0.5f_s^0(1 + \text{sign}(|Q| - f_s^0)) \text{sign } Q \\ f_k^0 &\leq f_s^0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Функция $\text{sign } \dot{X}$ задавалась как в виде (2.3, d), так и в виде (3.5). Здесь M, v, σ – масса и коэффициенты демпфирования и жесткости для тела 1 по фиг. 1 или фиг. 2, когда оно соприкасается непосредственно с основанием 2.

3.2. *Модель механического устройства, вторая степень свободы в котором обусловлена учетом эффекта предварительного смещения по соотношениям (2.4):*

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= -\Phi + Q, \quad m\ddot{x} = \Phi + F, \quad Q(t) = q(t) - v\dot{X} - \sigma X \\ F &= -f_k - f_s^*(1 - (\text{sign } \dot{x})^2) - \Delta F \\ f_s^* &= 0.5\Phi(1 - \text{sign}(|\Phi| - f_s^0)) + 0.5f_s^0(1 - \text{sign}(|\Phi| - f_s^0)) \text{sign } \Phi \\ f_k &= f_k^0 \text{sign } \dot{x}, \quad \Delta F = 0.5v_F \dot{x} [1 - \text{sign}(v_F |\dot{x}| - \varepsilon_k^0)] \\ \Phi &= n(\dot{X} - \dot{x}) + c(X - x) - C(X - x)^3, \quad f_s^0 \geq f_k^0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.3. *Модель механического устройства, вторая степень свободы в котором обусловлена учетом эффекта предварительного смещения по соотношениям (2.5):*

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= F + Q, \quad m\ddot{x} = -F + \Phi \\ F &= f_k + f_s^*(1 - (\text{sign}(\dot{x} - \dot{X}))^2) + \Delta F, \quad Q = -v\dot{X} - \sigma X + q(t) \\ f_s^* &= 0.5\Phi(1 - \text{sign}(|\Phi| - f_s^0)) + 0.5f_s^0(1 + \text{sign}(|\Phi| - f_s^0)) \text{sign } \Phi \\ f_k &= f_k^0 \text{sign}(\dot{x} - \dot{X}), \quad \Delta F = 0.5v_F(\dot{x} - \dot{X}) [1 - \text{sign}(v_F |\dot{x} - \dot{X}| - \varepsilon_k^0)] \\ \Phi &= -n\dot{x} - cx + Cx^3, \quad f_s^0 \geq f_k^0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что с помощью модели (3.6) определяется наличие однозначных величин застоя системы в интервале $[-f_s^0, f_s^0]$. В моделях (3.7) и (3.8) это явление исключается: в зоне $[-f_s^0, f_s^0]$ имеются предварительные смещения изучаемого тела, определяемые из уравнений статических режимов. Эти режимы ниже исследуются подробно.

4. Статические режимы механических устройств в зоне предварительного смещения. Рассматриваются два варианта значений сигнатурных функций

$$\text{sign} z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{sign}(|z| - z_0) < 0 \quad \text{при} \quad |z| < z_0 \quad (4.2)$$

где z – аргумент; z_0 – пороговое значение аргумента, некоторое положительное число; величины z и z_0 ниже конкретизируются.

Применительно к уравнениям (3.6) из формул (4.1) и (4.2) получены следующие соотношения:

$$(a) \dot{X} = 0, \quad f_s = f_s^*, \quad |Q| - f_s^0 = 0, \quad f_s^* = 0.5Q + 0.5f_s^0 = f_s^0$$

$$M\ddot{X} = Q - f_s^0 \equiv 0$$

Так как положено, что $\dot{X} = 0$, из этого уравнения следует $X(t) = 0$.

$$(b) |Q| < f_s^0, \quad \dot{X} = 0, \quad M\ddot{X} = Q - Q \equiv 0$$

По аналогии с предыдущим имеем $X(t) = 0$. Применительно к уравнениям (3.7) при $\dot{x} = \ddot{x} = \dot{X} = \ddot{X} \equiv 0$ уравнение статического режима имеет вид:

$$c(X - x) - C(X - x)^3 + \sigma X = q \quad (4.3)$$

На первый взгляд, задача статически неразрешима. Однако, в частном случае для решения уравнения (4.3) при $q = \text{const}$, $x_0 = 0$, $X_0 \neq 0$ имеем следующее соотношение:

$$(c + \sigma)X_0 - CX_0^3 = q \quad (4.4)$$

Исследуем устойчивость решений уравнений (3.7) в окрестностях зон статических равновесий (4.4).

(a) Условию (4.1) соответствуют соотношения:

$$\dot{x} = 0, \quad f_s^* = \Phi, \quad F = -\Phi, \quad m\ddot{x} = \Phi - \Phi = 0, \quad x = x_0 = 0$$

Первое уравнение системы (3.7) при $X = X_0 + \Delta X$ принимает вид:

$$M\Delta\ddot{X} = -n(\Delta\dot{X} - \dot{x}) + c(X_0 + \Delta X - x) - C(X_0 + \Delta X - x)^3 + q - \nu\Delta\dot{X} - \sigma(X_0 + \Delta X)$$

Так как $\dot{x} = 0$, $x_0 = 0$, то уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$M\Delta\ddot{X} + n\Delta\dot{X} + (c + \sigma)\Delta X - C[(X_0 + \Delta X)^3 - X_0^3] = 0$$

Решение данного уравнения асимптотически устойчиво, поэтому в (4.4) режим (a) является единственно возможным. К этому же результату придем с другой стороны, для чего не будем учитывать нелинейности в характеристике Φ ($C = 0$), а движения си-

стемы будем полагать происходящими в зоне предварительного смещения. Сигнатурные функции будем учитывать в виде (3.5), в силу которых одновременно учитываются компоненты динамического и статического трения. С учетом этих условий уравнения (3.7) приобретают вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + (n + \nu)\dot{X} + (c + \sigma)X &= n\dot{x} + cx + q \\ m\ddot{x} + \nu_F\dot{x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если при $t = 0$ имеет место $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, то решение $x(t)$ экспоненциально стремится к нулю. Переходной процесс имеет длительность порядка $3m/\nu_F$, откуда ясно, что параметры m, ν_F следует выбирать такими, чтобы он заканчивался на порядок быстрее, чем переходный процесс по $X(t)$. Решение для статического режима равно

$$X_0 = q/(c + \sigma) \quad (4.6)$$

что соответствует уравнению (4.4) при отсутствии в нем нелинейного члена. Применительно к уравнениям (3.8) уравнение статического режима имеет вид:

$$\sigma X + cx - Cx^3 = q \quad (4.7)$$

Кажется, что система также представляется статически неразрешимой. Но из условия $x_0 = X_0$

$$x_0 = X_0 \quad (4.8)$$

следует единственность решения. Нетрудно показать, что это положение равновесия асимптотически устойчиво. Будем считать выполненными условия, сформулированные для уравнений (3.7). Уравнения (3.8) принимают вид:

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + (\nu + \nu_F)\dot{X} + \sigma X &= \nu_F\dot{x} - n\dot{x} - cx + q \\ m\ddot{x} + \nu_F\dot{x} &= \nu_F\dot{X} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Введя символ дифференцирования $d/dt = s$ и разрешив систему (4.9) относительно переменных $X(s)$ и $x(s)$, получим

$$X(s) = \frac{(ms + \nu_F)q(s)}{\Delta(s)}, \quad x(s) = \frac{\nu_F q(s)}{\Delta(s)} \quad (4.10)$$

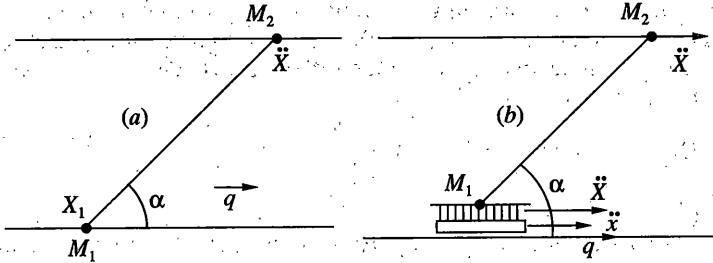
$$\Delta(s) = mM s^3 + (m(\nu_F + \nu) + M\nu_F) s^2 + (m\sigma + \nu_F\nu + \nu_F n) s + \nu_F(\sigma + c)$$

Из (4.10) следует, что при выполнении условий устойчивости (положительность коэффициентов характеристического уравнения и выполнение неравенства $m(\nu_F + \nu) + m\nu_F(\nu\sigma + \nu_F\nu + \nu_F n) > \nu_F(\sigma + c)mM$) имеем для статического режима формулу

$$x(0) = x_0 = X(0) = X_0 = \frac{\nu_F q(0)}{\nu_F(\sigma + c)} = \frac{q(0)}{\sigma + c} \quad (4.11)$$

При отсутствии нелинейности ($C = 0$) формула (4.11) совпадает с (4.7), (4.8). Этим доказано, что статический режим (4.9) является единственно возможным в зоне предварительного смещения. В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости нелинейной автономной системы [13], наличие нелинейностей не нарушает асимптотической устойчивости, и режим (4.7), (4.8) также является единственно возможным.

5. Задача Пэнлеве [7]. Две материальные точки с массами M_1 и M_2 (фиг. 3, а), связанные невесомым стержнем неизменяемой длины l , вынуждены двигаться по двум параллельным прямым. Направляющая точки M_1 обладает коэффициентом трения k_x



Фиг. 3

движения и k_s – покоя. Направляющая точки M_2 является абсолютно гладкой. При $M_1 M_2 = l = 1$ уравнения движения имеют вид ($\ddot{X}_1 = \ddot{X}_2 = \ddot{X}$):

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \lambda \cos \alpha \\ \dot{X} &= q - \lambda \cos \alpha - k_k \lambda \sin \alpha \operatorname{sign} \dot{X} \end{aligned} \quad (5.1)$$

где λ – сила реакции, действующая в направлении стержня, $q = \text{const} (>0)$, при этом $0 < \alpha < \pi/2$. Из уравнения (5.1) непосредственно получается:

$$\lambda = \frac{q}{2 \cos \alpha + k_k \sin \alpha \operatorname{sign} \dot{X}} \quad (5.2)$$

Из (5.1) выводится одно дифференциальное уравнение движения для определения X :

$$\ddot{X} = \frac{q}{2 + k_k \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sign} \dot{X}} \quad (5.3)$$

В [7] показано, что в движении должно выполняться неравенство

$$K = k_k \lambda \dot{X} \operatorname{sign} \dot{X} > 0 \quad (5.4)$$

в противном случае имеет место парадокс Пэнлеве [7, с. 251].

Задача по фиг. 3, *a* была изменена на задачу по фиг. 3, *b* с использованием уравнений силы трения (3.7), учитывающей эффект предварительного смещения. Как и в классической задаче Пэнлеве, здесь считается, что расстояние между точками M_1 и M_2 не изменяется и равно $l = 1$. Введение упругой податливости произведено только для движения вдоль направляющих. Уравнения движения физической модели по фиг. 3, *b* имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 2\ddot{X} &= q - \Phi, \quad m\ddot{x} = \Phi + F \\ \Phi &= c(X - x) + n(\dot{X} - \dot{x}) - C(X - x)^3 \\ F &= -f_k^0 \operatorname{sign} \dot{x} - f_s^*(1 - (\operatorname{sign} \dot{x})^2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$f_s^* = 0.5\Phi(1 - \operatorname{sign}(|\Phi| - f_s^0)) + 0.5f_s^0(1 - \operatorname{sign}(|\Phi| - f_s^0)) \operatorname{sign} \Phi$$

$$f_s^0 = f_k^0 = |k_k \lambda \sin \alpha| = |k_k \ddot{X} \operatorname{tg} \alpha| = \left| \frac{k_k}{2} (q - \Phi) \operatorname{tg} \alpha \right|$$

Условие (5.4) в данном случае преобразуется к виду:

$$K_1 = \frac{k_k}{2}(q - \Phi)\dot{X} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sign} \dot{X} > 0 \quad (5.6)$$

6. Математическое моделирование процессов функционирования механических устройств. Для целей моделирования были использованы экспериментальные данные по определению характеристик сил кулонова трения и силы трения с предварительным смещением.

Снятие характеристики момента силы кулонова трения произведено в гироскопическом двухстепенном измерителе угловой скорости с компенсационной обратной связью и с шарикоподшипниковым подвесом, описанном в [14, с. 37–57]. Компенсационная обратная связь включает в свой состав два потенциометрических датчика углов, включенных по мостовой схеме и запитываемых от источника постоянного тока. Между щетками через эталонный резистор включена обмотка магнитоэлектрического датчика момента. Выходной сигнал снимается с эталонного резистора в цепи обмотки. Входной сигнал задается путем подачи тока в другую обмотку датчика момента, создающего воздействие момента внешней силы на рамку гироскопа.

При экспериментах гироскоп не включался с целью исключения влияния вибраций на величину момента силы трения. В результате проведенных экспериментов снята характеристика момента силы трения в зависимости от момента внешней силы. Характеристика имеет вид, описываемый соотношениями (2.3), где в качестве F выступает момент силы трения M_f , а в качестве Q – момент внешней силы. Численные значения: $M_{fs} = 1.5 \cdot 10^{-4}$ Н·м, $M_{fk} = 1.2 \cdot 10^{-4}$ Н·м. В эксперименте снята характеристика кулонова трения, так как датчик угла – потенциометрический, зона его угловой нечувствительности больше зоны предварительного смещения в приборе. Его сигнал изменялся только при наличии невозвратного поворота рамки относительно корпуса при повороте на угол, превышающий зону витковой нечувствительности (более 4 угл. мин).

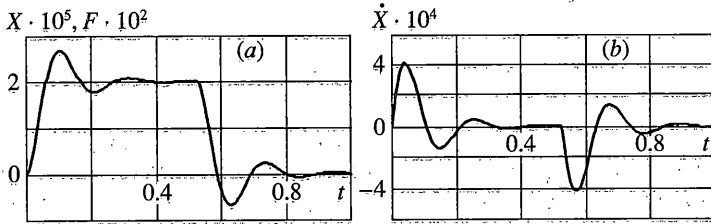
Была также снята экспериментальная характеристика зависимости силы трения от внешней силы для устройства в виде стальной плиты размера 300 × 400 мм, скрепленной с двумя параллельными полиуретановыми опорами в виде манжет высотой 100 мм, длиной 300 мм и шириной 40 мм при $P = 720$ Н. Датчик перемещения – индуктивный. Характеристика силы трения скольжения описывается соотношениями (2.4), учитывающими предварительное смещение, где $f_k^s = f_s^0 = 178$ Н, $c = 600$ Н/мм, $C = 100$ Н/мм³, $x_{nc} = 0.3$ мм.

Получены экспериментальные данные, свидетельствующие о наличии в механических устройствах сил трения со скачками и без них, описываемых моделями кулонова трения и с учетом предварительного смещения. С учетом этих данных математическое моделирование производилось по уравнениям (3.6), (3.7), (3.8) при следующих безразмерных значениях параметров: $M = 1.00$, $m = 0.01$, $\nu = 0.71$, $\sigma = 10^2$, $n = 20$, $c = 1000$, $C = 0$, $\epsilon = 8 \cdot 10^{-5} - 8 \cdot 10^{-6}$, $f_s^0 = f_k^0 = 0.1$, $\nu_F = 30$, $z^0 = \epsilon_k^0 = (10^{-3} - 10^{-5})$.

Сила q варьировалась в широких пределах. Шаг интегрирования изменялся в пределах от $5 \cdot 10^{-4}$ с до 10^{-5} с. Характеристические уравнения для (4.5) и (4.10) имеют вид:

$$\begin{aligned} s^2 + (0.71 + 20)s + (1000 + 1) &= 0 \\ 0.01s^3 + 10.1s^2 + 207s + 1010 &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Коэффициенты данных характеристических уравнений свидетельствуют об асимптотической устойчивости решений уравнений (3.7) и (3.8) при малых воздействиях,



Фиг. 4

когда движения устройств совершаются в пределах зон предварительных смещений. Внешняя сила задавалась в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} (a) \quad q &= 0.01 + 0.01 \operatorname{sign}(\cos 0.4t) \\ (b) \quad q &= 0.2 + 0.2 \sin 0.4t \end{aligned} \quad (6.2)$$

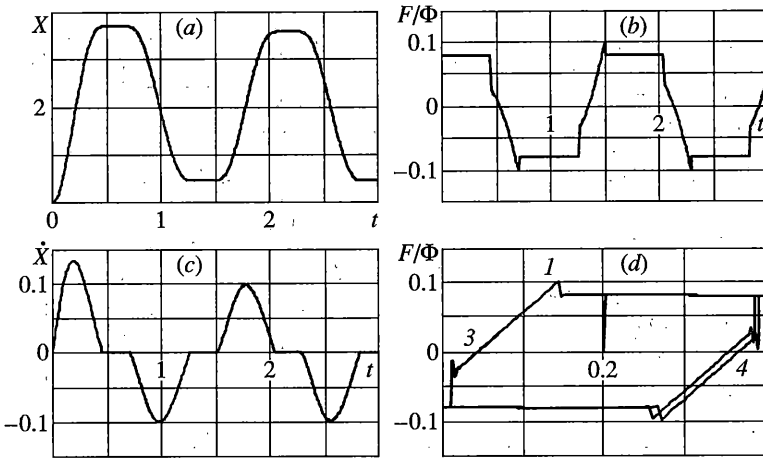
Под действием силы (6.2, а) в устройстве, описываемом дифференциальными уравнениями (3.6) с кулоновым трением, не наблюдается никакого движения. Это объясняется тем, что модуль внешней силы меньше модуля силы кулонова трения. В устройствах, описываемых дифференциальными уравнениями (3.7) и (3.8), по координатам x и X от силы (6.2, а) наблюдаются одинаковые движения (фиг. 4, время t для удобства можно брать в [с]). Это объясняется тем, что параметры жесткости и демпфирования, величины кулонова трения в обоих устройствах одинаковы, в этих зонах жесткость на два порядка выше, чем за их пределами, частота колебаний тела l на порядок выше, чем при движениях за зонами предварительных смещений. Движения, вызванные воздействием (6.2, а), малы (микродвижения), так что нелинейность, характеризующая коэффициентом C , практически не влияет на их характер: колебательные переходные процессы быстро (0.4 с) затухают, причем параметры переходных процессов при появлении ступеньки силы q и при ее снятии одинаковы.

Воздействие на модели (3.6), (3.7), (3.8) силы (6.2, б) отражено на графиках фиг. 5. Характер макродвижений по основным переменным X и \dot{X} при всех вариантах трения практически одинаков, по ним в отличие от предыдущего случая переходные процессы апериодические, наблюдаются существенные нелинейные процессы за счет сил трения — зоны застоя и зоны насыщений по переменным X и \dot{X} . Силы трения практически для всех трех случаев одинаковы. Если в модели (3.6) скачки трения наблюдаются только в точках 1 и 2 за счет $f_s^0 > f_k^0$, то в моделях (3.7), (3.8) появились дополнительные скачки трения в точках 3 и 4 за счет наличия упругих элементов в зонах предварительных смещений, что прослеживается по характеристикам сил $F = F(q)$, $\Phi = \Phi(q)$ на фиг. 5.

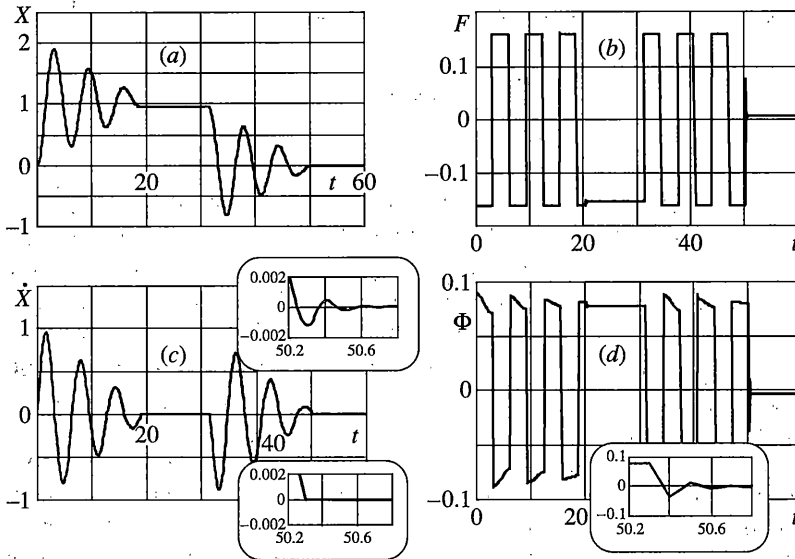
На фиг. 6 представлены графики движений и сил осцилляторов с трением, уравнения которых получены из (3.6), (3.7), (3.8) с учетом $\sigma = \nu \equiv 0$ при сохранении всех остальных параметров в соответствии со значениями (6.1). Сила q изменялась по закону

$$q = 0.5 + 0.5 \operatorname{sign}(\cos 0.06t) \quad (6.3)$$

Графики свидетельствуют о том, что макродвижения в осцилляторах по координатам X и \dot{X} практически одинаковы и затухают по линейным огибающим. Наличие зон предварительных смещений проявляется в микродвижениях в уменьшении величин



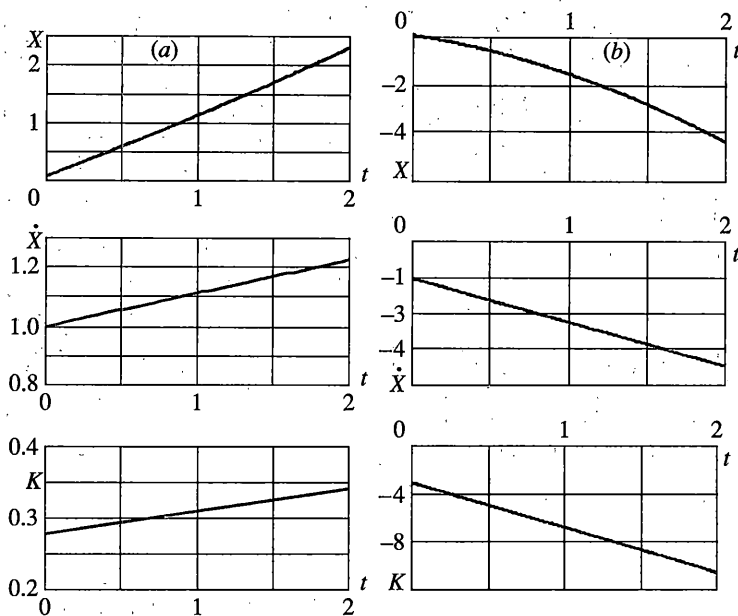
Фиг. 5



Фиг. 6

зон застоя примерно на 10% по сравнению со случаем кулонова трения, а также в появлении скачков силы Φ (фиг. 6), что видно на увеличенном изображении силы трения для интервала времени (15–16.4) с. Данные результаты согласуются с анализом устойчивости пункта 4.

Произведено математическое моделирование процессов движения и изменения других переменных по уравнениям (5.3) и (5.5) для задачи Пэнлеве при следующих безразмерных значениях параметров: $M = 1.00$, $m = 0.01$, $\alpha = 87^\circ 20'$, $n = 30$, $c = 100$, $C = 0$, $k_k = 0.1$, $k_k = k_s$, $t = 0$; $\dot{x}(0) = +1$ и $\dot{x}(0) = -1$; $X(0) = \dot{X}(0) = 0$, $q = +1$.



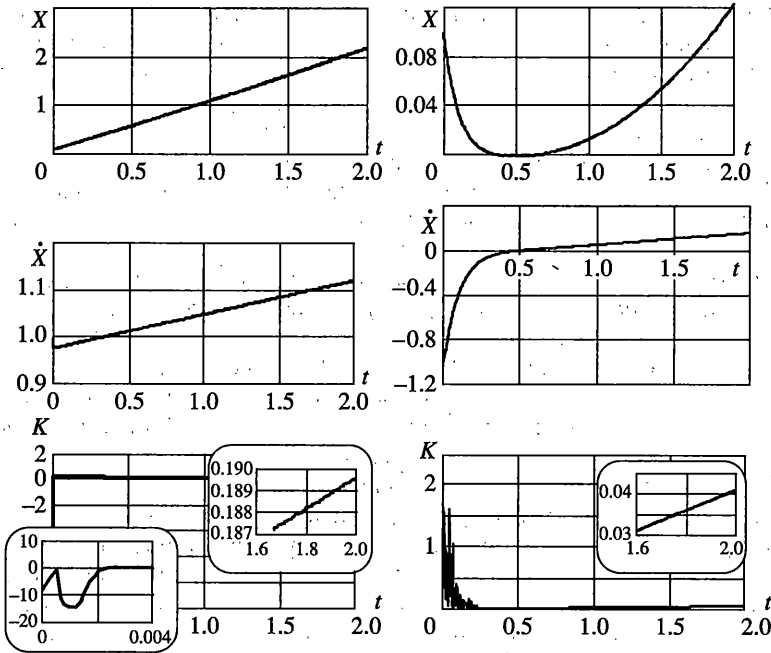
Фиг. 7

Результаты моделирования представлены на фиг. 7, 8 и свидетельствуют о том, что в случае классической задачи (уравнение (5.3)) имеет место парадокс Пэнлеве: при $\dot{x}(0) = +1$ критерий (5.4) выполняется; при $\dot{x}(0) = -1$ – не выполняется, так как левая часть соотношения (5.4) является отрицательной. В случае учета явления предварительного смещения, т.е. при использовании уравнений (5.5) критерий (5.6) выполняется как при $\dot{x}(0) = -1$, так и при $\dot{x}(0) = -1$ за исключением очень короткого промежутка времени переходного процесса собственно модели трения в зоне предварительного смещения $t \in (0 \dots 0.003)$ с.

7. Заключение. Построены три новые модели сил трения. Модель силы кулонова трения (2.3) в отличие от (1.1) является замкнутой, позволяет учесть гистерезис характеристики трения, скачок силы при переходе от статического к динамическому, при применении этой модели в уравнениях движения механических систем позволяет учесть зоны застоя. Модель справедлива для описания как сил трения скольжения, так и сил трения качения. Формулы для сил скольжения – это соотношения (2.3). Для момента силы трения качения известна формула для коэффициента трения качения $k = M/N$, где M – момент сил сопротивления качению [3]. Применяют также безразмерный коэффициент сопротивления качению

$$k^* = k/R \tag{7.1}$$

где R – радиус колеса [3, с. 252]. Модель (2.3) может быть применена в общих уравнениях движения механических систем твердых тел при исследовании их динамики с учетом сил кулонова трения в одностепенных шарнирах, в гироскопах в кардановых подвесах [11], ползунах и других кинематических парах [9, 10]. Наряду с представлением в указанных работах обобщенных сил в виде, например, соотношений (6.6) в [9] (или со-



Фиг. 8

отношений (3), с. 252, в [10]), в указанных уравнениях может быть применена замкнутая модель (2.3) обобщенной силы трения, которая принимает вид

$$\begin{aligned}
 -Q_s^T &= [0.5Q_s^A(1 - \text{sign}(|Q_s^A| - k_s^C|N_s|)) + 0.5k_s^C|N_s|(1 + \text{sign}(|Q_s^A| - k_s^C|N_s|))\text{sign}Q_s^A] \times \\
 &\times (1 - \text{sign}^2 \dot{q}_s) + f_s^k \text{sign} \dot{q}_s \quad (7.2) \\
 f_s^C &\geq f_s^k, \quad f_s^C = k_s^C|N_s|, \quad f_s^k = k_s^k|N_s|
 \end{aligned}$$

где k_s^k, k_s^C – коэффициенты сил статического и динамического компонентов сил трения по s -ой обобщенной координате q_s ; Q_s^T, Q_s^A – обобщенная сила трения и обобщенная активная сила по s -й обобщенной координате q_s . В отличие от [9, 10] модель (7.2) является компактной, и в ней отсутствуют некоторые ограничения, в частности, принято более общее представление о том, что во многих устройствах сила статического трения не меньше динамической. С учетом пояснений к формуле (7.1) в качестве обобщенной силы (7.2) может выступать момент трения качения, и ее можно использовать при исследованиях динамики и статики гироскопов в карданных подвесах, как это, например, выполнено в [11], но с другой моделью трения, роботов и других устройств. Коэффициенты трения рассчитываются по известной методике [3].

Модель силы кулонова трения (2.3) использована в двух моделях сил трения (2.4) и (2.5), в которых учитывается эффект предварительного смещения. Принцип построения этих моделей следующий: предполагается, что в паре трения имеет место кулоново трение, которое передается к телу, движение которого изучается, через динамическое звено второго порядка. Благодаря этому звену проявляется действие предварительного смещения. Это звено, вообще говоря, является гипотетическим. Но для определенности ему в соответствие поставлено так называемое третье тело [3], кото-

рое в моделях соединено с одним из тел пары трения нелинейной пружиной и демпфером, выражения сил для которых заимствованы также из [3], [4]. Коэффициенты жесткости в контактах в касательном и нормальном направлениях можно рассчитать по формулам, полученным на основе теории Герца [3]. В других случаях для этих коэффициентов можно использовать экспериментальные данные. В моделях (2.4), (2.5) в динамическом звене учитываются приведенные коэффициенты жесткости и демпфирования. В данной статье нормальные перемещения в моделях предварительного смещения не учитывались. В многомерных задачах это движение в пределах упругих контактов может быть учтено.

Сравнивая модели (2.4) и (2.5), в которых учитывается эффект предварительного смещения, с моделями, в которых также учитывается этот эффект, приведенными в [1] и [2], можно отметить следующее:

(1) По сравнению с моделью, приведенной в [1], описывается резкий срыв характеристики от значения статического трения к динамическому, в то время, как в [1] дается плавный переход для этих компонентов. Имеют место собственные колебания изучаемого и третьего тела в зоне предварительного смещения, чего не обеспечивает модель [1]. Обоснованнее и проще расчет параметров трения.

(2) По сравнению с моделью, данной в [2], яснее физический смысл, а также проще система дифференциальных уравнений: вместо третьего порядка -- второй, меньше переключающих функций. Это облегчает анализ свойств механических систем с учетом этих моделей, а также моделирование и расчеты. Что касается свойств систем с моделями, приведенными в [2], и (2.4), (2.5), то они практически равнозначны.

Следует отметить, что жесткость упругого элемента и масса третьего тела при анализе резонансных явлений в системе должны выбираться такими, чтобы частота собственных колебаний третьего тела в движении относительно изучаемого тела была значительно выше частот собственных колебаний тела 1 относительно тела 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bliman P.A., Sorine M., Dauron A.* Modeles de frottements secs pour les applications embarques. Applications au contact pneu / sol. // JEF'95.
2. *Захаров Ю.А., Плотников П.К.* Модель силы трения и ее приложение к решению некоторых задач механики // Изв. РАН. МТГ. 1992. № 6. С. 56–65.
3. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 527 с.
4. *Кузнецов В.Д.* Физика твердого тела. Т. 4. Томск: Полиграфиздат, 1947. 542 с.
5. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка / Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
6. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
7. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
8. *Воронков И.М.* Курс теоретической механики. М.: ГИТТЛ, 1955. 552 с.
9. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 3–13.
10. *Матросов В.М., Финогенко И.А.* Аналитическая механика систем твердых тел с трением / "Нелинейная механика" под ред. В.М. Матросова, В.В. Румянцева, А.В. Карапетяна. М.: Физматлит, 2001. С. 39–61.
11. *Климов Д.М.* Затухание собственных колебаний гироскопа в кардановом подвесе с сухим трением // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 3. С. 410–412.
12. *Ишлинский А.Ю.* Механика гироскопических систем. М.: АН СССР, 1963. 482 с.
13. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.
14. *Никитин Е.А., Балашова А.А.* Проектирование дифференцирующих и интегрирующих гироскопов и акселерометров. М.: Машиностроение, 1969. 213 с.

Саратов

Поступила в редакцию
7.05.2002