МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2003

УДК 531.36

© 2003 г. В.Н. КОШЛЯКОВ

О ПЕРЕХОДЕ К УРАВНЕНИЯМ ПРЕЦЕССИОННОЙ ТЕОРИИ В НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Целью настоящей статьи является исследование механики доминирования гироскопических сил в неконсервативных системах. В основу положено некоторое матричное уравнение, полученное в [1, 2]. Сравнение по нормам матриц, входящих в состав указанного уравнения, позволяет выявить механизм доминирования гироскопических сил в системах, содержащих неконсервативные силы. Изложение увязывается с проблемой перехода к уравнениям прецессионной теории в неконсервативных гироскопических системах. Рассмотрен иллюстрирующий пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, описываемую матричным уравнением вида

$$J\ddot{x} + HG\dot{x} = Q \tag{1.1}$$

где $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n)$ – искомый вектор; $J = J^T$, $G = -G^T$ (T – символ транспонирования) – постоянные матрицы размера $n \times n$; $H > 0$ – некоторый постоянный скалярный параметр. Матрица J полагается положительно определенной, а матрица G – невырожденной, чему отвечает n четное. В состав вектора Q обобщенных сил в уравнении (1.1) могут входить силы различной природы, помимо учтенных гироскопических сил.

Уравнению (1.1) сопоставим, в предположении достаточно большой величины скалярного параметра $H > 0$ (этому соответствует предположение о достаточно быстром вращении гироскопов), и оговоренной выше невырожденности матрицы G, упрощенное уравнение, получаемое из (1.1) лишь сохранением в левой части члена, содержащего множителем параметр H:

$$HG\dot{u} = Q \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) иногда называют уравнением прецессионной теории гироскопов, а соответствующие ему скалярные уравнения – прецессионными. Прецессионные уравнения находят широкое применение в прикладной теории гироскопов.

Методика составления прецессионных уравнений применительно к сложным системам, состоящим из совокупности твердых тел, установленных на подвижных основаниях, детально разработана А.Ю. Ишлинским [3].

Тем не менее переход к прецессионным уравнениям сам по себе требует в ряде случаев надлежащего обоснования, так как не всегда правомерен. Обоснованию корректного перехода к уравнениям прецессионной теории посвящены исследования ряда авторов [4–8].

Установлено, что определенным препятствием перехода к прецессионным уравнениям является наличие в исходных уравнениях неконсервативных позиционных сил. В этом случае асимптотически устойчивое решение, полученное в рамках прецессионной теории, может оказаться, в силу расходимости быстрых нутационных колебаний, неустойчивым в точных уравнениях. В такой ситуации без учета диссипативных сил, всегда присутствующих в реальной системе, никаким доминированием гироскопических сил, т.е. никаким увеличением скалярного параметра H добиться устойчивости невозможно.

В данной работе рассматривается новый подход к проблеме доминирования гироскопических сил в неконсервативных системах, в основе которого лежит структура преобразования уравнения (1.1).

Допустим, что на рассматриваемую систему, помимо учтенных в (1.1) гироскопических сил, действуют постоянные диссипативные, консервативные и неконсервативные позиционные силы. Уравнение (1.1) в этом случае записывается в виде [4]:

$$J\ddot{x} + (D + HG)\dot{x} + (\Pi + P)x = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $D = D^T$ – положительно определенная матрица диссипативных сил, $\Pi = \Pi^T$ – симметрическая матрица консервативных сил, $P = -P^T$ – кососимметрическая матрица неконсервативных позиционных сил. Будем далее считать

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_n), \quad D = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) \tag{1.4}$$

В системах, содержащих гироскопы, под J следует понимать матрицу суммарных моментов инерции относительно соответствующих осей.

В [1, 2] показано, что преобразование

$$x = L(t)\xi \tag{1.5}$$

где матрица $L(t)$ удовлетворяет условию

$$D\dot{L} = -PL \tag{1.6}$$

приводит к матричному уравнению относительно нового вектора ξ:

$$\ddot{\xi} + L^{-1}(t)VL(t)\dot{\xi} + L^{-1}(t)WL(t)\xi = 0 \tag{1.7}$$

$$V = J^{-1}(D + HG) + 2A, \quad W = A^2 + J^{-1}(\Pi + HGA), \quad A = -D^{-1}P \tag{1.8}$$

Условие (1.6) также может быть представлено в виде матричного уравнения

$$\dot{L} = AL \tag{1.9}$$

решение которого в силу предположенного постоянства матриц D и P будет

$$L(t) = e^{At}L(0) \tag{1.10}$$

где $L(0)$ соответствует начальному отсчету времени. В случае $L(0) = E$ (E – единичная матрица) преобразование (1.5) не изменяет свойств устойчивости уравнения (1.1), так как в этом случае $L(t)$ будет, как это показано в [2], матрицей Ляпунова.

Из уравнения (1.7) следует, что при выполнении соотношений

$$L(t)V = VL(t), \quad L(t)W = WL(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{1.11}$$

т.е. когда матрицы $L(t)$, V и соответственно $L(t)$, W коммутируют, уравнение (1.6) существенно упрощается и принимает вид

$$\ddot{\xi} + V\dot{\xi} + W\xi = 0 \tag{1.12}$$

содержащий V и W в качестве постоянных матричных коэффициентов. Умножая уравнение (1.12) слева на матрицу J, будем иметь

$$J\ddot{\xi} + V_1\dot{\xi} + W_1\xi = 0 \tag{1.13}$$

где в силу соотношений (1.8) следует считать

$$V_1 = D + HG + 2JA, \quad W_1 = HGA + JA^2 + \Pi, \quad A = -D^{-1}P \tag{1.14}$$

В [2] доказана теорема, содержащая необходимые и достаточные условия, при которых соблюдаются соотношения (1.11), приводящие к уравнению (1.12). Эти условия, которые приводятся здесь без доказательства, выражаются непосредственно через матрицы уравнения (1.3) и имеют вид

$$PJ^{-1}D = DJ^{-1}P, \quad PD^{-1}G = GD^{-1}P, \quad PD^{-1}\Pi = \Pi D^{-1}P \tag{1.15}$$

В цитируемой работе показано также, что выполнения первых двух условий (1.15) достаточно для того, чтобы матрица W_1 оказалась симметрической и, следовательно, не имеющей неконсервативных структур. Действительно, в случае симметричности матрицы W_1 должно выполняться условие $W_1 = W_1^T$. Учитывая, что матрица Π по определению симметрическая, имеем

$$\begin{aligned} W_1 - W_1^T &= J(D^{-1}P)^2 - HG(D^{-1}P) - (PD^{-1})^2 J + (PD^{-1})HG = \\ &= (JD^{-1}P)D^{-1}P - PD^{-1}(PD^{-1}J) + H(PD^{-1}G - GD^{-1}P) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Последнее слагаемое в (1.16) обращается в нуль при выполнении второго из условий (1.15). Оставшиеся слагаемые в (1.16) взаимно уничтожаются в силу первого из условий (1.15), из которого непосредственно следует, что $JD^{-1}P = PD^{-1}J$. Итак $W_1 = W_1^T$, что и требуется.

Условие $W_1 = W_1^T$ свидетельствует об отсутствии неконсервативных структур в составе матрицы W_1. Тем самым оно оправдывает законность применения для рассматриваемого случая теоремы Кельвина – Четаева, несмотря на наличие неконсервативных позиционных сил в исходном уравнении (1.1). В соответствии с указанной теоремой при отсутствии сил с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил положительная определенность симметрической матрицы W_1 влечет за собой устойчивость (неасимптотическую) тривиального решения уравнения (1.13) для указанных условий. А в этом случае добавление сил с полной диссипацией и произвольных гироскопических сил соответствует уже асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (1.13).

2. Собственно-неконсервативные системы. Условия погашения нутации. Рассмотрим неконсервативную механическую систему, не содержащую потенциальных сил. Такие системы иногда называются собственно-консервативными [9]. Им соответствует $\Pi = 0$ в уравнении (1.3).

Известно, что механическая система, находящаяся под действием одних только неконсервативных сил, всегда неустойчива. Однако при добавлении к указанным силам диссипативных и гироскопических сил и при оговоренном выше четном числе определяющих координат в системе может быть обеспечена асимптотическая устойчивость [4]. Указанное свойство обеспечивается надлежащим доминированием гироскопических сил. Естественно, что при этом происходит и погашение нутационных колебаний. Отмеченные обстоятельства удобно использовать при обоснованном переходе к уравнениям прецессионной теории.

Обратимся к выражениям (1.15). Под $\Pi = 0$ достаточно удовлетворить лишь первым двум из названных выражений. Предположим, что диссипативные силы (диссипация предполагается полной), представленные в уравнении (1.3) вектором $D\dot{x}$, обусловлены лишь силами сопротивления сферы. В этом случае вектор $D\dot{x}$ вообще зависит не только от свойств среды, но и от конфигурации системы. Следуя концепции Зоммерфельда – Гринхилла, положим [10–12]:

$$D = \mu J \tag{2.1}$$

где $\mu > 0$ – некоторый малый постоянный параметр, зависящий от свойств (платности) среды, J – матрица моментов инерции рассматриваемой системы. При условии (2.1) первое из выражений (1.15) тождественно удовлетворяется. Отметим также, что с учетом условия (2.1) выражение для матрицы V_1, согласно (1.14), имеет вид

$$V_1 = D + HG + 2JD^{-1}P^T = D + \Gamma, \quad (\Gamma = HG + 2\mu^{-1}P^T) \tag{2.2}$$

Таким образом, кососимметричность матрицы Γ сохраняется.

В предположении доминирования гироскопических сил, когда скалярному множителю H в (1.1) и (1.3) можно придавать достаточно большие значения, определяющим слагаемым в выражении (1.16) будет матричное слагаемое, содержащее множителем параметр H. Действительно, вводя малую величину $\varepsilon = 1/H$, представим выражение (1.16) в форме

$$W_1 - W_1^T = H\{PD^{-1}G - GD^{-1}P + O(\varepsilon)\} \tag{2.3}$$

$$O(\varepsilon) = \varepsilon\{(JD^{-1}P)D^{-1}P - PD^{-1}(PD^{-1}J)\} \tag{2.4}$$

Таким образом с точностью до $O(\varepsilon)$ главная часть матрицы (2.3) будет симметрической при выполнении лишь второго из соотношений (1.15).

Как известно [13], всякая действительная кососимметрическая матрица A ортогонально подобна канонической кососимметрической матрице

$$K = \mathrm{diag}\left(\begin{Vmatrix} 0 & \nu_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & \nu_q \\ -\nu_q & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0\right) \tag{2.5}$$

содержащей клетки первого и второго порядка. При этом клетки первого или второго порядка могут отсутствовать. Клетки первого порядка соответствуют нулевым характеристическим числам матрицы A, а второго порядка – парам сопряженных характеристических чисел $\pm i\nu_k$, $\nu_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$.

В связи с этим рассмотрим класс гироскопических систем, описываемых уравнением (1.3), в котором кососимметрические матрицы G и P изначально представляются в клеточно-диагональной форме, содержащей лишь клетки второго порядка:

$$G = \mathrm{diag}\left(\begin{Vmatrix} 0 & g_1 \\ -g_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & g_q \\ -g_q & 0 \end{Vmatrix}\right)$$

$$P = \mathrm{diag}\left(\begin{Vmatrix} 0 & p_1 \\ -p_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & p_q \\ -p_q & 0 \end{Vmatrix}\right), \quad 2q = n \tag{2.6}$$

$$g_k > 0, \quad p_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

К числу подобных систем относятся одногироскопные вертикали с радиальной коррекцией, полигироскопные силовые гирогоризонты, а также некоторые типы гироскопических курсоуказателей.

Обращаясь к условиям (1.15), замечаем, что в силу выражений (1.4) и (2.6) второе из названных условий выполняется.

С учетом формулы (2.1), основывающейся на концепции Зоммерфельда – Гринхилла, явные выражения матриц V_1 и W_1 применительно к классу (2.6) получены в [1]. Эти выражения имеют вид

$$V_1 = D + \mathrm{diag}\left(\begin{Vmatrix} 0 & h_1 \\ -h_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & h_q \\ -h_q & 0 \end{Vmatrix}\right) \tag{2.7}$$

$$h_k = \mu^{-1}(\mu H g_k - 2p_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{2.8}$$

и соответственно

$$W_1 = \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_{2q}), \quad 2q = n \tag{2.9}$$

$$c_{2k-1} = \mu^{-2} J_{2k}^{-1} p_k (\mu H g_k - p_k), \quad c_{2k} = J_{2k} J_{2k-1}^{-1} c_{2k-1} \tag{2.10}$$

Если не следовать концепции Зоммерфельда – Гринхилла, то матрица W_1 остается диагональной, причем

$$\begin{aligned} c_{2k-1} &= (b_{2k} b_{2k-1})^{-1} p_k (H g_k b_{2k-1} - p_k J_{2k-1}) \\ c_{2k} &= (b_{2k} b_{2k-1})^{-1} p_k (H g_k b_{2k} - p_k J_{2k}), \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Величины c_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) являются коэффициентами Пуанкаре для рассматриваемого случая [14]. Положительность всех c_i соответствует устойчивости (неасимптотической) уравнения (1.13) при отсутствии в нем диссипативных и гироскопических структур. В случае выполнения условий $c_i > 0$ ($i = 1, \ldots, n$) добавление указанных структур сообщает уравнению (1.13), а следовательно и уравнению (1.3), согласно теореме Кельвина – Четаева свойство асимптотической устойчивости применительно к оговоренным выше условиям.

При использовании концепции Зоммерфельда – Гринхилла положительность всех коэффициентов Пуанкаре обеспечивается посредством вытекающих из выражений (2.10) неравенств [1]:

$$H g_k \mu - p_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{2.12}$$

При использовании выражений (2.11) должны выполняться неравенства

$$H g_k b_{2k-1} - p_k J_{2k-1} > 0, \quad H g_k b_{2k} - p_k J_{2k} > 0 \tag{2.13}$$

Выполнение условий (2.12) и (2.13) при наличии сил с полной диссипацией, а также произвольных гироскопических сил, обеспечивает асимптотическую устойчивость и соответственное погашение нутационных колебаний собственно-неконсервативных систем, в которых матрицы G и P выражаются посредством представлений (2.6). При переходе к уравнениям прецессионной теории условия (2.12) или (2.13) должны быть оговорены.

3. Учет потенциальных сил. Оценки по нормам. При наличии потенциальных сил рассмотренные в п. 2 условия погашения нутации недостаточны для обеспечения асимптотической устойчивости всей системы в целом. В этом случае при использовании условий (1.15) следует предусмотреть третье из названных условий. Это условие, однако, накладывает определенные ограничения на выбор параметров системы, о чем, в частности, свидетельствует пример, рассмотренный в [2].

Кроме того, третье из условий (1.15), равно как и второе из них, справедливо лишь при $D \neq 0$. Поэтому с его помощью не может быть осуществлено вырождение на случай прецессионной теории для тех систем, в которых асимптотическая устойчивость в прецессионных уравнениях достигается без введения диссипативных сил, т.е. когда $D = 0$. Примером могут служить известные уравнения гироскопического маятника с радиальной коррекцией:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} + Pl\alpha + s\beta &= 0 \\ A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + Pl\beta - s\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

содержащие потенциальные силы $Pl\alpha$ и $Pl\beta$. Легко убедиться в том, что соответствующие системе (3.1) прецессионные уравнения асимптотически устойчивы при $s > 0$.

Поэтому, выяснив условия погашения нутации, предпочтительнее обратиться непосредственно к соответствующей прецессионной системе

$$(D + HG)\dot{x} + Cx = 0 \quad (C = \Pi + P) \tag{3.2}$$

и обеспечить ее асимптотическую устойчивость [4]. При этом разделение позиционной матрицы C в системе, описываемой уравнением (3.2), на сумму $\Pi + P$ симметрической и кососимметрической матриц необязательно.

Обстоятельства доминирования гироскопических сил в неконсервативных системах можно выяснить и с помощью оценок по нормам применительно к матричным выражениям (1.14). Не заменяя, конечно, строгих условий устойчивости, рассмотренных в п. 2, они, как далее показывается, согласуются с указанными условиями и в силу своей простоты удобны на первых этапах исследования данной конкретной системы.

Обращаясь к выражениям (1.14), замечаем, что в матрицах V_1 и W_1 присутствуют слагаемые как зависящие от матрицы HG гироскопических сил, так и не зависящие от нее (например, матрица A). Это позволяет осуществить сравнение матриц по нормам. Обозначив через $\|\cdot\|$ какую-либо из норм, отвечающих матричным слагаемым в (1.14), потребуем выполнения условий

$$\|HGA\| > \|JA^2\| + \|\Pi\|, \quad \|HG\| > 2\|JA\| \tag{3.3}$$

В случае доминирования гироскопических сил условия (3.3) должны выполняться с достаточным запасом.

Для сравнения матриц оказывается удобным использование l_1-нормы, которая для произвольной квадратной матрицы $T = \|t_{ij}\|_{i,\,j\,=\,1}^{n}$ задается формулой [15]:

$$\|T\|_1 = \sum_{i,\,j\,=\,1}^{n} |t_{ij}| \tag{3.4}$$

4. Четырехгироскопный силовой гирогоризонт. Ниже рассматриваются уравнения силового четырехгироскопного гирогоризонта в предположении его установки на вращающемся основании. Эти уравнения имеют вид [1, 2, 16, 17]:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + 2H\dot{x}_2 + 2H\omega x_3 + s_1x_2 &= 0 \\ J_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - 2H\dot{x}_1 + 2H\omega x_4 - s_2x_1 &= 0 \\ J_2\ddot{x}_3 + b_2\dot{x}_3 + 2H\dot{x}_4 + 2H\omega x_1 + s_2x_4 &= 0 \\ J_3\ddot{x}_4 + b_3\dot{x}_4 - 2H\dot{x}_3 + 2H\omega x_2 - s_1x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Осуществляя в системе (4.1) разделение матрицы при позиционных членах на симметрическую и кососимметрическую составляющие, имеем частный случай уравнения (1.3):

$$
\begin{gathered}
x = \mathrm{col}(x_1, x_2, x_3, x_4) J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_2, J_3) \\
D = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_2, b_3), \quad HG = 2H\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_1), \quad P = s\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_1) \\
\Pi = \begin{Vmatrix} m\sigma_2 & 2H\omega E \\ 2H\omega E & m\sigma_2 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \\
s = 1/2(s_1 + s_2), \quad m = 1/2(s_1 - s_2)
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Структура матриц HG и P в выражениях (4.2) соответствует представлениям (2.6), поэтому второе из условий (1.15) выполняется.

В случае использования концепции Зоммерфельда – Гринхилла условие погашения нутации, непосредственно вытекающее из неравенств (2.12), получено в [1] и в обозначениях (4.2) имеет вид

$$
2H\mu > s \tag{4.3}
$$

Для учета потенциальных сил, входящих в систему (4.1) (они имеют множителем величину $2H\omega$), можно применять условия (1.15) с последующим переходом к уравнению (1.13). При этом следует учесть третье из указанных условий. Последнее, как уже отмечалось в п. 3., может накладывать определенные ограничения на параметры системы. В частности, для рассматриваемой системы должны выполняться равенства [2]:

$$
s_1 = s_2, \quad J_1 = J_3 \tag{4.4}
$$

Поэтому при учете потенциальных сил предпочтительнее воспользоваться прецессионными уравнениями, соответствующими системе (4.1). Для случая $b_1 = b_3$ исследование устойчивости прецессионных уравнений проведено в [16] с помощью критерия Гурвитца и сводится к неравенству

$$
s_1 s_2 > \omega^2 b_1 b_2 \tag{4.5}
$$

К результатам, согласующимся с условиями (4.3) и (4.5), приводит и изложенная в п. 3 методика, основывающаяся на сравнении матриц по нормам. С учетом выражений (1.14) и (4.2) имеем

$$
\begin{aligned}
HGA &= 2Hs\mathrm{diag}(b_2^{-1}, b_1^{-1}, b_3^{-1}, b_2^{-1}) \\
JA^2 &= -s^2\mathrm{siag}(J_1 b_1^{-1} b_2^{-1}, J_2 b_1^{-1} b_2^{-1}, J_2 b_2^{-1} b_3^{-1}, J_3 b_2^{-1} b_3^{-1})
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Теперь, учитывая выражение (3.4), получим

$$
\begin{aligned}
\|HGA\|_1 &= 2Hs(b_1^{-1} + 2b_2^{-1} + b_3^{-1}) \\
\|JA^2\|_1 &= s^2 b_2^{-1}[(J_1 + J_2)b_1^{-1} + (J_2 + J_3)b_3^{-1}] \\
\|\Pi\|_1 &= 4(2H\omega + |m|)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Эти выражения надлежит согласовать с первым из неравенств (3.3). При этом замечаем, что величина $|m| = 1/2|s_1 - s_2|$ оказывается пренебрежимо малой в сравнении с любой из величин $2Hsb_k^{-1}$ ($k = 1, 2, 3$), находящихся в составе $\|HGA\|_1$, что приводит к оценкам

$$2H(s_1 + s_2) \geqslant b_k|s_1 - s_2| \quad (k = 1, 2, 3) \tag{4.8}$$

Таким образом, при достаточно большом кинетическом моменте каждого из четырех гироскопов, имеющихся в рассматриваемой системе, и малых величинах b_k коэффициентов диссипации различие в величинах характеристик коррекции s_1 и s_2 несущественно.

Учет оставшихся членов приводит в конечном счете к неравенствам вида

$$\begin{aligned} &2Hb_1(s - \omega b_2) - J_1 s^2 > 0, \quad 2Hb_2(s - \omega b_1) - J_2 s^2 > 0 \\ &2Hb_2(s - \omega b_3) - J_2 s^2 > 0, \quad 2Hb_3(s - \omega b_2) - J_3 s^2 > 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Рассмотрим частные случаи неравенств (4.9). Случай $\omega = 0$ соответствует неподвижному основанию и, вместе с тем, отсутствию в исходных уравнениях (4.1) потенциальных сил. Соответственно приходим к неравенствам

$$2Hb_1 > J_1 s, \quad 2Hb_2 > J_2 s, \quad 2Hb_3 > J_3 s \tag{4.10}$$

Эти же неравенства получаются из условий (2.13) положительности коэффициентов Пуанкаре c_i (если учесть обозначения в системе (4.1)) и соответствуют погашению нутационных колебаний.

Если, следуя концепции Зоммерфельда – Гринхилла, удовлетворить в неравенствах (4.10) условию (2.1), то они приводят к неравенству (4.3).

Неравенства (4.9) допускают вырождение на случай прецессионной теории. Для этого в названных неравенствах следует пренебречь членами, содержащими моменты инерции J_s ($s = 1, 2, 3$). В результате приходим к условиям

$$2Hb_1(s - \omega b_1) > 0, \quad 2Hb_3(s - \omega b_2) > 0, \quad 2Hb_2(s - \omega b_3) > 0 \tag{4.11}$$

Коэффициенты при скобках в (4.11) всегда положительны. Поэтому получаем условия

$$s > \omega b_1, \quad s > \omega b_2, \quad s > \omega b_3 \tag{4.12}$$

Полагая здесь $b_1 = b_3$ и учитывая обозначения в (4.2), имеем

$$s_1 + s_2 > \omega(b_1 + b_2) \tag{4.13}$$

Для выполнения полученного условия достаточно, например, выбрать $s_1 > \omega b_1$, $s_2 > \omega b_2$, откуда сразу получается неравенство (4.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях неконсервативных систем // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 933–941.
2. *Кошляков В.Н., Макаров В.Л.* К теории гироскопических систем с неконсервативными силами // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 698–704.
3. *Ишлинский А.Ю.* Об уравнениях прецессионной теории гироскопов в форме уравнений движения изображающей точки в картинной плоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 801–809.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. *Новоселов В.С.* Движение гироскопических систем // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 176–178.

6. *Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В.* О прецессионных уравнениях гироскопических систем // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2. С. 230–237.
7. *Горелова Е.Я., Стрыгин В.В.* Полное разделение движения в некоторых системах гироскопического типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 8–13.
8. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
9. *Метелицын И.И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31–34.
10. *Булгаков Б.В.* Прикладная теория гироскопов: М.: Изд-во МГУ, 1976. 401 с.
11. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
12. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С. 5–13.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
14. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 208 с.
15. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
16. *Ройтенберг Я.Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1975. 592 с.
17. *Агафонов С.А.* Об асимптотической устойчивости неконсервативных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 3–8.

Киев

Поступила в редакцию
18.12.2002