МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2003

УДК 531.381

© 2003 г. И.А. МУХАМЕТЗЯНОВ

ОБ УСЛОВИЯХ ИНВАРИАНТНОСТИ И КАЧЕСТВЕННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ПРЕСЛЕДУЮЩЕГО ТЕЛА

Строятся непрерывные и релейные алгоритмы управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость "в большом" программной ориентации преследующего тела с заданным оптимальным качеством переходного процесса.

Предлагается также алгоритм построения вектора распределения случайных возмущений между каналами управления, при котором заданное программное многообразие и качество стабилизации этого многообразия являются инвариантными к этим возмущениям.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, жестко связанное с подвижной системой координат $cxyz$. Главный вектор управляющих сил $\tilde{\mathbf{U}}_2$ построим так, чтобы центр масс тела c двигался по кривой погони за преследуемой точкой o при ее движении по произвольному закону $\mathbf{r}_0(t)$ относительно инерциальной системы координат $o_1x_1y_1z_1$ [1]. При этом вектор управляющих моментов $\tilde{\mathbf{U}}_1$ должен быть таким, чтобы одна ось тела, например cz, асимптотически стремилась занять направление $\mathbf{c}o$. Следовательно, программная ориентация тела в этом случае может быть задана выражениями

$$\omega_1^i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \omega_2^i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ – орты осей cx и cy; e – орт вектора co; $\mathbf{v}$ – вектор абсолютной скорости центра масс тела; $(\cdot)$ – знак скалярного произведения.

Известно, что движение центра масс в инерциальной системе координат $o_1x_1y_1z_1$ и вращательное движение тела вокруг центра масс в осях подвижной системы координат $cxyz$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} I\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_* + \tilde{\mathbf{U}}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_1\delta \\ m\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{U}}_2 + \tilde{\mathbf{R}}_2\delta \end{aligned} \tag{1.2}$$

где I – тензор инерции тела в точке c; $\boldsymbol{\omega}(p, q, r)$ – мгновенная угловая скорость тела; p, q, r – проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси cx, cy, cz; m – масса тела; $\mathbf{M}_*$ – главный момент заданных сил относительно центра масс c; $\mathbf{f}$ – главный вектор заданных сил; $\tilde{\mathbf{U}}_1$ – главный момент управляющих сил, δ – случайное возмущение, $\tilde{\mathbf{R}}_1$, $\tilde{\mathbf{R}}_2$ – трехмерные векторы, определяемые ниже.

Уравнения (1.2) представим в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\omega}} = I^{-1}[(I\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_*] + \mathbf{u}_1 + \mathbf{R}_1\delta, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}/m + \mathbf{u}_2 + \mathbf{R}_2\delta \\ &\mathbf{u}_1 = I^{-1}\tilde{\mathbf{U}}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \tilde{\mathbf{U}}_2/m, \quad \mathbf{R}_1 = I^{-1}\tilde{\mathbf{R}}_1, \quad \mathbf{R}_2 = \tilde{\mathbf{R}}_2/m \end{aligned} \tag{1.3}$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: построить выражение векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ так, чтобы многообразие (1.1) было асимптотически устойчивым "в большом" (при $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{e} > 0$) программным многообразием системы (1.3) с заданным оптимальным качеством переходного процесса при любых случайных возмущениях δ.

2. Алгоритм непрерывного управления. Дифференцируя по времени выражения (1.1) в силу (1.3), получим следующие уравнения для отклонений от многообразия (1.1):

$$\frac{d^2\omega_1^i}{dt^2} = B_1^i + \tilde{Q}_1^i + \mathbf{c}_i^T\mathbf{R}_1\delta, \quad \frac{d\omega_2^i}{dt} = K_1^i + \tilde{Q}_2^i + \mathbf{k}_i^T R_2\delta, \quad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

$$B_1^i = \mathbf{c}_i^T I^{-1}[(I\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_*] + \dot{\mathbf{c}}_i^T\boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{k}}_i^T\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{k}_i^T\ddot{\mathbf{e}}$$

$$K_1^i = \mathbf{k}_i^T\frac{1}{m}\mathbf{f} + \mathbf{v}^T(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}_i) \tag{2.2}$$

$$\tilde{Q}_1^i = \mathbf{c}_i^T\mathbf{u}_1, \quad \tilde{Q}_2^i = \mathbf{k}_i^T\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{c}_i = \mathbf{k}_i\times\mathbf{e}$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{c}_i$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{M}_*$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ – векторы-столбцы, δ – скаляр.

Из (2.1) видно, что эта система будет инвариантной к возмущениям δ при

$$\mathbf{c}_i^T\mathbf{R}_1 = 0, \quad \mathbf{k}_i^T\mathbf{R}_2 = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.3) видно, что при выборе векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ коллинеарными векторам $\mathbf{e}$ и $\mathbf{k}_3$, соответственно, скалярные произведения $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{R}_2$, как произведения ортогональных векторов, будут равны нулю. Следовательно, искомые векторы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ можно выбрать в виде

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_1\mathbf{e}, \quad \mathbf{R}_2 = \lambda_2\mathbf{k}_3 \tag{2.4}$$

где λ_1, λ_2 – произвольно выбираемые скалярные величины не равные нулю.

При условии (2.3) система уравнений (2.1) принимает следующую векторную форму

$$\ddot{\omega}_1 = B_1 + Q_1, \quad \dot{\omega}_2 = K_1 + \tilde{Q}_2$$

$$\omega_i = \begin{Vmatrix}\omega_i^1\\ \omega_i^2\end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix}B_1^1\\ B_1^2\end{Vmatrix}, \quad \tilde{Q}_1 = \begin{Vmatrix}\tilde{Q}_1^1\\ \tilde{Q}_1^2\end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

Заметим, что такую же форму уравнения (2.5) имеют и при отсутствии возмущений в системе (1.2). Умножая уравнения (2.5) на определенно-положительные симметрические (2×2) матрицы A и N, получим

$$A\ddot{\omega}_1 = B + Q_1, \quad N\dot{\omega}_2 = K + Q_2 \tag{2.6}$$

$$B = AB_1, \quad K = NK_1, \quad Q_1 = A\tilde{Q}_1, \quad Q_2 = N\tilde{Q}_2 \tag{2.7}$$

Выражения (2.2), содержащие искомые векторы $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, при учете обозначений (2.7) можно представить в виде

$$c^T\mathbf{u}_1 = A^{-1}Q_1, \quad k^T\mathbf{u}_2 = N^{-1}Q_2 \tag{2.8}$$

$$c = \begin{Vmatrix}c_{11} & c_{21}\\ c_{12} & c_{22}\\ c_{13} & c_{23}\end{Vmatrix}, \quad k = \begin{Vmatrix}k_{11} & k_{21}\\ k_{12} & k_{22}\\ k_{13} & k_{23}\end{Vmatrix} \tag{2.9}$$

где c_{i1}, c_{i2}, c_{i3} – элементы векторов c_i; k_{i1}, k_{i2}, k_{i3} – элементы векторов k_i.

В уравнениях (2.6) вместо $\dot{\omega}_1$ введем замену [2]:

$$y = \dot{\omega}_1 - \varphi(\omega_1, t), \quad \varphi(0, t) = 0 \tag{2.10}$$

где $\varphi(\omega_1, t)$ – произвольная двумерная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми элементами, допускающая бесконечно малый высший предел по модулю.

Умножая первое уравнение (2.6) скалярно на y, а второе на вектор ω_2, затем складывая, получим уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\omega_2^T N\omega_2 + y^T A y) = \\ &= y^T\left\{Q_1 + B + A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^T y - A\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^T f + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] + \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}y\right\} + \omega_2^T\left(Q_2 + K + \frac{1}{2}\frac{dN}{dt}\omega_2\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Если векторы Q_1 и Q_2 выбрать в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Dy - F_1\omega_1 - B - A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^T y + A\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^T \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] - \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}y \\ Q_2 &= -K - \frac{1}{2}\frac{dN}{dt}\omega_2 - F_2\omega_2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

то получим

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = -y^T D y + \left(\varphi^T F_1 + \omega_1^T \frac{\dot{F}_1}{2}\right)\omega_1 - \omega_2^T F_2\omega_2 \tag{2.13}$$

где D, F_1, F_2 – симметрические определенно-положительные матрицы, $V = \omega_2^T N\omega_2 + y^T A y + \omega_1^T F_1\omega_1$ – функция Ляпунова, построенная определенно-положительной при всех y, ω_1, ω_2, t, допускающая бесконечно малый высший предел. Следовательно, в случае определенной отрицательности функции $(\varphi^T F_1 + \omega_1^T \dot{F}_2/2)\omega_1$ правая часть равенства (2.13) будет определенно-отрицательной по y, ω_1, ω_2 и при этом программное многообразие (1.1) будет асимптотически устойчивым "в большом". В частности, при $\varphi = -\omega_1$ векторы (2.12) имеют вид

$$Q_1 = -Dy - F_1\omega_1 - B - A\dot{\omega}_1 - \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}y$$

$$Q_2 = -F_2\omega_2 - K - \frac{1}{2}\frac{dN}{dt}\omega_2$$

Здесь dA/dt, dN/dt предполагаются ограниченными, так же как $d\varphi/dt$.

Заметим, что Q_1 и Q_2 выражаются через 6-мерный вектор $\mathbf{u}$ равенствами, приведенными в (2.2), (2.7), которые можно представить одним 4-мерным векторным уравнением

$$\Omega\mathbf{u} = Q, \quad \Omega = \begin{Vmatrix} c^T \\ k^T \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Vmatrix} \tag{2.14}$$

Решение уравнения (2.14) можно представить в виде суммы двух составляющих [3]: $\mathbf{u}_n = \Omega^T\lambda$ и u_τ, причем $\mathbf{u}_\tau$ удовлетворяет уравнению $\Omega\mathbf{u}_\tau = 0$, где λ – 4-мерный вектор, определяемый из уравнения $\Omega \mathbf{u}_n = Q$ в виде [3]:

$$\lambda = (\Omega\Omega^T)^{-1}Q$$

Следовательно, составляющей $\mathbf{u}_n$ вектора $\mathbf{u}$ является

$$\mathbf{u}_n = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}Q \tag{2.15}$$

Если составляющую $\mathbf{u}_\tau$ вектора $\mathbf{u}$ положить равной нулю, то вектор $\mathbf{u}$ будет иметь вид (2.15) и иметь минимальную евклидову норму [3]. Заметим, что при выборе в качестве вектора управления $\mathbf{u}$ вектор вида $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_\tau$, где

$$\mathbf{u}_\tau = \begin{Vmatrix} \lambda_1 e \\ \lambda_2 k_3 \end{Vmatrix}$$

появляется возможность управлять скоростью движения центра масс тела вдоль вектора $\mathbf{co}$ в зависимости от расстояния $|\mathbf{co}|$ и угловой скоростью вращения тела вокруг вектора $\mathbf{k}_3$ соответствующим выбором значений скалярных величин λ_1 и λ_2, входящих в (2.4).

3. Оценка качества переходного процесса. Теперь с помощью уравнения (2.13) для функции Ляпунова V оценим качество переходного процесса. Интегрируя по времени обе части (2.13), получим

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\omega_2^T F_2 \omega_2 + y^T D y - \left(\varphi^T F_1 + \omega_1^T \frac{\dot{F}_1}{2}\right)\omega_1\right] dt = \frac{1}{2}V_0, \quad V_0 = V(t_0) \tag{3.1}$$

Это равенство является интегральным критерием качества переходного процесса. Имея свободу выбора матриц D, F_1, F_2, N, A и функции φ, подынтегральному выражению и функции Ляпунова можно придать нужную структуру с необходимыми весовыми элементами.

При задании конкретного числового значения V_0 уравнение

$$\frac{1}{2}(\omega_{20}^T N \omega_{20} + y_0^T A y_0 + \omega_{10}^T F_1 \omega_{10}) = V_0 \tag{3.2}$$

в 6-мерном пространстве $\dot{\omega}_{10}$, ω_{10}, ω_{20} описывает эллипсоид, поверхность которого является геометрическим местом точек, обладающих следующим свойством. Для начавшихся из них движений имеет место интегральный критерий качества переходного процесса (3.1), а для всех начальных значений $\dot{\omega}_{10}$, ω_{10}, ω_{20} внутри эллипсоида (3.2) справедлива оценка качества переходного процесса

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\omega_2^T F_2 \omega_2 + y^T D u - \left(\varphi^T F_1 + \omega_1^T \frac{\dot{F}_1}{2}\right)\omega_1\right] dt < \frac{1}{2}V_0$$

4. Повышение качества переходного процесса оптимальным управлением. Для повышения качества переходного процесса введем в правую часть системы (1.2) дополнительные 3-мерные векторы $\tilde{\mathbf{u}}_1$ и $\tilde{\mathbf{u}}_2$ оптимального уравнения. В этом случае в правые части уравнения (2.1) добавляются соответственно члены $\mathbf{c}_i^T I^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_1$ и $\mathbf{k}_i^T \tilde{\mathbf{u}}_2/m$.

При условии инвариантности (2.4) система уравнений (2.6) принимает следующую векторную форму:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 &= B + Q_1 + AI^{-1}\tilde{\mathbf{u}}_1 \\ N\dot{\omega}_2 &= K + Q_2 + N\tilde{\mathbf{u}}_2/m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Умножая первое уравнение скалярно на вектор y, а второе на вектор ω_2, затем складывая, получим

$$\frac{1}{2}\frac{dV}{dt} = \dot{V} + \tilde{\mathbf{u}}_1^T I^{-1} A y + \tilde{\mathbf{u}}_2 N \omega_2 / m \qquad (4.2)$$

$$\begin{aligned} V &= (\omega_2^T N \omega_2 + y^T A y + \omega_1^T F_1 \omega_1) \\ \dot{V} &= -y^T D y + \left(\varphi^T F_1 + \omega_1^T \frac{\dot{F}_1}{2}\right)\omega_1 - \omega_2^T F_2 \omega_2 \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Заметим, что функция $\dot{V}$ является производной по времени функции V для системы (4.1) при $\tilde{\mathbf{u}}_1 = 0$, $\tilde{\mathbf{u}}_2 = 0$. Следовательно, она является определенно-отрицательной. Введение управлений $\tilde{\mathbf{u}}_1$ и $\tilde{\mathbf{u}}_2$ должно улучшать качество переходного процесса. С этой целью ищем такие $\tilde{\mathbf{u}}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_1^0$, $\tilde{\mathbf{u}}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_2^0$, при которых правая часть (4.2) имеет вид [4]:

$$-W^0(\dot{\omega}_1, \omega_1, \omega_2, \tilde{\mathbf{u}}, t) = -F(\dot{\omega}_1, \omega_1, \omega_2, t) - \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \left\| \begin{matrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \end{matrix} \right\| \qquad (4.4)$$

а функционал

$$J = \int_{t_0}^{\infty} W^0(\dot{\omega}_1, \omega_1, \omega_2, \tilde{u}^0) dt \qquad (4.5)$$

имеет минимальное значение на решениях (4.1). Заметим, что искомая функция $F(\dot{\omega}_1, \omega_1, \omega_2, t)$ должна быть неотрицательной.

Для нахождения функции F и вектора $\tilde{\mathbf{u}}^0$, следуя [5], введем функцию вида

$$B^0(V, \omega, \tilde{\mathbf{u}}) = \dot{V} + \tilde{\mathbf{u}}_1^T I^{-1} A y + \tilde{\mathbf{u}}_2^T N \omega_2 / m + F + \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} \qquad (4.6)$$

При $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^0$ величина B^0 должна иметь минимум и обращаться при этом в нуль [5]. Следовательно, дифференцируя правую часть (4.6) по $\tilde{\mathbf{u}}$ и приравнивая результат к нулю, получим

$$\tilde{\mathbf{u}}_1^0 = -1/2 I^{-1} A y, \quad \tilde{\mathbf{u}}_2^0 = -N \omega_2^T / 2m \qquad (4.7)$$

Из условия $B^0 = 0$ определим функцию

$$F = -\dot{V} + 1/4 (y^T A I^{-1} + \omega_2^T N / m)(I^{-1} A y + N \omega_2 / m) \qquad (4.8)$$

При значениях (4.3), (4.4), (4.7), (4.8) уравнение (4.2) имеет вид

$$1/2 \frac{dV}{dt} = -W^0, \quad -W^0 = \dot{V} - \frac{1}{2}(y^T A I^{-1} + \omega_2^T N / m)(I^{-1} A y + N \omega_2 / m) \qquad (4.9)$$

Если не потребовать минимальности функционала (4.5), то функцию F в (4.6) можно выбрать не только в виде (4.8), а в любом другом виде, удовлетворяющем неравенству

$$0 \le F \le -\dot{V} + 1/4 (y^T A I^{-1} + \omega_2^T N / m)(I^{-1} A y + N \omega_2 / m)$$

При этом достигается гарантированная оценка качества управления вида [6]:

$$\int_{t_0}^{\infty} W^0 dt \le \frac{1}{2}(\omega_{20}^T N\omega_{20} + \omega_{10}^T F_1\omega_{10} + y_0^T A y_0)$$

Так как система (4.1) при $\tilde{u} = 0$ удовлетворяет строгому неравенству $\dot{V} < 0$ при всех $\omega_1 \ne 0$, $\dot{\omega}_1 \ne 0$, $\omega_2 \ne 0$, то показатель качества переходного процесса при $\tilde{\mathbf{u}} = 0$ имеет значение

$$\int_{t_0}^{\infty} \dot{V} dt = \frac{1}{2}(y_0^T A y_0 + \omega_{20}^T N\omega_{20} + \omega_{10}^T F_1\omega_{10})$$

Как видно из (4.9), при введении оптимального управления (4.7) значение интеграла качества, несмотря на увеличение подынтегрального выражения на величину $1/2(y^T A I^{-1} + \omega_2^T N/m)(I^{-1}Ay + N\omega_2/m)$, остается неизменным, тем самым улучшается качество переходного процесса.

5. Алгоритм релейного управления. Заметим, что наряду с непрерывной формой управления в виде (2.15) возможно построение и релейного управления при

$$Q_i^{(1)} > \left|G_i^{(1)}\right|; \quad Q_i^{(2)} > \left|G_i^{(2)}\right| \quad (i = 1, 2)$$

где $G_i^{(1)}$ и $G_i^{(2)}$ – соответственно элементы векторов

$$G^{(1)} = B + A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^T y - A\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^T \varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] + \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}y$$

$$G^{(2)} = K + \frac{1}{2}\frac{dN}{dt}\omega_2$$

входящих в выражение (2.11); $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$ – модули элементов векторов Q_1 и Q_2 при релейном управлении.

Тогда из (2.11) следует возможность релейного управления

$$Q_{1i} = -Q_i^{(1)}\operatorname{sign} y_i, \quad Q_{2i} = -Q_i^{(2)}\operatorname{sign}\omega_{2i} \quad (i = 1, 2) \tag{5.1}$$

При этом функция $V_1 = \omega_2^T N\omega_2 + y^T Ay$ и вместе с ней векторы ω_2, y обращаются в нуль за конечный промежуток времени [7]. Это означает, что за этот промежуток времени фазовое состояние системы приводится на многообразие

$$\dot{\omega}_1 - \varphi(\omega_1, t) = 0, \quad \omega_2 = 0 \tag{5.2}$$

Если функцию $\varphi(\omega_1, t)$ выбрать так, чтобы решение $\omega_1 = 0$ первого уравнения (5.2) было экспоненциально устойчивым, то фазовое состояние системы (2.1) со временем будет стягиваться к программному многообразию (1.1).

Теперь остается выразить вектор $\mathbf{u}$ через (5.1). Для этого векторы Q_1 и Q_2, входящие в уравнение (2.14), должны быть заменены на векторы Q_1', Q_2' с элементами (5.1) соответственно.

При этом уравнение (2.14) примет вид

$$\Omega\mathbf{u} = Q', \quad Q' = \begin{Vmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{Vmatrix}$$

а искомое управление (2.15), имеющие минимальную евклидову норму, выражается в виде

$$\mathbf{u} = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}Q$$

В заключении заметим, что случайное возмущение δ может иметь случайные амплитуды и частоты. Если вводить такие возмущения искусственно, то их желательно ограничить по модулю, так как при этих возмущениях, несмотря на выполнение условий (1.1) в установившемся режиме, тело будет испытывать вибрации случайного характера в виде поворотов тела в разных направлениях вокруг вектора $\boldsymbol{\omega}$ с ортом **e** и чередующиеся пульсации вдоль продольной оси тела, направленной по орту $\mathbf{k}_3$.

Такие вибрации вокруг *e* могут оказаться весьма полезными, так как могут привести к существенному уменьшению лобового сопротивления, согласно известному эффекту Н.Е. Жуковского.

Следовательно, в ряде случаев искусственное введение в систему случайных возмущений может оказаться полезным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00199) и Минобразования РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мухаметзянов И.А.* Управление преследующим телом // Автоматика и телемеханика. 1974. № 11. С. 5–12.
2. *Мухаметзянов И.А.* О применениях семейства функций Ляпунова // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 869–880.
3. *Мухаметзянов И.А.* Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. 1972. № 10. С. 16–23.
4. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 440–456.
5. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
6. *Андреев А.С., Безгласный С.П.* О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 44–51.
7. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.

Москва

Поступила в редакцию 5.II.2002