

© 2003 г. В.Н. КУКУДЖАНОВ, А.Л. ЛЕВИТИН

**О ДИНАМИЧЕСКОМ КРАЕВОМ ЭФФЕКТЕ  
ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ  
ПО УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ**

Рассматривается ударное нагружение полупространства под углом, когда касательная составляющая приложенного напряжения достаточно велика и превышает предел текучести материала. В этом случае классическая упруго-пластическая модель оказывается несостоятельной, для нее решения не существует. Возникает вопрос о том, какую модель использовать для решения этой задачи. Наиболее простой моделью, обобщающей упругопластическую модель, для которой эта задача имеет решение, является упруговязкопластическая модель. Ее можно рассматривать как регуляризующую по отношению к упругопластической классической модели, не зависящей от изменения масштаба времени. Решения, полученные на основе упруговязкопластической модели, как показано в [1, 2], при малых временах релаксации (по сравнению с характерным временем задачи) стремятся к решениям упруго-пластических уравнений там, где решение меняется медленно. В областях быстрого изменения и на разрывах упругопластического решения внутри тела возникают внутренние краевые эффекты (погранслои), а на границе тела при несогласованности статического условия пластичности с краевыми условиями возникают краевые эффекты [3]. Наиболее простой задачей такого типа является задача о касательном ударе по границе полупространства. При скорости удара превышающей предельную скорость (для нее упруго-пластическое решение перестает существовать) вблизи поверхности возникает погранслой, в котором происходит локализация пластической деформации вплоть до полного разрушения материала [4].

В настоящей работе рассматривается общая задача о продольнопоперечном ударе. Исследуется влияние нормальных сжимающих напряжений, действующих на поверхности тела, на процесс локализации сдвиговых деформаций. Вопрос о том будет ли в общем случае нагружения под углом существовать погранслой или нет и, если да, то при каком соотношении между касательными и нормальными силами, не является тривиальным. Поскольку при нормальном ударе никакой локализации деформаций не происходит, так как вследствие сжатия материала в стесненных условиях плоской деформации происходит упрочнение и это препятствует развитию локализации деформаций. Как показало настоящее исследование, при продольнопоперечном ударе локализация деформаций происходит всегда, когда касательная составляющая внешней нагрузки превышает предел текучести материала  $\sigma_{12}^0 > \tau_s$ , и ее нет, если  $\sigma_{12}^0 \leq \tau_s$ . Но при  $\sigma_{11}^0 > \sigma_s$  существование погранслоя зависит от соотношения между физическим разупрочнением материала при сдвиговой деформации и геометрическим упрочнением. При этом в этих двух случаях характер погранслоя оказывается разным. В публикуемой работе, в основном, исследуется первый случай, когда  $\sigma_{12}^0 > \tau_s$ .

Асимптотическим методом получено аналитическое решение задачи, исследована структура полос локализации сдвиговой пластической деформации. Численным методом получено решение задачи в общем случае для разупрочняющегося материала и исследован характер распространения комбинированных пластических волн нагружения и разгрузки.

Показано, что при временах  $t \gg \tau$  ( $\tau$  – время релаксации) и  $\sigma_{12}^0 > \tau_s$ , локализация не зависит от величины нормальной компоненты приложенной нагрузки. В случае разупрочняющейся упругопластической среды напряженно-деформированное состояние в погранслое стремится к чисто сдвиговому состоянию, на которое накладывается гидростатическое давление. При условии пластичности типа Мизеса оно не оказывает влияние на пластичность материала, следовательно, и на локализацию пластических деформаций.

Подчеркнем, что поскольку локально волны произвольной формы могут рассматриваться как плоские, описанный эффект является общим. Он справедлив не только в случае плоских волн в полупространстве, но имеет место для любого тела, на поверхности которого действует касательная нагрузка, интенсивность которой превышает предел текучести материала (для упрочняющегося материала предел его прочности). Более того, такой же эффект будет справедлив и при квазистатическом нагружении тела, так как при внешней динамической нагрузке, стремящейся к стационарному значению, решение вдали от фронта волны совпадает со статическим решением задачи.

**1. Введение.** Продольнопоперечные волны в неупругих материалах рассматривались во многих работах. Эта задача интересна, поскольку она позволяет изучить процесс взаимодействия нелинейных комбинированных волн в сложнонапряженном состоянии. В 60-х годах были решены задачи для упругопластических сред [5, 6], а в 70-х–80-х и для упруговязкопластических материалов, механические свойства которых зависят от влияния скорости деформаций [6, 7]. Но во всех этих работах рассматривались, исключительно, либо идеально-пластические, либо упрочняющиеся тела с постоянно возрастающей диаграммой материала при внешних нагрузках, в которых касательное напряжение (девиаторная составляющая) не превышало предела текучести материала на сдвиг. Это было связано с тем, что решения при внешнем нагружении при  $\sigma_{12} > \tau_s$  для упругопластической среды не существует. Совершенно очевидно, что внешнее нагружение – силовое или кинематическое, никак не связано с механическими свойствами материала и практически может быть любой интенсивности. При большой интенсивности оно будет приводить к переходу материала в разрушенное или близкое к нему состояние, которое может не описываться моделью, принятой для описания состояния упрочнения. Именно так обстоит дело при использовании упругопластической модели материала, для которой решение существует, если только внешнее нагружение таково, что девиаторные компоненты тензора напряжений в точках поверхности не превосходят предела текучести на сдвиг. Такая ситуация может возникать и во внутренних слоях тела, например при столкновении и взаимодействии волн. При этом зоны, в которых имеет место напряженно-деформированное состояние несовместимое с определяющими уравнениями, как правило, малы по сравнению с размерами тела или области, в которой ищется решение задачи. Поэтому естественно решить такую задачу методом регуляризации, вводя в модель малые дополнительные члены, определяющие эффекты, которые характеризуются либо малым внутренним масштабом длины, либо быстрым временем протекания дополнительных внутренних процессов, которые не учитываются упругопластической моделью.

В последние годы в этом направлении ведутся интенсивные исследования и были получены определенные результаты для некоторых усложненных моделей, но исключительно численными методами, часто без должного уровня строгости доказательства корректности полученных решений [8–11].

Наиболее простой и хорошо изученной моделью, которая позволяет естественным образом регуляризовать упругопластическую модель при решении возникающих некорректных задач является упруговязкопластическая модель материала. Кроме того, она физически более адекватно описывает поведение материалов при повышенных скоростях нагружения и совершенно оправданно исходить из нее при исследовании динамических процессов [1, 6].

Решения некорректных динамических задач исследовались только для случая распространения волн одноосного напряженного состояния в стержнях и в полупространстве [3, 4].

В то же время для исследования и понимания процессов, происходящих в общем случае при контактном взаимодействии тел, в первую очередь, необходимо исследовать процессы взаимодействия комбинированных продольно-поперечных волн, так как при контакте возникают как нормальные, так и касательные силы.

В последние 10–15 лет появились экспериментальные работы по продольно-поперечному удару пластин, направленные на исследование пластического течения и локализации пластической деформации при скоростях сдвига  $10^5$ – $10^6$   $\text{с}^{-1}$  [12], а также работы по численному моделированию этого процесса [13]. Эти исследования показывают, что упруговязкопластическая модель хорошо описывает свойства различных материалов при сложных напряженно-деформируемых состояниях в условиях высокоскоростного нагружения.

**2. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим упруговязкопластическое полупространство  $x_1 \geq 0$ , на поверхности которого приложены, независимые от координат  $x_2$  и  $x_3$ , касательные и нормальные напряжения произвольной интенсивности, изменяющиеся во времени по произвольному закону

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0(t), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (2.1)$$

либо краевые условия кинематического типа

$$v_1 = v_1^0(t), \quad v_2 = v_2^0(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (2.2)$$

либо условия смешанного типа

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0(t), \quad v_2 = v_2^0(t) \quad \text{при } x = 0 \quad (2.3)$$

Будем рассматривать малые перемещения среды, при которых не учитываются перемещения внешней границы тела.

В силу приложенной внешней нагрузки и симметрии задачи  $\sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$ ,  $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$ ,  $v_3 = 0$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ , тогда уравнения движения при отсутствии массовых сил запишутся так

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \quad (2.4)$$

Определяющие уравнения упруговязкопластического материала [6, 7] примут вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= \frac{2\Phi_1}{3\tau} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \frac{\Phi_2}{\tau} \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= \left( \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + \frac{2}{3\mu} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\Phi_1}{\tau} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Деформации  $\varepsilon_{ij}$  связаны с полем скоростей  $v_1, v_2, v_3$  соотношениями совместности

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (2.6)$$

Функции в правых частях определяющих уравнений (2.5) имеют следующий вид

$$\Phi_1 = \hat{\Phi}(F) \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{J_2}, \quad \Phi_2 = \hat{\Phi}(F) \frac{\sigma_{12}}{J_2}, \quad F = \frac{J_2 - \tau_s(W_p)}{\tau_s(W_p)}$$

$$\hat{\Phi}(F) = \begin{cases} 0 & (F < 0) \\ \Phi(F) & (F \geq 0) \end{cases}, \quad \hat{\Phi}(0) \equiv 0, \quad J_2 = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{3} + \sigma_{12}^2}$$

где  $\mu$  – сдвиговой модуль;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\tau_s$  – предел текучести материала на сдвиг;  $J_2$  – второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $\tau$  – время релаксации.

Если среда обладает упрочнением, то  $\tau_s = \tau_s(W_p)$ , где  $W_p$  – работа пластической деформации, которая определяется из уравнения, замыкающего систему (2.4)–(2.6):

$$\frac{dW_p}{dt} = \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = 2 \frac{\Phi_3}{\tau}, \quad \Phi_3 = \hat{\Phi}(F) J_2 \quad (2.7)$$

Уравнения (2.6) не входят в систему уравнений и интегрируются после того, как из системы уравнений (2.4), (2.5), (2.7) будет определен основной вектор неизвестных  $U = (v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, W^p)$ . В случае упруговязкоидеальнопластической среды предел текучести остается постоянным и  $W^p$  не входит в число неизвестных. В этом случае вектор  $U$  содержит только пять компонент.

Введем безразмерные переменные

$$x = l\bar{x}, \quad t = t_0\bar{t}, \quad \sigma_{ij} = \tau_s^0 \bar{\sigma}_{ij}, \quad v_i = v_s \bar{v}_i, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_s \bar{\varepsilon}_{ij}$$

$$t_0 = l/c_1, \quad v_s = \tau_s^0/(c_1 \rho), \quad (c_1)^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad (c_2)^2 = \mu/\rho, \quad \varepsilon_s = \tau_s^0/\mu$$

где  $l$  и  $t_0$  – характерные параметры задачи.

Тогда система уравнений запишется в следующем виде

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\delta}{3} \Phi_1, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\delta \Phi_2$$

$$(1 - \nu) \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} - \nu \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = (1 + \nu) \frac{\delta}{3} \Phi_1$$

$$\frac{\partial (\tau_s - E_1 W^p)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial W^p}{\partial t} = \delta \Phi_3, \quad \delta = 2 \frac{\mu t_0}{\tau_s^0 \tau} = 2 \frac{t_0}{\varepsilon_s \tau}$$

Закон упрочнения-разупрочнения в (2.8) записан в дифференциальном виде, что позволяет автоматически учитывать начальные условия при разгрузке и начальном нагружении.

Система уравнений (2.8) зависит от соотношения упругих постоянных, которые выражаются через один коэффициент Пуассона  $\nu$ . Правые части зависят от безразмерного

параметра  $\delta$ , который для большинства металлов и характерных времен рассматриваемых задач представляет собой большое число  $\delta = 10^3-10^5$ . При стремлении  $\delta^{-1}$  к нулю уравнения упруговязкопластического материала переходят в уравнения упругопластической среды, и решение асимптотически стремится к упругопластическому [1-4, 6].

**3. Асимптотический метод решения.** Для решения рассматриваемой задачи распространения продольнопоперечных волн применим асимптотический метод, раскладывая решение системы (2.8) в ряд по обратным степеням  $\delta^{-1}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} + \delta^{-1}\mathbf{U}^{(1)} + \dots + O(\delta^{-n}) \quad (3.1)$$

Решение  $\mathbf{U}^{(0)}$  будет определяться из уравнений (2.8) при  $\delta^{-1} \rightarrow 0$ . Этот предельный переход проще всего выполнить, если определяющие уравнения записать в виде условия пластичности и условия пропорциональности компонент тензора скоростей пластической деформации девиатору напряжений [7]:

$$S = S(W_p) + \Phi^{-1}(I_p \delta^{-1}), \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\Lambda} s_{ij} = \frac{\dot{I}_p}{S} s_{ij} \quad (3.2)$$

$$S = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{1/2}, \quad \dot{I}_p = \left(\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p\right)^{1/2}$$

Откуда при  $\delta^{-1} \rightarrow 0$  следует условие пластичности  $S = S(W_p)$ , а второе соотношение остается без изменений, поскольку не зависит от  $\delta$ . Скалярная величина  $\dot{\Lambda}$  определяется стандартным образом из условия пластичности после его дифференцирования, как это делается в теории пластического течения [6, 7]. В результате вместо уравнений (2.8) получаем систему уравнений пластического течения для продольно-поперечных волн

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} + \dot{\Lambda} s_{11} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \dot{\Lambda} s_{12} = 0 \quad (3.3)$$

$$(1 - \nu) \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - (1 + \nu) \dot{\Lambda} s_{11} = 0$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{3\alpha(K)}{4K^2 E} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t}$$

где  $K$  – объемный упругий модуль. Функция  $\alpha(K)$  определяется с помощью диаграммы материала для одноосного нагруженного состояния  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  или  $\sigma = \sigma(W_p)$ :

$$\alpha(K) = \frac{E}{E_p(3K)} - 1, \quad E_p(\sigma) = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p}$$

где  $E_p(\sigma)$  – угол наклона кривой  $d\sigma/d\epsilon^p$  как функция  $\sigma$  [5, 6]. В случае идеальной пластичности  $E_p \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$ ; при разупрочнении  $E_p < 0$ ,  $\alpha < -1$  и задача не имеет решения при граничных условиях (2.1)–(2.3), когда касательное напряжение превышает предел прочности на диаграмме  $\tau_s(W_p)$ .

Система уравнений (3.3), также как и система уравнений (2.8), принадлежит к системе гиперболического типа, но с матрицей, зависящей от решения системы при условии пластичности  $S = \tau_s(W_p)$ . Это приводит к двум существенным различиям в поведении решений уравнений (2.8) и (3.3). Первое заключается в различном поведении раз-

рывных решений. Второе различие в том, что решение уравнений (2.8) существует при любой интенсивности граничных условий (2.1)–(2.3), а решение системы (3.3) не существует при разупрочняющей зависимости  $S = \tau_s(W_p)$  или идеальной диаграмме материала, так как определяющие уравнения оказываются несовместными с краевыми условиями. Оба этих факта приводят к тому, что разложение (3.1) по степеням малого параметра становится некорректным там, где происходит быстрый рост изменения решений системы (2.8) и имеет место существенное различие в решениях двух систем уравнений. Это обстоятельство необходимо учитывать и строить разложение (3.1) с учетом быстрого роста одних компонент решения и медленного для других.

Метод асимптотического интегрирования предложен в [1]; решения для структуры ударных волн и контактных разрывов построены в [1, 2], а для полос локализации пластических деформаций – в [3, 4].

Для построения асимптотического решения в погранслое необходимо ясно представлять физическую картину происходящего явления. Прежде всего, следует принять во внимание, что при нормальном ударе по полупространству с интенсивностью, превышающей предел текучести  $\sigma_{11}^0 > \sigma_s$ , краевого эффекта не будет, так как решение упругопластической задачи будет существовать при любой интенсивности удара вследствие упрочнения, вызываемом геометрическим стеснением материала. При косом ударе распределение нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  зависят от величины приложенного касательного напряжения  $\sigma_{12}$  на границе полуплоскости. Если  $\sigma_{12} < \tau_s$ , то  $\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$ , но при предельном значении  $\sigma_{12} = \tau_s$ , при  $\delta^{-1} \rightarrow 0$  в силу статического условия пластичности должно выполняться условие  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ . Тогда нетрудно понять, что и при  $\sigma_{12} \geq \tau_s$  в упруговязкопластическом решении при  $t \gg \tau$  в области погранслоя  $\sigma_{22} \rightarrow \sigma_{11}$  и нормальные компоненты изменяются медленно. Касательные напряжения  $\sigma_{12} \rightarrow \tau_s(W_p)$ , а сдвиговая деформация  $\epsilon_{12}$  и пластическая работа  $W_p$  меняются существенно быстрее, чем продольная деформация  $\epsilon_{11}$ . Это обстоятельство необходимо учитывать при разложении решения по малому параметру  $\delta^{-1}$ , вводя в уравнения явно второй малый параметр  $\lambda$  как коэффициент растяжения по координате  $x$  так, чтобы большие производные решения по растянутой координате  $x_1 = x/\lambda$  стали бы порядка  $O(1)$ . Порядок  $\lambda$  по отношению к  $\delta^{-1}$  определяется в ходе решения задачи. В окрестности поверхности  $x = 0$ , где материал не упрочняется, скорости движения частиц в поперечной волне будут по порядку такими же, как и в области упрочнения; касательные напряжения будут близки к значению, определяемому стационарным условием пластичности  $\sigma_{12} \sim \tau_s(W_p)$ , а деформация  $\epsilon_{12}$  и  $W_p$  быстро растут и будут существенно больше, чем в области упрочнения.

Эти соображения следуют из асимптотического анализа системы уравнений, поэтому в погранслое принимается следующее разложение по малому параметру  $\lambda$ , характеризующему растяжение масштаба по координате  $x = \lambda x_1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{11}^0 + \lambda \sigma_{11}^{(1)} + \lambda^2 \sigma_{11}^{(2)} + \dots, & v_1 &= v_1^0 + \lambda v_1^{(1)} + \dots \\ \sigma_{22} &= \sigma_{11}^0 + \lambda \sigma_{22}^{(1)} + \lambda^2 \sigma_{22}^{(2)} + \dots, & \epsilon_{11} &= \epsilon_{11}^0 + \lambda \epsilon_{11}^{(1)} + \dots \\ \sigma_{12} &= \tau_s(W_p) + \lambda \sigma_{12}^{(1)} + \lambda^2 \sigma_{12}^{(2)} + \dots, & v_2 &= v_2^{(0)} + \lambda v_2^{(1)} + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

где члены нулевого приближения для продольной волны в погранслое постоянны и определяются граничным условием  $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^0$ , а поперечные компоненты  $\sigma_{12}^{(0)}$ ,  $v_2^{(0)}$  и  $W_p^{(0)}$

быстро изменяются. Для  $\epsilon_{12}$  и  $W_p$  разложение имеет сингулярный вид

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{\lambda} \epsilon_{12}^{(0)} + \epsilon_{12}^{(1)} + \lambda \epsilon_{12}^{(2)} + \dots, \quad W_p = \frac{1}{\lambda} W_p^{(0)} + W_p^{(1)} + \lambda W_p^{(2)} + \dots \quad (3.5)$$

Подставляя эти разложения в систему уравнений (2.8), находим, что в окрестности погранслоя определяющие уравнения и уравнения движения, отвечающие продольной волне, тождественно удовлетворяются нулевым приближением разложения (3.4).

При  $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)}$  правые части третьего и пятого уравнений системы (2.8) обращаются в нуль и система распадается. Нормальные компоненты описываются однородными уравнениями. Неменяющееся однородное состояние  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{11}^0$  и  $v_1 = v_0 = \sigma_{11}^0$  (в безразмерных переменных) тождественно удовлетворяют им и совпадает с медленно меняющимся решением, которое описывается уравнениями упругоэластического течения (3.3), полученными в работе [5].

Касательные компоненты удовлетворяют второму, четвертому и шестому уравнениям системы (2.8), которые принимают вид

$$\partial v_2 / \partial t - \partial \sigma_{12} / \partial x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\delta \Phi \left( \frac{\sigma_{12} - \tau_s(W_p)}{\tau_s(W_p)} \right) \sigma_{12}$$

$$\frac{dW_p}{dt} = \delta \Phi \left( \frac{\sigma_{12} - \tau_s(W_p)}{\tau_s(W_p)} \right) \sigma_{12}$$

Эту систему можно преобразовать к более простому виду, если перейти от параметра упрочнения  $W_p$  непосредственно к сдвиговой деформации и использовать диаграмму  $\sigma_{12} = \tau_s(\epsilon_{12})$ , получаемую в стандартном опыте на сдвиг. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial t} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} &= -\delta \Phi(\sigma_{12} - \tau_s(\epsilon_{12})) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя ряды (3.4)–(3.5) в (3.6), после преобразования к растянутой координате  $\beta$ , и учитывая, что разложение функции  $\Phi(z)$  при  $z \rightarrow 0$  имеет вид

$$\Phi(z) = z^n + O(z^{n+1}) \quad (n > 0)$$

получим, что нулевое приближение быстроменяющегося решения определяется следующей системой уравнений

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \epsilon_{12}^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial x_1}, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{1}{\delta} (\lambda \sigma_{12}^{(1)})^n$$

Откуда следует, что параметр  $\lambda = \delta^{-(n+1)}$ . Исключая  $\sigma_{12}^{(1)}$  и вводя обозначения  $(c_2/c_1)^{-1/n} = c$  и  $x_1 c = \beta$ , получаем нелинейную параболическую систему уравнений для определения  $v_2$  и  $\epsilon_{12}$ :

$$\frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \beta} \right)^{1/n}, \quad \frac{\partial \epsilon_{12}^{(0)}}{\partial t} = c \frac{\partial v_2^{(0)}}{\partial \beta} \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) выполняются точно, когда диаграмма материала идеально пластическая и приближенно, если разупрочнение невелико.

Решение уравнений (3.7) необходимо сравнивать с медленноменяющимся решением системы уравнений (3.3). Условие срачивания запишется в виде

$$v_2^{(0)}|_{\beta=0} = v_2^0, \quad v_2^{(0)}|_{\beta \rightarrow \infty} = v_s^* \quad (3.8)$$

где  $v_2^0$  – значение скорости, отвечающее внешней нагрузке, заданной при  $x = 0$ , а  $v_s^*$  – значение скорости, определяемое по упругопластическим уравнениям (3.3), при которой начинается разупрочнение. Начальные условия здесь можно не учитывать, так как ищется установившееся решение для больших значений времени  $t \gg \tau_{\epsilon_s}$ . Единственное ограничение, чтобы они были согласованы с краевыми условиями (3.8).

Таким образом, в приграничном слое для нормальных напряжений реализуется гидростатическое давление, равное приложенному на границе напряжению  $\sigma = \sigma^0$ . Касательные напряжения в погранслое определяются статической диаграммой  $\sigma_{12} \approx \tau_s(W_p)$ , а тангенциальные скорости  $v_2$  и деформации  $\epsilon_{12}$  быстро меняются в соответствии с системой уравнений (3.7). Погранслоем является полосой локализации сдвиговой деформации.

**4. Структура полос локализации.** Решение задачи (3.7)–(3.8) автомодельно, оно зависит от одной переменной и удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению,

$$\frac{d^2 v_2}{dz^2} + \frac{4v}{p(p+1)} \left( \frac{dv_2}{dz} \right)^{1-p} \quad (4.1)$$

$$z = \frac{\beta}{c(2t)^{n/(n+1)}}, \quad p = \frac{1}{n} \quad (n > 0)$$

Полное решение задачи (4.1), (3.8) приведено в [3].

Полосы локализации деформаций или зоны, где произошло разупрочнение, растут со временем, но быстро затухают по экспоненциальному закону. Эффективная ширина может быть вычислена по формуле

$$\Delta x = \frac{\Delta v_2}{\max(dv_2/dx)} = t^{n/(n+1)} \delta^{1/(n+1)} \Delta z, \quad \Delta v_2 = v_2^0 - v_s^* \quad (4.2)$$

где  $\Delta z$  не зависит от  $t$  и  $\delta$ .

При  $n = 1$  решение уравнения (4.1) может быть записано через интеграл вероятности

$$v_2 = \frac{2\Delta v_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi = \Delta v_2 \operatorname{erf}(z) \quad (4.3)$$

Эффективная ширина полосы локализации в этом случае не зависит от  $\Delta v$ :

$$\Delta x = (\delta \pi t)^{1/2} \quad (4.4)$$

Решение для деформации может быть получено с помощью второго уравнения системы (3.7):

$$\epsilon_{12} - \epsilon_{12}(0) = \frac{\Delta v_2 \beta}{2c \sqrt{\pi}} \left( \frac{e^{-z^2}}{z \sqrt{\pi}} - 1 + \operatorname{erf} z \right) \quad (4.5)$$



где  $\varepsilon_{12}(0)$  – начальная деформация при  $t = 0$ . При  $z \gg 1$  из (4.5) можно получить следующее асимптотическое представление:

$$\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}(0) = \Delta v_2 \frac{t^{3/2} c^2}{2\pi \beta^2} e^{-\beta^2/4tc^2} (1 + O(z^{-2})) \quad (4.6)$$

Откуда видно, что деформация очень быстро затухает с  $\beta$  по ширине полосы локализации.

При малых  $\beta \ll 1$  из решения (4.5) находим

$$\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}(0) = \frac{\Delta v_2}{\pi} \left( \frac{tL}{l} \right)^{1/2} (1 + O(z)) \quad (4.7)$$

где  $l = \tau \varepsilon_s c_0$  – внутренний масштабный размер в упруговязкопластическом материале.

Из (4.7) следует, что для классической модели упругопластического материала рассматриваемого как предел упруговязкопластического при  $\tau \rightarrow 0$  деформация в полосах локализации бесконечна.

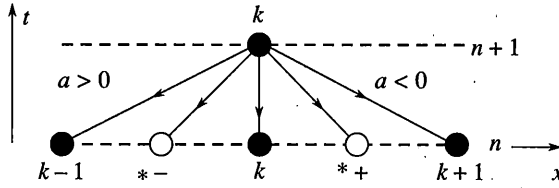
**5. Метод численного интегрирования.** Система уравнений (2.8) содержит в правой части большой параметр  $\delta$  или малый параметр при старших производных, т.е. является жесткой.

Интегрированию жестких ОДУ посвящено достаточно большое число работ, в которых показано, что численное интегрирование таких уравнений следует проводить с помощью неявных  $A$ -устойчивых разностных методов [14]. Интегрирование жестких уравнений в частных производных исследовано значительно слабее и общей математической теории таких уравнений не существует. Для каждого класса задач приходится разрабатывать свои методики. Некоторые методы интегрирования гиперболических задач для уравнений в частных производных можно найти в [16]. Одним из способов решения этой проблемы для гиперболических уравнений упруговязкопластической среды может быть приведение их к характеристическим соотношениям и интегрирование получаемых ОДУ вдоль характеристик по неявной схеме.  $A$ -устойчивость доказывается для линеаризованной системы разностных уравнений с учетом правых частей, которые содержат большой параметр и поэтому не могут отбрасываться [15, 17]. Применим этот метод к решению системы уравнений (2.8).

После приведения к характеристическому виду система (2.8) принимает вид

$$\begin{aligned} x \pm t &= \text{const}: \mp \frac{dv_1}{dt} + \frac{d\sigma_1}{dt} = -\frac{\delta}{3} \Phi_1 \\ x \pm \frac{c_2}{c_1} t &= \text{const}: \mp \frac{c_2}{c_1} \frac{dv_2}{dt} + \frac{d\sigma_{12}}{dt} = -\delta \Phi_2 \\ x = \text{const}: (1 - \nu) \frac{d\sigma_2}{dt} - \nu \frac{d\sigma_1}{dt} &= (1 + \nu) \frac{\delta}{3} \Phi_1 \\ x = \text{const}: \frac{d\tau_s}{dt} - E_1 \frac{dW_p}{dt} &= 0 \\ x = \text{const}: \frac{dW_p}{dt} &= \delta \Phi_3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Разностная схема строится на четырехточечном шаблоне, показанном на фиг. 1. Характеристики продольных волн проходят через основные узлы, а поперечных – че-



Фиг. 1

рез дополнительные, решение в которых определяется интерполированием. Правые части аппроксимируются в случае неявной схемы значениями на верхнем  $(n + 1)$  слое, или как полусумма значений на  $n$ -м и  $(n + 1)$ -м слоях

$$\begin{aligned}
 & -\frac{v_{1k}^{n+1} - v_{1k-1}^n}{\Delta t} + \frac{\sigma_{1k}^{n+1} - \sigma_{1k-1}^n}{\Delta t} = -\frac{\delta}{3} \Phi_{1k-1}^{n+1} \\
 & \frac{v_{1k}^{n+1} - v_{1k+1}^n}{\Delta t} + \frac{\sigma_{1k}^{n+1} - \sigma_{1k+1}^n}{\Delta t} = -\frac{\delta}{3} \Phi_{1k+1}^{n+1} \\
 & -\frac{c_2 v_{2k}^{n+1} - v_{2*}^n}{c_1 \Delta t} + \frac{\sigma_{12k}^{n+1} - \sigma_{12*}^n}{\Delta t} = -\delta \Phi_{2*}^{n+1} \\
 & \frac{c_2 v_{2k}^{n+1} - v_{2*}^n}{c_1 \Delta t} + \frac{\sigma_{12k}^{n+1} - \sigma_{12*}^n}{\Delta t} = -\delta \Phi_{2*}^{n+1} \tag{5.2} \\
 & (1 - \nu) \frac{\sigma_{2k}^{n+1} - \sigma_{2k}^n}{\Delta t} - \nu \frac{\sigma_{1k}^{n+1} - \sigma_{1k}^n}{\Delta t} = (1 + \nu) \frac{\delta}{3} \Phi_{1k}^{n+1} \\
 & \frac{\tau_{s_k}^{n+1} - \tau_{s_k}^n}{\Delta t} - E_1 \frac{W_k^{p,n+1} - W_k^{p,n}}{\Delta t} = 0 \\
 & \frac{W_k^{p,n+1} - W_k^{p,n}}{\Delta t} = \delta \Phi_{3k}^{n+1}
 \end{aligned}$$

Знаками  $(*)$  и  $(*+)$  отмечены узлы, через которые проходят характеристики поперечной волны.

Нелинейную систему уравнений (5.2) следует решать, линеаризуя правые части для каждой характеристики

$$\begin{aligned}
 (\Phi_i)_k^{n+1} &= (\Phi_i)_k^n + (\Phi_{i,\sigma_1})^n \Delta \sigma_1 + (\Phi_{i,\sigma_{12}})^n \Delta \sigma_{12} + (\Phi_{i,\sigma_2})^n \Delta \sigma_2 + (\Phi_{i,\tau_s})^n \Delta \tau_s \\
 \Phi_{i,\sigma_{kl}} &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma_{kl}} \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Разностная схема сводится к системе линейных уравнений, которую удобно записать в матричном виде, группируя известные величины в правой части по узлам шаблона

$$[B] \mathbf{V}_k^{n+1} = [C_{-1}] \mathbf{V}_{k-1}^n + [C_{*-}] \mathbf{V}_{*-}^n + [C_0] \mathbf{V}_k^n + [C_{*+}] \mathbf{V}_{*+}^n + [C_{+1}] \mathbf{V}_{k+1}^n + \mathbf{F} \tag{5.4}$$

$$V(t, x) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \tau_s \\ W^p \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} z_1 \Phi_{1, k-1}^n \\ z_1 \Phi_{1, k+1}^n \\ z_2 \Phi_{2, *-}^n \\ z_2 \Phi_{2, **}^n \\ z_3 \Phi_{1, k}^n \\ 0 \\ z_4 \Phi_{3, k}^n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} z_1 = -\frac{1}{3}\delta \\ z_2 = -\delta \\ z_3 = (1+v)\frac{\delta}{3} \\ z_4 = \delta \end{matrix}$$

$$[B] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta t} & 0 & \frac{1}{\Delta t} - z_1 \Phi_{1, \sigma_{1k-1}}^n & -z_1 \Phi_{1, \sigma_{12k-1}}^n & -z_1 \Phi_{1, \sigma_{2k-1}}^n & -z_1 \Phi_{1, \tau_{sk-1}}^n & 0 \\ \frac{1}{\Delta t} & 0 & \frac{1}{\Delta t} - z_1 \Phi_{1, \sigma_{1k+1}}^n & -z_1 \Phi_{1, \sigma_{12k+1}}^n & -z_1 \Phi_{1, \sigma_{2k+1}}^n & -z_1 \Phi_{1, \tau_{sk+1}}^n & 0 \\ 0 & \frac{c_2/c_1}{\Delta t} & -z_2 \Phi_{2, \sigma_{1*-}}^n & \frac{1}{\Delta t} - z_2 \Phi_{2, \sigma_{12*-}}^n & -z_2 \Phi_{2, \sigma_{2*-}}^n & -z_2 \Phi_{2, \tau_{s*-}}^n & 0 \\ 0 & \frac{c_2/c_1}{\Delta t} & -z_2 \Phi_{2, \sigma_{1**}}^n & \frac{1}{\Delta t} - z_2 \Phi_{2, \sigma_{12**}}^n & -z_2 \Phi_{2, \sigma_{2**}}^n & -z_2 \Phi_{2, \tau_{s**}}^n & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{v}{\Delta t} - z_3 \Phi_{1, \sigma_{1k}}^n & -z_3 \Phi_{1, \sigma_{12k}}^n & \frac{1-v}{\Delta t} - z_3 \Phi_{1, \sigma_{2k}}^n & -z_3 \Phi_{1, \tau_{sk}}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} & \frac{E_1}{\Delta t} \\ 0 & 0 & -z_4 \Phi_{3, \sigma_{1k}}^n & -z_4 \Phi_{3, \sigma_{12k}}^n & -z_4 \Phi_{3, \sigma_{2k}}^n & -z_4 \Phi_{3, \tau_{sk}}^n & \frac{1}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

Матрицы  $[C_i]$  равны  $i$ -ой строке матрицы  $[B]$ , остальные элементы в них равны нулю. Полные деформации вычисляются по трехточечной схеме Лакса с центральными разностями по  $x$ :

$$\frac{\epsilon_{1k}^{n+1} - \tilde{\epsilon}_1^n}{\Delta t} = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{v_{1, k+1}^n - v_{1, k-1}^n}{2\Delta x}, \quad \tilde{\epsilon}^n = \frac{\epsilon_{k+1}^n + \epsilon_{k-1}^n}{2}$$

$$\frac{\epsilon_{12k}^{n+1} - \tilde{\epsilon}_{12}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \frac{v_{2, k+1}^n - v_{2, k-1}^n}{2\Delta x}$$

Отметим, что решение системы нелинейных уравнений (5.2) при больших  $\delta$  итерационным методом приводит к неустойчивости.

**6. Исследование устойчивости.** Доказательство  $A$ -устойчивости при исследовании устойчивости жестких систем для ОДУ обычно проводится на модельных задачах. В данном случае, в качестве таковой, естественно использовать задачу о тангенциальном ударе по полупространству из упруговязкопластического материала. Она, как это видно из приведенного асимптотического решения, сохраняет главные особенности общей задачи. Уравнения этой задачи следуют из системы (5.2), если положить  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  и  $v_1$  равными нулю. Записывая их в инвариантах Римана, получаем систему двух нели-

нейных уравнений, в правых частях которых содержится большой параметр  $\delta$ . Поэтому они не могут быть отброшены, как это делается при исследовании устойчивости нежестких разностных схем.

Для доказательства  $A$ -устойчивости следует показать абсолютную устойчивость системы уравнений (5.4) относительно  $\delta\Delta t$  – произведения шага на большой параметр. После преобразования по Фурье 3-го и 4-го уравнений системы (5.2), получаем уравнение для определения характеристических чисел матрицы перехода

$$\begin{aligned} p_1(\lambda - e^{ik\Delta t}) &= \frac{1}{4}\delta\Delta t(\lambda + e^{-ik\Delta t})(p_2 - p_1) \\ p_2(\lambda - e^{-ik\Delta t}) &= \frac{1}{4}\delta\Delta t(\lambda + e^{ik\Delta t})(p_2 - p_1) \\ p_1 &= v_2 - (\sigma_{12} - \tau_s), \quad p_2 = v_2 + (\sigma_{12} - \tau_s) \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $\lambda$  определяем из условия равенства нулю определителя системы (6.1):

$$\begin{vmatrix} \lambda - e^{-ik\Delta t} + A(\lambda + e^{-ik\Delta t}) & -A(\lambda + e^{-ik\Delta t}) \\ -A(\lambda + e^{ik\Delta t}) & \lambda - e^{ik\Delta t} + A(\lambda + e^{ik\Delta t}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{2\lambda}{1+2A} \cos(k\Delta t) + \frac{1-2A}{1+2A} = 0, \quad 2A = \frac{\delta\Delta t}{2} \quad (6.2)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{1+2A} (\cos(k\Delta t) \pm \sqrt{4A^2 - \sin^2(k\Delta t)})$$

1. При  $\frac{1}{2}\delta\Delta t \geq 1$  подкоренное выражение  $4A^2 - \sin^2(k\Delta t) > 0$  и  $\lambda$  – действительное число. Если  $\cos(k\Delta t) > 0$ , то

$$|\lambda_1| = \left| \frac{1}{1+2A} (\cos(k\Delta t) \pm \sqrt{4A^2 - \sin^2(k\Delta t)}) \right| < \left| \frac{1}{1+2A} (\cos(k\Delta t) + 2A) \right| \leq 1$$

Если  $\cos(k\Delta t) < 0$ , то

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \frac{1}{2A+1} (|\cos k\Delta t| + \sqrt{4A^2 - \sin^2 k\Delta t}) \leq 1$$

2. При  $\frac{1}{2}\delta\Delta t < 1$   $\max(4A^2 - \sin^2(k\Delta t)) < 0$  и  $\lambda$  – комплексное число

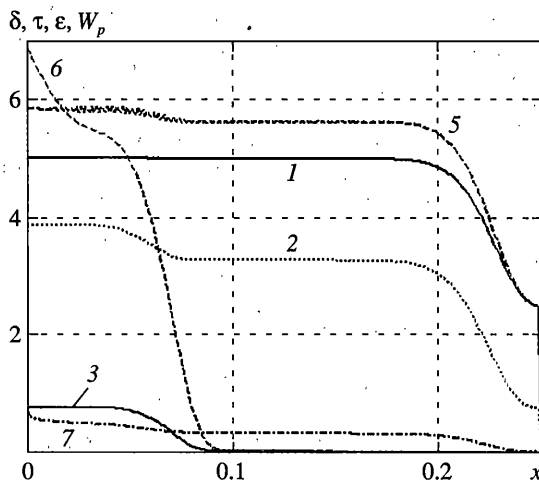
$$\text{Im} \sqrt{4A^2 - \sin^2(k\Delta t)} < i \sin(k\Delta t)$$

$$|\lambda| < |\cos(k\Delta t) \pm i \sin(k\Delta t)| = 1$$

Откуда следует, что схема  $A$ -устойчива при любом значении  $\delta\Delta t = \text{const}$ .

Можно показать, что чисто неявная схема (правая часть берется только с верхнего слоя) также будет  $A$ -устойчивой. Для явной схемы устойчивость будет выполняться только при условии  $\delta\Delta t \leq 1$ .

Для того, чтобы получить структуру погранслоев в жестких задачах уравнения следует интегрировать с малым шагом  $\Delta t$  таким, чтобы  $\delta\Delta t \ll 1$  (практически  $\delta\Delta t \lesssim 0.1-0.01$ ), при этом не существенно явным или неявным методом. Явный метод даже предпочтительнее в силу своей простоты. Если же детали решения в погранслоях не представляют интереса и требуется получить решение при больших значениях времени  $t$ , то интегрировать уравнения следует со значительно большим шагом по неявной схеме.



Фиг. 2

При этом гарантируется устойчивость решения и необходимая точность в областях медленного изменения функций, даже если ошибки в области погранслоя будут велики.

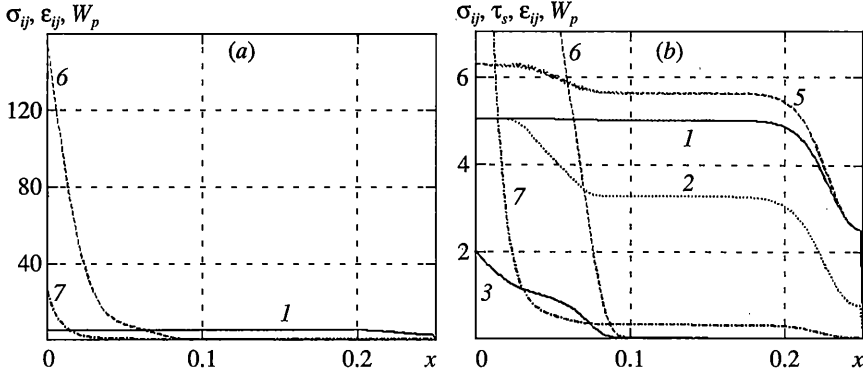
**7. Численные результаты.** Численные результаты приведены на фиг. 2–4. На них показаны распределения величин по  $x$  в определенный момент времени  $t \gg \tau$ . Кривая (1) отвечает напряжению  $\sigma_{11}$ , (2) –  $\sigma_{22}$ , (3) –  $\sigma_{12}$ , (4) – пределу текучести  $\tau_s$ , (5) – деформации  $\epsilon_{11}$ , (6) –  $\epsilon_{12}$ , (7) – пластической работе  $W_p$ . Вычисления производились при  $\delta = 100$ ;  $\nu = 0.3$ . Распределения на фиг. 2–4 получены по явной схеме с шагом  $\Delta t = 0.00125$ .

7.1. Сначала рассмотрим задачу о продольно-поперечном ударе постоянной интенсивности по полупространству из упруговязкоидеальнопластического материала при следующих граничных условиях  $\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 H(t)$  и  $\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 H(t)$ , где  $H(t)$  – ступенчатая функция.

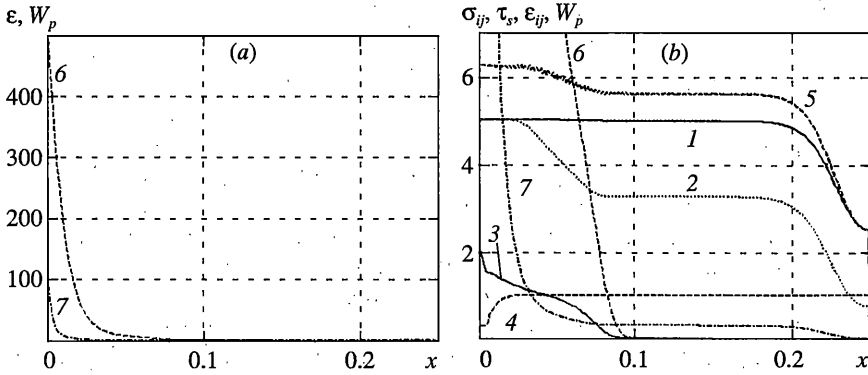
На фиг. 2 приведены распределения напряжений и деформаций в полупространстве в момент времени  $t = 0.25$  при  $\sigma_{11}^0 = 5\sigma_s$ ,  $\sigma_{12}^0 = 0.75\tau_s$ , т.е.  $\sigma_{12}^0$  меньше предела текучести. В окрестности плоскости  $x = 0$  образуется область постоянных значений нормальных напряжений, деформаций и скоростей. Поперечная деформация в приграничной области не остается постоянной из-за отсутствия упрочнения на сдвиг (при наличии упрочнения деформация  $\epsilon_{12}$  тоже будет постоянной). Таким образом, при  $\sigma_{12}^0 < \tau_s$  краевого эффекта нет, а вблизи границы образуется область постоянных значений решения – плато, при этом  $\sigma_{11} \neq \sigma_{22}$ .

На фиг. 3 показано, как меняется характер решения в краевой зоне при  $\sigma_{12}^0 > \tau_s$  ( $\sigma_{11}^0 = 5\sigma_s$ ,  $\sigma_{12}^0 = 2\tau_s$ ). Для нормальных компонент остается зона постоянных значений, причем напряженное состояние в ней отвечает состоянию гидростатического давления  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma^0$ , в то время как касательные напряжения  $\sigma_{12}$ , деформации  $\epsilon_{12}$  и пластическая работа  $W_p$  сильно изменяются и образуют пограничный слой.

На фиг. 3 видно как распространяются пластические продольные и комбинированные продольно-поперечные волны. Упругий предвестник и продольная пластическая



Фиг. 3



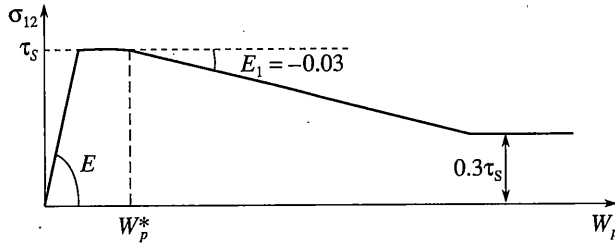
Фиг. 4

волна распространяются соответственно со скоростями  $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$  и  $c_p = (K/\rho)^{1/2}$ . Комбинированная волна связана с поперечной волной и распространяется со скоростью  $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ . Одновременно с изменением касательных напряжений происходит изменение напряжения  $\sigma_{22}$  (кривая 2) и  $\epsilon_{11}$  (кривая 6), при этом  $\sigma_{11}$  на фронте этой волны не меняется. Таким образом в комбинированной волне взаимодействуют только напряжения  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{22}$ , причем происходит нагружение по  $\sigma_{22}$ .

Это полностью подтверждает асимптотическое решение, полученное выше. Распределения  $\epsilon_{12}(x)$ , изменение во времени толщины полосы локализации и другие характеристики совпадают с численным решением.

На фиг. 4 рассмотрена задача при той же внешней нагрузке, что и на фиг. 3, но для материала с разупрочняющей диаграммой, показанной на фиг. 5 ( $W_p^* = 2$ ). Здесь нормальные компоненты ведут себя так же, как и в предыдущем примере, образуя в погранслое область постоянного гидростатического давления. Поперечные составляющие изменяются значительно резче, чем при идеальной пластичности. Как видно на фиг. 4, сдвиговая деформация выросла за то же время примерно в 3 раза больше, чем на фиг. 3. Это относится и к работе  $W_p$ .

На фиг. 4 показано изменение  $\tau_s(W_p)$  (кривая 4). Видно, что разупрочнение происходит только в полосе локализации, где наблюдается быстрый рост  $W_p$ . Хотя  $\partial\tau_s/\partial W_p = -0.03$



Фиг. 5

достаточно мало,  $\partial \tau_s / \partial x$  велико. При более крутом падении напряжения на участке разупрочнения производные  $\epsilon'_{12}(x)$  и  $W'_p(x)$  становятся настолько большими, что численный расчет оказывается неустойчивым и требуется существенное уменьшение шага интегрирования.

Следует подчеркнуть, что значение полученного решения в пограничном слое не ограничивается рассмотренной задачей. Оно имеет общее значение – описываемый им эффект будет справедлив для любого тела, на поверхности которого действует касательная нагрузка с интенсивностью превышающей предел текучести на сдвиг и время ее действия  $t_0 \gg \tau$ . Это следует из того факта, что локально любые волны представляют собой плоскую волну, для которой справедливо полученное решение. Кроме того, рассмотренное решение носит установившийся характер и, следовательно, вдали от фронтов волны, ускорения  $\partial v_1 / \partial t \rightarrow 0$ ,  $\partial v_2 / \partial t \rightarrow 0$  (в частности в области погранслоя) оно совпадает с квазистатическим решением.

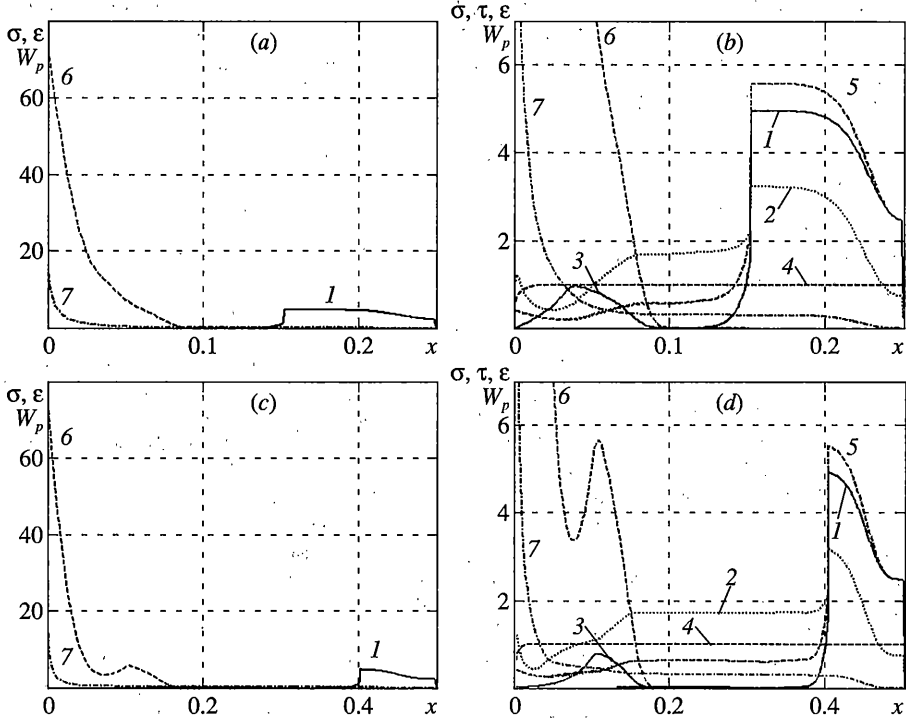
7.2. Рассмотрим задачу о продольно-поперечном ударе импульсом нормальных и касательных напряжений конечной продолжительности  $t = t_0$  (фиг. 6). Принимаем, что диаграмма материала имеет участок разупрочнения (фиг. 5), а приложенная нагрузка изменяется по закону  $\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 (H(t) - H(t - t_0))$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 (H(t) - H(t - t_0))$ ,  $\sigma_{12}^0 > \tau_s$ . При  $t = 0$  полупространство не возмущено ( $U|_{t=0} \equiv 0$ ).

При ударе средней продолжительности  $t_0 \sim 10\tau = 0.1$  упруговязкопластическое решение за время  $t \approx t_0$  успевает срелаксировать к упругопластическому и можно проследить распространение не только упруговязкопластических, но и пластических волн, хотя фронт пластической волны получается достаточно размытым в сравнении с фронтами предвестника и упругой разгрузки.

На фиг. 6 видно, что в пластическом материале волны упругой разгрузки распространяются с упругой скоростью  $c_1$ , догоняют пластическую волну  $c_p$  и уменьшают пластическую часть импульса, так что пластические деформации проникают вглубь пространства на конечную глубину, которая определяется продолжительностью интенсивности приложенного давления.

Разгрузка совершается только до нейтрального состояния, соответствующего пределу текучести материала, напряжения  $\sigma_{11} = 0$ ,  $\sigma_{22} = \tau_s$ .

При  $\sigma_{12}^0 > \tau_s$  после снятия нагрузки комбинированная волна распространяется по материалу, находящемуся в состоянии нейтрального нагружения. Благодаря остаточным напряжениям  $\sigma_{22}$  с ее приходом происходит перераспределение напряжений ( $\sigma_{22}$  падает, а  $\sigma_{12}$  растет) в соответствии с диаграммой идеальной пластичности или разупрочнения (в зависимости от того, в каком состоянии находится материал в рассматриваемой точке).



Фиг. 6

Комбинированная волна сильно отстает от продольной и движется со скоростью  $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$ . Интенсивность касательного напряжения быстро затухает и стремится к интенсивности упругой волны. Поперечная волна приводит к разгрузке по компоненте  $\sigma_{22}$  (кривая 2), но в целом действие комбинированной волны приводит к нагружению и так как перед фронтом было нейтральное состояние, то в материале происходит повторное пластическое нагружение (фиг. 6). При этом материал в этой зоне еще не достиг состояния разупрочнения, а находится в идеальнупластическом состоянии (см. кривую 4).

Вблизи поверхности  $x = 0$  образуется область локализации больших пластических деформаций сдвига – полоса адиабатического сдвига, которая и представляет основное отличие упруговязкопластического решения от упругопластического при разупрочнении материала.

В случае импульса конечной продолжительности, деформации в зоне пограничного слоя растут до определенной величины, зависящей от продолжительности интенсивности приложенного тангенциального напряжения  $\sigma_{12}^0$  на границе.

Из сравнения кривых на фиг. 6а, б и 6с, d, построенных для разных моментов времени  $t = 0.25$  и  $t = 0.5$ , видно, что пограничный слой сформировался за сравнительно небольшое время  $t = t_0 = 0.1$  после этого он практически не меняется. Продольная деформация  $\epsilon_{11} \sim \epsilon_s$  мала, а сдвиговая  $\epsilon_{12}$  в десятки раз больше нее, хотя разупрочнение в этом примере невелико, так как оно не успело развиваться вследствие небольшой продолжительности приложенного импульса. На фиг. 4 при неограниченном действии им-



пульса  $\varepsilon_{12}$  почти в 100 раз больше, чем  $\varepsilon_{11}$  и продолжает расти во времени как  $t^{1/2}$  в соответствии с формулой (4.7), полученной асимптотическим методом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00701) и Научной Программы "Университеты России" (грант № 015.04.01.66).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кукуджанов В.Н. Распространение упруго-пластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 48 с.
2. Kukudzhanov V.N. Investigation of shock wave structure in elasto-visco-plastic bars using the asymptotic method // Arch. Mech. 1981. V. 33. № 5. P. 739–751.
3. Кукуджанов В.Н. Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида. // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 5. С. 96–111.
4. Kukudzhanov V.N. Surface shear strain localization and damage of elastoviscoplastic material in wave propagation problems. // Plasticity and Impact Mechanics: Proc. 8th Intern. Symp. IMPLAST 2003 / Ed. N.K. Gupta. New Delhi: Phoenix Publ. House, 2003. P. 777–786.
5. Bleich H.H., Nelson I. Plane waves in an elastic-plastic half space due to combined surface pressure and shear. // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1966. V. 33. № 3. P. 149–158.
6. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
7. Кукуджанов В.Н. Нелинейные волны в упругопластических средах. // Волновая динамика машин. / под. ред. К.В. Фролова и Г.К. Сорокина. М.: Наука. 1991. С. 126–140.
8. Needleman A. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1988. V. 67. № 1. P. 69–85.
9. Steinmann P., Stein E. Finite element localization analysis of micropolar strength degrading materials // Proc. Intern. Conf. Computer Modeling of Concrete Structures. Eds. H. Mang, et al. Swansea: Peneridge Press, 1994. P. 434–444.
10. Jonson G.R., Cook W.H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperature and pressures // Eng. Fracture Mech. 1985. V. 21. № 1. P. 31–48.
11. Barton D.C. The high strain rate fracture properties of ductile materials: A combined experimental-numerical approach. Plasticity and Impact Mechanics: Proc. 8th Intern. Symp. IMPLAST 2003. / Ed. N.K. Gupta. New Delhi: Phoenix Publ. House, 2003. P. 134–142.
12. Clifton R.J., Klopp R.W. Pressure-shear plate impact testing // Metals Handbook. 1985. V. 8. P. 230–239.
13. Zhou M., Needleman A., Clifton R.J. Finite element simulations of shear localization in plate impact // J. Mech. and Phys. Solids. 1994. V. 42. № 3. P. 423–458.
14. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 526 с.
15. Кукуджанов В.Н. Разностные методы решения задач механики деформируемых тел. М.: Изд-во МФТИ, 1992. 122 с.
16. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
17. Брызгалов Ю.Б., Кукуджанов В.Н. Численное моделирование разрушения и локализации деформаций при импульсном нагружении стержней. // Матем. моделирование. 2001. Т. 13. № 6. 99–103 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.05.2003