

© 2003 г. Л. Д. АКУЛЕНКО, Д. В. ГЕОРГИЕВСКИЙ, Д. М. КЛИМОВ,
С. А. КУМАКШЕВ, С. В. НЕСТЕРОВ

ВЫДАВЛИВАНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА С МАЛЫМ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ ИЗ ПЛОСКОГО КОНФУЗОРА

На основе теоретической модели Бингама – Ильюшина для случая малого предела текучести материала при сдвиге исследована задача стационарного деформирования вязкопластической среды в плоском конфузоре. Решение задачи построено в первом приближении по малому пределу текучести, для которого порождающим является решение соответствующей задачи Джефффри – Гамеля о течении вязкой жидкости. Применен разработанный авторами численно-аналитический метод ускоренной сходимости, позволяющий получить высокоточные решения в широкой области значений параметров системы. Определены и прокомментированы основные характеристики процесса: профили скорости и давления, квазижесткие зоны и зоны течения; исследовано их поведение при изменении параметров задачи. Установлены и объяснены новые эффекты, имеющие механическое содержание (количество, форма и расположение квазижестких зон; бифуркации картины течений, поведение скорости частиц среды на границах квазижестких зон и др.).

Основой технологических операций в производстве тонкого листа, в частности, идущего на изготовление слоистых композитов, является безынерционное (квазистатическое) выдавливание исходных продуктов из фильер и конфузоров. Минимизация затрат на эту операцию обусловлена выбором геометрии области (угла раствора конфузора, профиля стенок) и распределением давления на бесконечности. Оптимизация геометрии и величины давления чаще всего связываются с требованием радиальности ламинарного режима, а в случае криволинейных стенок – “псевдорадиальности”, т.е. равенства нулю соответствующей компоненты скорости.

Другим обширным направлением, посвященным технологиям истечения сплошной среды из тонких отверстий и щелей, является перемешивание, где, наоборот, требуется создание условий, нарушающих ламинарность движения. Это направление тесно примыкает к гидродинамической устойчивости и различным теориям турбулентности.

Вопросы устойчивости деформирования вязкопластических тел были впервые систематически изучены в классических работах А.А. Ильюшина [1] и А.Ю. Ишлинского [2, 3]. В [1] дана общая постановка задачи устойчивости плоского течения в терминах возмущений функции тока и потенциала скоростей, а также рассмотрены задачи о растяжении – сжатии полосы и растекании цилиндра с учетом эксцентриситета его граничных поверхностей. В [2, 3] исследована устойчивость вязкопластических течений полосы, круглого прута и пластины. Фундаментальные и прикладные результаты работ [1–3] имели актуальное значение, особенно в военное время, и сыграли большую роль в оптимизации технологических режимов производства изделий для оборонной промышленности. Современный обзор по неоднородным вязкопластическим течениям и их устойчивости относительно двух- и трехмерных возмущений дан в [4].

Ниже исследована задача о медленном стационарном деформировании вязкопластического материала в плоском конфузоре с произвольным, в том числе достаточно большим, углом раствора. Пластические свойства среды выражены гораздо слабее вязких, поэтому построено первое приближение решения по малому пределу текучести. В зависимости от геометрических и физико-механических параметров определены квазижесткие зоны [5, 6], их границы и количество, а также особенности профилей скорости и давления при малых, средних и больших углах раствора конфузора.

1. Определение невозмущенного движения среды. Задача Джеффри – Гамеля.

Поскольку для вязкопластического деформирования, изучаемого ниже, порождающим (опорным) является решение задачи о радиальном движении (течении) вязкой несжимаемой жидкости в плоском конфузоре и диффузоре – задачи Джеффри – Гамеля [7–9], – опишем прежде всего это решение.

Итак, течение несжимаемой жидкости с плотностью ρ и динамической вязкостью μ осуществляется в плоской области $\Omega = \{|\theta| < \beta\}$. В полюсе полярной системы координат (r, θ) имеется особенность “источник–сток” мощности Q . Примем, что конфузурное течение реализуется при $Q > 0$, а диффузорное при $Q < 0$. Вследствие того, что в плоском случае размерность $[Q] = [v]$, где $v = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости, единственной безразмерной комбинацией будет отношение Q/v , выполняющее роль числа Рейнольдса Re .

Исследование радиального движения данной среды в Ω под действием приложенного на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) давления сводится к решению нелинейной краевой задачи с дополнительным условием постоянства расхода [10]:

$$\begin{aligned} y'' + a^2 y - by^2 &= \lambda, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0 \\ \int_0^1 y(x) dx &= 1, \quad a = 4\beta, \quad b = 2\beta Re \end{aligned} \quad (1.1)$$

В (1.1) $y(x)$ – безразмерная неизвестная функция, характеризующая профиль скорости v так, что

$$y(x) = 2\beta V(\theta), \quad v_r = -QV(\theta)/r, \quad v_\theta = 0 \quad (1.2)$$

причем независимые переменные θ и x связаны линейным образом: $\theta = \beta(2x - 1)$. Постоянные $\lambda = y''(0) = y''(1)$ и $\gamma = y'(0) = \pm\gamma$ неизвестны и подлежат определению при заданных парах чисел (a, b) либо (β, Re) .

В терминах функции $V(\theta)$ исходная постановка задачи Джеффри – Гамеля (с учетом (1.2)) записывается следующим образом [7, 10]:

$$\begin{aligned} V'' + 4V - ReV^2 &= C, \quad -\beta < \theta < \beta, \quad V(\pm\beta) = 0 \\ \int_{-\beta}^{\beta} V(\theta) d\theta &= 1, \quad C = V''(\pm\beta) \end{aligned}$$

В дальнейшем при численных расчетах будем пользоваться постановкой задачи в виде (1.1), которую для удобства представим в форме нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' + a^2 y - by^2 &= \lambda, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0 \\ z' &= y - 1, \quad z(0) = z(1) = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где λ – неизвестный параметр, подлежащий определению.

Отметим, что после определения функций $y(x)$ и $V(\theta)$ можно найти давление [10]:

$$p(r, \theta) = \frac{\rho Q^2 C - 4V(\theta)}{2r^2 \text{Re}} \equiv \frac{2\rho Q^2 \lambda - a^2 y(x)}{r^2 a^2 b} \quad (1.4)$$

Из (1.4) видно, что (а) для осуществления радиальности течения профиль давления должен быть строго определенным; (b) при $\text{Re} \rightarrow 0$ ($b \rightarrow 0$) давление становится неограниченным, хотя решение задачи (1.1) может быть регулярным.

Ненулевые компоненты тензора скорости деформации v_{rr} , $v_{r\theta}$, $v_{\theta\theta}$ и квадратичный инвариант этого тензора $U = 2(v_{rr}^2 + v_{r\theta}^2)^{1/2}$, называемый максимальной скоростью скольжения, следующим образом выражается через $V(\theta)$:

$$v_{rr} = -v_{\theta\theta} = \frac{QV(\theta)}{r^2}, \quad v_{r\theta} = -\frac{QV'(\theta)}{2r^2} \quad (1.5)$$

$$U = \frac{Q}{r^2} \sqrt{V'^2 + 4V^2}$$

Введем далее вспомогательную функцию $\Psi(\theta)$:

$$\sin \Psi = \frac{2v_{rr}}{U}, \quad \cos \Psi = \frac{2v_{r\theta}}{U}, \quad 0 < \Psi < \pi \quad (1.6)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , $\sigma_{r\theta}$ и квадратичный инвариант девиатора этого тензора $T = [(\sigma_{rr} + p)^2 + \sigma_{r\theta}^2]^{1/2}$, называемый максимальным касательным напряжением, имеют вид

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{2Q^2 V(\theta)}{\text{Re} r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -p - \frac{2\rho Q^2 V(\theta)}{\text{Re} r^2}, \quad \sigma_{zz} = -p \quad (1.7)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\rho Q^2 V'(\theta)}{\text{Re} r^2}, \quad T = \frac{\rho Q^2}{\text{Re} r^2} \sqrt{V'^2 + 4V^2}$$

Величины T и U связаны между собой физически линейным скалярным определяющим соотношением ньютоновской жидкости

$$T = \mu U \equiv \frac{\rho Q}{\text{Re}} U \quad (1.8)$$

Известны [7] классические аналитические исследования задачи (1.3), связанные с анализом эллиптических интегралов и поведения корней кубического уравнения с параметрами. Как при диффузорном, так и конфузорном течениях возможны многомодовые (невыпуклые) профили скорости и несимметричные относительно луча $\theta = 0$ режимы, содержащие зоны возвратного течения [11]. Кроме того, при увеличении Re стационарное диффузорное течение делается неустойчивым и возникает турбулентность. Предельным при $\text{Re} \rightarrow \infty$ является течение, отвечающее невязкой жидкости [7, 10, 11].

Авторами разработана методика и проведено аналитико-численное исследование задачи (1.3) в широкой области параметров Re и β [10–12], в частности, для “экзотических” значений β : $\beta = \pi/2$ (вязкое течение над полупространством с целью-стоком), $\beta = \pi$ (течение во всем пространстве с двумя слипающимися неподвижными полуплоскостями) [12]. Увеличение угла между стенками конфузора в область развернутых углов приводит к существенной перестройке профиля скорости и новым качественным эффек-

там. Итак, решение задачи Джеффри – Гамеля, далее считающееся известным, используется как порождающее движение для исследования задачи деформирования вязкопластической среды.

2. Стационарное течение вязкопластической среды с малым пределом текучести. Поиск стационарного радиального решения в задаче о вязкопластическом течении в плоском диффузоре или конфузоре в виде $v_r(r, \theta) = V(\theta)/r$, аналогичном (1.2) для вязкой среды, приводит к противоречиям. Имеются обзоры [4, 5] аналитических, численных и экспериментальных исследований по вязкопластическим течениям в сужающихся каналах, в которых детально обсуждается этот вопрос.

Вместо (1.8) скалярное определяющее соотношение модели Бингама – Ильюшина записывается в виде

$$T = \tau_s + \frac{\rho Q}{\text{Re}} U \quad (2.1)$$

где τ_s – предел текучести при сдвиге. В области Ω имеем уравнения движения и условие несжимаемости

$$-\text{grad} p + \text{Div} s = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad s = \sigma + pI \quad (2.2)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.3)$$

Девиатор напряжений s связан с тензором скорости деформации v следующим образом:

$$s = 2 \left(\frac{\tau_s}{U} + \frac{\rho Q}{\text{Re}} \right) v \quad (2.4)$$

Подставляя выражение тензора v через вектор скорости $\mathbf{v}$ в соотношение (2.4), а затем последнее в (2.2), получим замкнутую систему трех уравнений (2.2), (2.3) относительно v_r , v_θ и p . Дополним эту систему граничным условием прилипания

$$v_r = v_\theta = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega = \{|\theta| = \beta\} \quad (2.5)$$

и условием расхода

$$\int_{-\beta}^{\beta} r v_r d\theta = -Q \quad (2.6)$$

Будем помечать верхним нулевым индексом параметры решения задачи Джеффри – Гамеля (см. п. 1) и представим решение задачи (2.2) – (2.6) в виде асимптотических разложений

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \mathbf{v}^{(n)}, & v &= v^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n v^{(n)} \\ p &= p^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n p^{(n)}, & s &= s^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n s^{(n)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где τ – безразмерный малый параметр ($\tau \ll 1$), а известные функции $\mathbf{v}^0$, v^0 , p^0 , s^0 отвечают невозмущенному (порождающему) движению. Подставляя разложения (2.7) в (2.2) и (2.3), линеаризуем последние по τ :

$$-p_{,r}^{(1)} + \frac{s_{r\theta,\theta}^{(1)}}{r} + s_{rr,r}^{(1)} + 2 \frac{s_{rr}^{(1)}}{r} = -\rho Q \left(\frac{V}{r} v_{r,r}^{(1)} - \frac{V}{r^2} v_r^{(1)} + \frac{V'}{r^2} v_\theta^{(1)} \right) \quad (2.8)$$

$$-\frac{p_{,\theta}}{r} + \frac{s_{rr,\theta}^{(1)}}{r} + s_{r\theta,r}^{(1)} + 2\frac{s_{r\theta}^{(1)}}{r} = -\rho Q \left(\frac{V}{r} v_{\theta,r}^{(1)} + \frac{V}{2} v_{\theta}^{(1)} \right) \quad (2.9)$$

$$v_{r,r}^{(1)} + \frac{v_r^{(1)}}{r} + \frac{v_{\theta,\theta}^{(1)}}{r} = 0 \quad (2.10)$$

Для неизвестной U получим в первом приближении по τ :

$$U = U^0 + \tau U^{(1)} + O(\tau^2), \quad U^{(1)} = \frac{2}{U^0} v^0 : v^{(1)} \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U^0} \left(1 - \frac{\tau U^{(1)}}{U^0} \right) + O(\tau^2)$$

Как известно, при деформировании вязкопластического материала возможно образование жестких зон (жестких ядер) Ω_r , где деформации отсутствуют, и зон течения Ω_f . Эти множества задаются соотношениями

$$\Omega_r = \{x \in \Omega : T < \tau_s\}, \quad \Omega_f = \{x \in \Omega : T > \tau_s\} \quad (2.12)$$

В областях Ω_r (2.12) максимальная скорость скольжения U равна нулю. Для рассматриваемой задачи жесткие зоны, понимаемые в таком классическом смысле, отсутствуют. Об этом свидетельствуют аналитические и экспериментальные результаты многих работ [13–17]. Однако в задачах, где предел текучести мал и, следовательно, пластические свойства материала выражены гораздо слабее чем вязкие, удобно ввести понятие асимптотической границы квазижестких зон, как множества точек, в которых $T = \tau_s$. По аналогии квазижесткие зоны будем по-прежнему обозначать Ω_r , за множествами Ω_f (2.12) оставим название зон течения (деформирования). В терминах скоростей деформаций уравнение поверхности Σ_r , отделяющей Ω_r от Ω_f , записывается следующим образом [5, 18]:

$$\Sigma_r = \{x \in \Omega : 2\tau v^0 : \dot{v}^{(1)} = -(U^0)^2\} \quad (2.13)$$

Приставка “квази-” означает, что скорости деформации внутри областей Ω_r не равны нулю, а являются величинами малости порядка τ и выше.

В некоторых одномерных задачах, например, в задаче о вязкопластическом течении Пуазейля, квазижесткие зоны в указанном выше смысле совпадают с жесткими. Так, для течения Пуазейля в плоском слое при переходе от вязкого материала к вязкопластическому с малым пределом текучести квазижесткая зона, как и жесткая в классическом смысле, представляет собой полосу толщины порядка τ в середине слоя. В задачах же с более сложной кинематикой, не являющейся одномерным сдвигом, определенную существенную в теоретическом и прикладном аспектах информацию об областях с малыми скоростями деформаций может дать картина квазижестких зон. Построение и анализ этой картины излагается ниже.

Линеаризуем далее векторные определяющие соотношения (2.4), пользуясь разложением (2.11) для $1/U$:

$$s^0 + \tau s^{(1)} + O(\tau^2) = 2 \left[\frac{\tau_s}{U^0} \left(1 - \tau \frac{U^{(1)}}{U^0} \right) + \frac{\rho Q}{\text{Re}} \right] (v^0 + \tau v^{(1)}) + O(\tau^2) \quad (2.14)$$

$$s^0 = 2 \frac{\rho Q v^0}{\text{Re}}, \quad s^{(1)} = 2 \left(\frac{\tau_s}{\tau U^0} v^0 + \frac{\rho Q}{\text{Re}} v^{(1)} \right) - \frac{2\tau_s}{U^0} \left(\frac{U^{(1)}}{U^0} v^0 - v^{(1)} \right) \quad (2.15)$$

Пусть размерный предел текучести τ_s таков, что первое слагаемое в (2.15) имеет порядок $O(1)$, а второе – τ . Тогда можно записать следующее выражение для тензорного коэффициента разложения s (2.14):

$$s^{(1)} = 2 \left[\frac{\tau_s}{\tau U} v^0 + \frac{\rho Q}{\text{Re}} v^{(1)} \right] \quad (2.16)$$

С учетом (1.6) и линеаризованных соотношений Стокса для компонент $s^{(1)}$ имеем

$$s_{rr}^{(1)} = -s_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{\tau_s}{\tau} \sin \Psi + \frac{2\rho Q}{\text{Re}} v_{r,r}^{(1)}, \quad \sin \Psi \equiv 2 \frac{v_{rr}^0}{U^0}, \quad 0 < \Psi < \pi \quad (2.17)$$

$$s_{r\theta}^{(1)} = \frac{\tau_s}{\tau} \cos \Psi + \frac{\rho Q}{\text{Re}} \left(\frac{v_{r,\theta}^{(1)}}{r} + v_{\theta,r}^{(1)} - \frac{v_{\theta}^{(1)}}{r} \right), \quad \cos \Psi \equiv 2 \frac{v_{r\theta}^0}{U^0}$$

Граничные условия (2.5), (2.6) из-за их линейности будут однородными

$$v_r^{(1)}(\pm\beta) = v_{\theta}^{(1)}(\pm\beta) = 0, \quad \int_{-\beta}^{\beta} r v_r^{(1)} d\theta = 0 \quad (2.18)$$

Подставим выражения (2.17) в уравнения движения (2.8) и (2.9) и получим замкнутую относительно функций $v_r^{(1)}$, $v_{\theta}^{(1)}$, $p^{(1)}$ систему трех уравнений (2.8) – (2.10) с граничными условиями (2.18). Система неоднородна из-за наличия слагаемых с Ψ в правых частях выражений (2.17).

Будем искать решение этой системы в виде [14]:

$$v_r^{(1)} = -\frac{\tau_s}{\tau \rho Q} \frac{r W'(\theta)}{2}, \quad v_{\theta}^{(1)} = \frac{\tau_s}{\tau \rho Q} r W(\theta) \quad (2.19)$$

Таким образом, автоматически удовлетворяются условия несжимаемости (2.10). Используя представления (2.19), выпишем выражения для компонент $v_{rr}^{(1)}$, $v_{\theta\theta}^{(1)}$, $v_{r\theta}^{(1)}$ через функцию $W(\theta)$:

$$v_{rr}^{(1)} = -v_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{\tau_s}{\tau \rho Q} \frac{W'(\theta)}{2}, \quad v_{r\theta}^{(1)} = -\frac{\tau_s}{\tau \rho Q} \frac{W''(\theta)}{4} \quad (2.20)$$

Установлено [5], что поставленную задачу можно редуцировать к одному уравнению относительно безразмерной функции $W(\theta)$ с однородными граничными условиями

$$\left[-\frac{W''''}{\text{Re}} - \frac{4W'}{\text{Re}} + 2V'W + 2(\cos \Psi)' + 4 \sin \Psi \right]' = 0 \quad (2.21)$$

$$W(\pm\beta) = 0, \quad W'(\pm\beta) = 0 \quad (2.22)$$

После нахождения $W(\theta)$ из линейной краевой задачи (2.21), (2.22) определяется давление $p^{(1)}$:

$$p^{(1)} = \left[-\frac{\rho Q}{2\text{Re}} (W'''' + 4W') + \frac{\tau_s}{\tau} ((\cos \Psi)' + 2 \sin \Psi) + \rho Q V' W \right] \ln r + P(\theta) \quad (2.23)$$

$$P'(\theta) = 2\rho Q V W - \frac{\tau_s}{\tau} (\sin \Psi)' + 2 \frac{\tau_s}{\tau} \cos \Psi \quad (2.24)$$

В уравнения (2.21), (2.23), (2.24) необходимо подставить известную из решения задачи Джеффри – Гамеля функцию $V(\theta)$.

Особый интерес здесь представляет нахождение асимптотической границы Σ_r (2.13). Подставляя в (2.13) выражения (1.5) компонент тензора v^0 через $V(\theta)$ и выражения (2.20) компонент тензора $v^{(1)}$ через $W(\theta)$, получим в полярных координатах

$$r^*(\theta) = Q \left[\frac{\rho}{\tau_s} \frac{2(V'^2 + 4V^2)}{4VW' - V'W''} \right]^{1/2} \equiv \frac{Q\sqrt{\rho}}{\sqrt{\tau_s}} R^*(\theta) \quad (2.25)$$

Как следует из (1.5), (2.19), (2.20), на кривой (2.25) компоненты вектора скорости и тензора скоростей деформаций имеют вид

$$v_r^* = -\left(\frac{V}{R^*} + \frac{R^*W'}{2} \right) \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}, \quad v_\theta^* = R^*W \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \quad (2.26)$$

$$v_{rr}^* = -v_{\theta\theta}^* = \left(\frac{V}{R^{*2}} - \frac{W'}{2} \right) \frac{\tau_s}{\rho Q}, \quad v_{r\theta}^* = -\left(\frac{V'}{2R^{*2}} + \frac{W''}{4} \right) \frac{\tau_s}{\rho Q} \quad (2.27)$$

В выражениях (2.26) и (2.27) приведены лишь первые члены разложений.

3. Расчет течения вязкопластической среды. Решение краевой задачи (2.21), (2.22) для функции $W(\theta)$ удобнее строить в безразмерных переменных аналогично (1.3). Уравнение четвертого порядка типа (2.21) допускает однократное элементарное интегрирование; в результате получается линейная неоднородная краевая задача вида [10]

$$L[w] \equiv w''' + a^2 w' - 2by'w = \kappa + \Phi, \quad w(x) \equiv w\left(\frac{\theta + \beta}{2\beta}\right) = W(\theta)$$

$$\Phi = \Phi(y, y', \lambda, a, b) = a^3 by(y'^2 + a^2 y^2)^{-3/2} (2y'^2 + 2a^2 y^2 - \lambda y - by^3) \quad (3.1)$$

$$w(0) = w'(0) = w(1) = w'(1) = 0, \quad \kappa = \text{const}$$

Здесь L – дифференциальный оператор третьего порядка, κ – неизвестный параметр, определяемый при решении краевой задачи совместно с постоянной интегрирования уравнения ζ . Эти параметры аналогичны γ, λ в задаче (1.3) и также зависят a, b . Из (3.1) следует, что $\kappa = w'''(0)$, а неизвестную ζ можно положить равной $\zeta = w''(0)$. Отметим, что функция Φ (неоднородность) обусловлена наличием функций $\cos \Psi, \sin \Psi$ в (2.21). Она полностью определяется в результате решения задачи Джеффри – Гамеля (1.3). Исследование свойств симметрии задачи (3.1) свидетельствует, что функция $w(x)$ антисимметрична относительно $x = 1/2$.

Величины $\zeta(a, b)$, $\kappa(a, b)$ вычисляются в результате однократного интегрирования трех независимых задач Коши для функций $w_\zeta, w_\kappa, w_\Phi$. Функция чувствительности w_ζ решения w задачи (3.1) по параметру ζ описывается уравнением и начальными условиями вида

$$L[w_\zeta] = 0, \quad w_\zeta(0) = w_\zeta'(0) = 0, \quad w_\zeta''(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2)$$

Считается, что задача Коши (3.2) решена для рассматриваемых значений a, b . Как показывает вычислительная практика, это не представляет трудностей.

Аналогично, функции w_κ, w_Φ чувствительности решения w по κ, Φ описываются соотношениями

$$L[w_\kappa] = 1, \quad w_\kappa(0) = w_\kappa'(0) = w_\kappa''(0) = 0 \quad (3.3)$$

$$L[w_\Phi] = \Phi, \quad w_\Phi(0) = w_\Phi'(0) = w_\Phi''(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Задачи Коши (3.3) для w_κ , w_Φ также должны быть проинтегрированы с требуемой точностью. Найденные функции позволяют представить искомое решение краевой задачи (3.1) в виде

$$\begin{aligned} w(x, a, b) &= \zeta w_\zeta(x, a, b) + \kappa w_\kappa(x, a, b) + w_\Phi(x, a, b) \\ \zeta &= \zeta(a, b) = (w_\kappa w'_\Phi - w'_\kappa w_\Phi)_{x=1} \delta^{-1} \\ \kappa &= \kappa(a, b) = -(w_\zeta w'_\Phi - w'_\zeta w_\Phi)_{x=1} \delta^{-1} \\ \delta &= \delta(a, b) = (w'_\zeta w'_\kappa - w'_\kappa w'_\zeta)_{x=1} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

В процессе интегрирования задач (3.2), (3.3) находятся также производные $w'_{\zeta, \kappa, \Phi}$, $w''_{\zeta, \kappa, \Phi}$ по x . После вычисления параметров ζ , κ и подстановки в выражение (3.4) для функции w и ее производных w' , w'' целиком определяется решение, которое используется далее для построения искомых характеристик деформирования вязкопластической среды, см. п. 2. Полное решение задачи заключается фактически в построении универсальных зависимостей

$$\gamma = \gamma(a, b), \quad \lambda = \lambda(a, b), \quad \zeta = \zeta(a, b), \quad \kappa = \kappa(a, b) \quad (3.5)$$

Величины γ , λ представляют собой недостающие постоянные для интегрирования задачи Коши, определяющей решение краевой задачи Джеффри – Гамеля (1.3) о течении вязкой жидкости, см. п. 1. Постоянные λ , ζ , κ определяют недостающие параметры при интегрировании задачи Коши для функций w (3.1) после подстановки найденных функций y , y' . Функции w , y совместно с производными приближенно описывают характеристики деформирования вязкопластической среды согласно п. 2.

Главная часть давления в среде определяется величиной $p^0(\theta)$ (1.4), т.е. давлением вязкой жидкости. Эта величина может быть приведена нормировкой к удобному виду

$$p^0(\theta) = hP(x), \quad h = 2 \frac{\rho Q^2}{r^2}, \quad P(x) = \frac{\lambda - a^2 y(x)}{a^2 b} \quad (3.6)$$

Функция P в (3.6) характеризует профиль давления; она зависит от параметров a , b также посредством коэффициента λ и функции y . Добавочная часть давления $tr^{(1)}$, обусловленная наличием предела текучести при сдвиге τ_s , асимптотически мала (порядка τ , $\tau \ll 1$) см. (2.7), (2.23).

К основным характеристикам течения вязкопластической среды относится граница $r^*(\theta)$ (2.25) квазижесткой зоны и компоненты скорости v_r^* , v_θ^* , (2.26) частиц среды на этой границе. Отметим, что граница находится асимптотически далеко ($r^* \sim \tau^{-1/2}$) от начала координат (стока), а компоненты скорости асимптотически малы (v_r^* , $v_\theta^* \sim \tau^{1/2}$). После приведения к нормированным величинам получим симметричное относительно $x = 1/2$ выражение для границы (см. (2.25)):

$$\begin{aligned} r^*(\theta) &= \frac{Q\sqrt{\rho}}{\sqrt{\tau_s}} R(x), \quad R(x) = \frac{f(x)}{d(x)}, \quad f(x) = (y'^2 + a^2 y^2)^{1/2} \\ d(x) &= (a^2 y w' - y' w'')^{1/2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функция f определена для всех $0 \leq x \leq 1$ и строго положительна во внутренних точках. Функция R определяет “квазижесткую границу” среды. Ее интересные свойства обус-

ловлены поведением знаменателя – функции d (3.7). Для различных значений параметров a и b подкоренное выражение в знаменателе $d(x)$ для разных x может принимать положительные (граница существует) и отрицательные значения (граница отсутствует). Нули функции d отвечают асимптотам границ зоны, см. п. 4. Значительный интерес представляет исследование количества квазижестких зон и их поведения (возникновения или исчезновения), формы границы и т.д. в зависимости от величин параметров a и b .

Компоненты v_r^* , v_θ^* вектора скорости квазижесткой зоны описываются выражениями (2.26). Эти функции имеют те же особенности, что и функция R , поскольку $R(x)$ может обращаться в нуль на границе $x = 0, 1$ конфузора (там же обращается в нуль функция $y(x)$), см. ниже. Преобразование выражений v_r^* , v_θ^* к нормированному виду аналогично (3.7) дает

$$\begin{aligned} v_r^*(\theta) &= \frac{\sqrt{\tau_s}}{\sqrt{\rho}} V_r(x), & V_r &= -\frac{2}{a} \frac{y(x)}{R(x)} - \frac{1}{a} R(x) w'(x) \\ v_\theta^*(\theta) &= \frac{\sqrt{\tau_s}}{\sqrt{\rho}} V_\theta(x), & V_\theta &= R(x) w(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

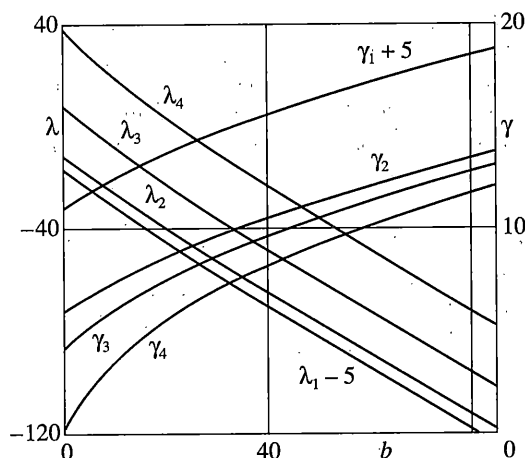
Скорость $\mathbf{v}^* \equiv (v_r^*, v_\theta^*)$ на границе $r^*(\theta)$ квазижесткой зоны, задаваемая асимптотическими выражениями (3.8), не есть скорость движения самой квазижесткой зоны. В классическом случае скорость такой зоны вычислялась бы по формуле Эйлера. Скорости же деформаций при $r > r^*(\theta)$ не равны нулю, поэтому движение квазижесткой зоны здесь не определяется формулой Эйлера.

Функции $V_r(x)$, $V_\theta(x)$ зависят также от параметров a , b и обладают весьма интересными свойствами, см. результаты расчетов в п. 4. На основе свойств симметрии функций y , R , w , w' можно установить, что функция V_r симметрична, а V_θ антисимметрична относительно $x = 1/2$. Асимптотическое поведение функций скоростей на границе $V_{r,\theta}$ обусловлено асимптотикой функции границы $R(x)$.

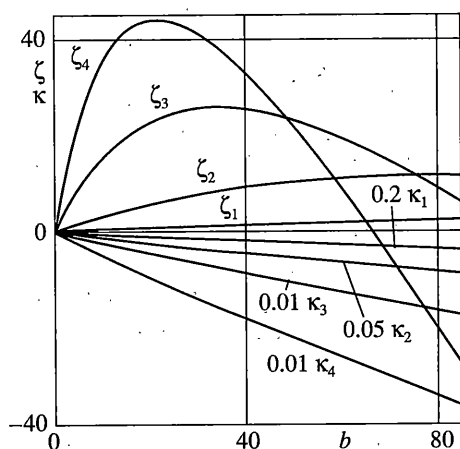
Другие характеристики течения вязкопластической среды в плоском конфузоре согласно п. 2 могут быть найдены эффективно с помощью функций $V(\theta)$, $W(\theta)$, т.е. $y(x)$, $w(x)$ и их производных.

4. Математическое моделирование и выводы. Результаты расчетов согласно методике п. 3 представлены на фиг. 1–9. Вычисления проводились с относительной погрешностью 10^{-6} – 10^{-7} для широкого диапазона изменения параметра $a = 4\beta$ (угла раствора конфузора $0 < \beta < \pi$) и значений параметра b , $0 < b \leq 100$, характеризующего число Рейнольдса ($b = 2\beta \text{Re}$, $\text{Re} \sim 10^2$ – 10^3). Получающаяся картина течений среды весьма многообразна и ее полное исчерпывающее описание с учетом большого числа тонких качественных особенностей затруднительно. Поэтому выделим и прокомментируем главные характерные свойства и особенности для четырех значений угла $\beta = \beta_i = 1^\circ, 10^\circ, 1 \text{ рад} = 180^\circ/\pi, 89^\circ$ ($i = 1, 2, 3, 4$); (угловой размер конфузора равен 2β , β – угол полураствора).

Сравнительно малому углу $\beta = \beta_1 = 1^\circ \approx 0.0174 \text{ рад}$. отвечает переход от случая плоскопараллельных стенок $\beta = 0$ (случай Пуазейля) к качественно другой картине деформирования при $\beta > 0$, которую затруднительно построить методами регулярных возмущений. Исследование деформирования вязкопластического материала в конфузоре при $\beta = 5^\circ$ – 10° , для определенности взят угол $\beta = \beta_2 = 10^\circ \approx 0.174 \text{ рад}$., представляет интерес для технологических приложений. Случай больших углов $\beta \sim 1$ (рассматривается $\beta = \beta_3 = 1 \text{ рад}$.) соответствует тупому углу между стенками конфузора; он может иметь



Фиг. 1



Фиг. 2

прикладное значение для исследования геофизических проблем. Близкая к предельной ситуация $\beta \approx \pi/2$, отвечающая плоскости с щелью для стока (для конкретности $\beta = \beta_4 = 89^\circ$) представляется весьма интересной в научном и прикладном аспектах [5].

Решения порождающих задач Джеффри – Гамеля целиком определяются значениями параметров γ, λ [10]:

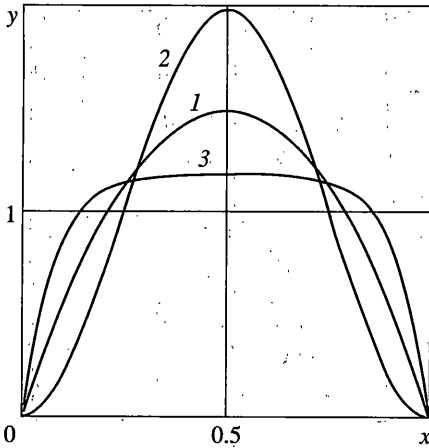
$$\gamma = \gamma_i = \gamma(a_i, b), \quad \lambda = \lambda_i = \lambda(a_i, b) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.1)$$

посредством интегрирования задач Коши (1.3). Кривые γ_i, λ_i представлены на фиг. 1 для значений $0 \leq b \leq 85$. Их определение сопряжено со значительными вычислительными трудностями, обусловленными погранслойными эффектами (уже при $b \geq 30$). Эти кривые имеют сравнительно простую форму, однако они должны быть вычислены с высокой точностью (вплоть до пятого – шестого знака после запятой), которая возрастает при увеличении параметра b . Следует отметить, что кривые $\lambda_{1,2}, \gamma_{1,2}$ различаются мало; поэтому на фиг. 1 представлены смещенные кривые $\gamma_1 + 5$ и $\lambda_1 - 5$. Результаты расчетов свидетельствуют, что величины γ_i положительны при $b \geq 0$, т.е. $\gamma_i = y'(0, a_i, b) > 0$. Из вида кривых $\lambda_i = y''(0, a_i, b)$ следует, что при $l \cos \alpha > 0$, т.е. $0 < \beta < \pi/4$, значения $\lambda < 0$ для всех $b \geq 0$. Если же $l \cos \alpha < 0$, т.е. $\pi/4 < \beta < \pi$, то существует отрезок значений параметра b , $0 \leq b \leq b^*(\beta)$, для которого коэффициент кривизны λ_i функции y при $x = 0$ положителен; при $b = b^*(\beta)$ он равен нулю, а при $b > b^*(\beta)$ отрицателен ($b^*(\pi/4) = 0$). Величины l, α определяют аналитическое решение задачи Джеффри – Гамеля (1.3) при $b = 0$ в виде [10]:

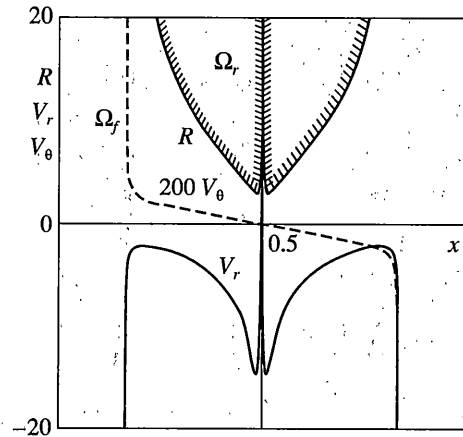
$$y(x, a, 0) = \alpha l (\cos(\alpha(2x - 1)) - \cos \alpha), \quad l = (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^{-1} \quad (4.2)$$

$$\alpha = a/2 = 2\beta, \quad \gamma(a, 0) = 2\alpha^2 l \sin \alpha, \quad \lambda(a, 0) = -4\alpha^3 l \cos \alpha$$

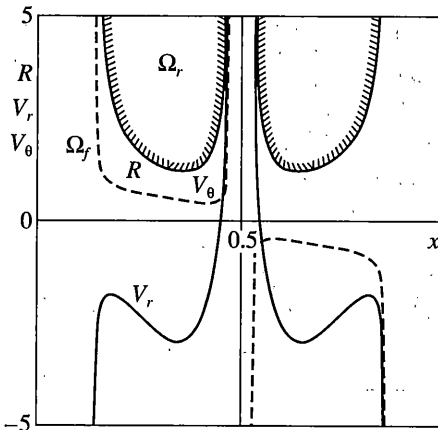
Прокомментируем решения $y(x, a_i, b)$, иллюстрирующие значения скорости жидкости (при заданном r) для порождающей задачи Джеффри – Гамеля (фиг. 3). В рассматриваемой области определяющих параметров a, b функция y положительна при $0 < x < 1$ (зоны обратного течения отсутствуют). При малых значениях угла β и средних числах Re , т.е. $b \lesssim 1$, движение жидкости близко к течению Пуазейля с параболическим профилем скорости [10], см. кривую I , отвечающую $\beta = \beta_1 = 1^\circ, b = 1$. Для больших углов раствора



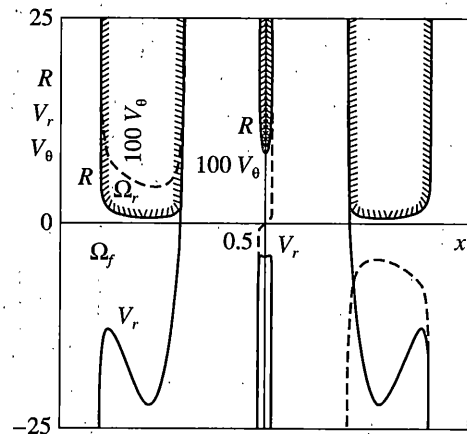
Фиг. 3



Фиг. 4



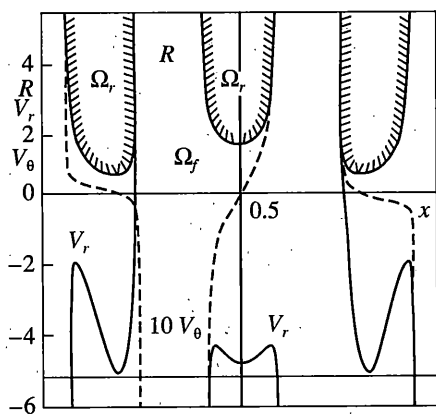
Фиг. 5



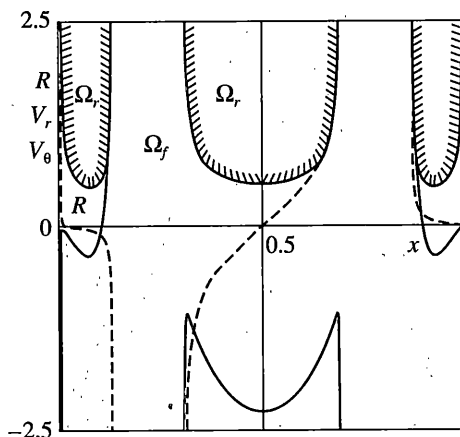
Фиг. 6

конфузора β и малых Re , т.е. $b \ll 1$, функция y имеет вид части косинусоиды, за вычетом постоянной $\cos \alpha$, с нормирующим множителем, см. (4.2) и кривую 2 на фиг. 2, отвечающую $\beta = \beta_4 = 89^\circ$, $b = 0.1$. При значении $x = 1/2$ и в его окрестности она (как и все кривые) имеет отрицательную кривизну, а при $x = 0, 1$ кривизна может быть отрицательной или положительной ($\beta = \pi/4$), см. выше. Неограниченное увеличение параметра b (т.е. числа Re) приводит к уменьшению значений параметра λ по приближенному закону $\lambda \approx -b$; параметр γ при этом увеличивается как $\gamma \approx \sqrt{4b/3}$, см. фиг. 1. При достаточно больших значениях b ($b \geq 10^2$) профиль скорости y приобретает форму, близкую к прямоугольной, см. кривую 3, представленную для $\beta = \beta_1 = 1^\circ$, $b = 85$.

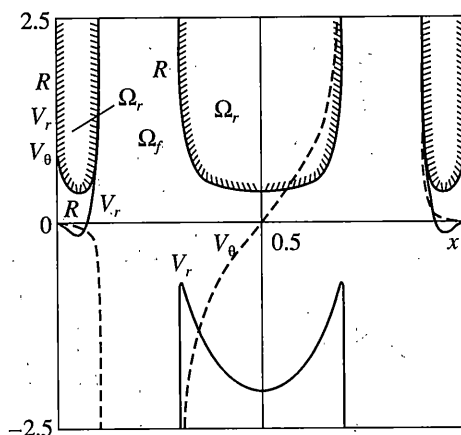
Напомним, что площадь фигуры под кривой равна единице (значение $z(1) = 0$) с высокой точностью (погрешностью $O(10^{-7})$) для всех значений параметров a, b , что соответствует постоянству расхода материала, см. (1.1), (1.3). В литературе иногда [9] приводятся результаты расчетов профилей скорости, не удовлетворяющих этому условию.



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Отметим также, что рассматриваемые функции y симметричны относительно середины отрезка $x = 1/2$ (что соответствует $\theta = 0$), т.е. $y'(1/2, a_i, b) = 0$; их форма определяется величиной b , а не Re .

В конфузоре, однако, могут реализовываться также течения с несимметричными и многомодовыми профилями скорости, для которых функция $y(x)$ обращается в ноль не только в точках $x = 0, 1$. Их рассмотрение и использование в задаче о движении вязкопластической среды требует отдельного обстоятельного исследования [11].

Функция $P(x)$, определяющая давление в жидкости, зависит линейно от профиля $y(x)$ согласно (3.6). Ее вычисление не представляет затруднений; определенный интерес имеет анализ зависимости давления от параметров a, b : $P \approx -a^2$ при $b \gg 1$.

Перейдем к анализу процесса деформирования вязкопластической среды в плоском конфузоре для указанных значений определяющих параметров. Как отмечалось в п. 3, его характеристики строятся сравнительно просто на основе порождающего решения γ, λ, y, y' задачи Джеффри – Гамеля, см. выше. Недостающие начальные данные – параметры ζ, κ для рассматриваемых значений определяющих параметров $a = a_i, b$ представлены на фиг. 2. Как и параметры γ, λ , они должны вычисляться с высокой точностью

вследствие типичных погранслоиных эффектов при больших значениях b ($b \geq 30$), см. (3.1). Вспомогательная переменная ("функция чувствительности" по τ_s) $w = w(x, a_i, b)$ и ее производные по x строятся в результате интегрирования задачи Коши для уравнений (3.1) при $w(0) = w'(0) = 0$, $w''(0) = \zeta$ при заданных k и Φ , см. п. 3. Отметим, что функция w и ее четные производные антисимметричны относительно $x = 1/2$, а нечетные – симметричны. Практически при известных γ , λ , ζ , k для заданных a , b удобнее интегрировать совместно систему шести нелинейных уравнений (1.3), (3.1) на основе универсальных зависимостей (3.5). Функция w и ее производные явного механического или геометрического смысла не содержат; поэтому ограничимся весьма краткими комментариями кривых ζ_i , k_i на фиг. 2. Поскольку при малых значениях $b \ll 1$ функция $\Phi \sim b$, то для ζ , k справедливы аналогичные оценки: $\zeta_i \sim b$, $k_i \sim b$. Интересно отметить, что функции k_i отрицательны и практически линейно убывают при увеличении аргумента – параметра b . Функции ζ_i сперва возрастают, при некотором b достигают максимального значения, а затем неограниченно убывают с ростом аргумента b . Это поведение становится более наглядным и резко выраженным при увеличении угла β_i (параметра a_i). Вычисления для значений $\pi/2 < \beta < \pi$ свидетельствуют о наличии особенностей в поведении функций $\zeta(a_i, b)$, $k(a_i, b)$ и связаны с бифуркациями стационарной картины деформирования среды. Эти исследования требуют отдельного обстоятельного обсуждения.

На основе функций u , w и их производных, как отмечалось выше, могут быть получены основные характеристики деформирования вязкопластической среды. Познавательный интерес и, возможно, прикладное значение представляют границы квазижестких зон, т.е. функции $R(x, a_i, b)$ (3.7), и вектор скорости среды на этих границах, т.е. функции $V_{r, \theta}(x, a_i, b)$ (3.8). Описание всего многообразия кривых затруднительно; поэтому приведем типичные характерные зависимости, иллюстрирующие количественные и качественные особенности движения среды, см. фиг. 4–9. Квазижесткие зоны представлены сплошными линиями R (с внутренней штриховкой); радиальные составляющие скорости частиц на границе V_r и трансверсальные V_θ соответственно сплошными и штриховыми линиями.

Проведенные расчеты свидетельствуют, что при $0 < \beta < \pi/2$ ($0 < a < 2\pi$) для небольших значений параметра b ($b \leq 10$) всегда имеют место две квазижесткие зоны Ω_r , см. (2.12), (2.13), симметрично расположенные относительно $x = 1/2$ ($\theta = 0$), и три просвета (зона течения Ω_f), по которой происходит сильное относительное деформирование среды. На фиг. 4 и 5 представлены кривые R , V_r , V_θ , отвечающие $\beta = \beta_1 = 1^\circ$, $b = 1$ и $\beta = \beta_2 = 10^\circ$, $b = 10$. Отметим, что указанные зоны Ω_r , Ω_f симметричны относительно $x = 1/2$. Границы имеют асимптоты ($R \rightarrow \infty$) при значениях x , отвечающих нулям функции $d(x)$ (3.7); для указанных кривых имеются также асимптоты. Между стенками конфузора ($x = 0, 1$) и крайними границами расстояние конечно; при ($\beta \rightarrow 0$) внутренний просвет неограниченно уменьшается, а асимптоты сближаются.

При увеличении параметра b внутренний просвет расширяется, квазижесткие зоны сужаются и перемещаются к стенкам конфузора. Для некоторого критического значения $b = b(a)$ появляется посередине третья зона, сколь угодно узкая при $b \rightarrow b(a)$ ($b > b(a)$), см. фиг. 6, отвечающую $\beta = \beta_2 = 10^\circ$, $b = 60$. Дальнейшее увеличение параметра b приводит к развитию картины: центральная зона расширяется, а боковые квазижесткие зоны сужаются и перемещаются к стенкам конфузора, см. фиг. 7 для $\beta = \beta_2 = 10^\circ$, $b = 100$. Граница R имеет шесть асимптот. Этот эффект проявляется при меньших значениях b , т.е. существенно меньших значениях числа Re , если угол раствора β (параметр a) увеличивается. Так для $\beta = \beta_3 = 1 \text{ рад} = 180^\circ/\pi$ центральная зона появляется при $\beta \approx 18.3$, а для $\beta = \beta_4 = 89^\circ$ – при $\beta \approx 21$. Отметим, что монотонной зависимости $b(a)$ не наблюдается; этот вопрос требует дополнительного изучения. Продолжим рассмотрение случая $\beta = 1$. Рост параметра b приводит к расширению центральной квазижесткой зоны и к приближению боковых зон к стенкам. Из графика на фиг. 8 для $\beta \approx 85$ следует, что просветы

становятся весьма узкими и при дальнейшем увеличении b боковые зоны “прилипают” к стенкам и становятся все тоньше. Эффект прилипания проявляется при меньших значениях параметра b (числа Re), если угол раствора β увеличивается. Так как $\beta = \beta_4 = 89^\circ$ он имеет место при $b = 85$, см. фиг. 9. Описанному выше поведению зон течения и квазижесткие зоны весьма наглядно соответствуют функции V_r , V_θ (их величина и знаки см. фиг. 4–9). Исследование предельного состояния течений вязкопластической среды при $b \rightarrow \infty$ ($Re \rightarrow \infty$) не представляет прикладного интереса.

Таким образом, выше приведены новые не имеющие аналогов результаты численно-аналитического исследования процесса выдавливания вязкопластического материала из плоского конфузора для широкого диапазона определяющих параметров. Они позволили установить ряд существенных эффектов, имеющих наглядное механическое содержание. Впервые для сложной области деформирования явно обнаружены и построены квазижесткие зоны и зоны течения и определены их основные свойства. В частности, показано, что при малых значениях числа Рейнольдса имеются две квазижесткие зоны. При его увеличении появляется третья зона, которая затем становится доминирующей, а относительно сильное деформирование среды происходит, в основном, возле стенок конфузора. Разработанный подход позволяет проводить исследования в более широкой области параметров, в том числе для значений угла $\pi/2 \leq \beta \leq \pi$, которые могут представить интерес для естественно-научных приложений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-06178, 02-01-00567, 02-01-00780, 02-01-00252, 02-01-00157).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
2. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 2. С. 109–130.
3. Ишлинский А.Ю. Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластины // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 6. С. 405–412.
4. Георгиевский Д.В. Некоторые неоднородные задачи вязкопластичности: жесткие зоны и устойчивость (обзор) // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 61–78.
5. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во УРСС, 1998. 176 с.
6. Климов Д.М., Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А. Течение вязкопластической среды с малым пределом текучести в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 1. С. 37–41.
7. Кочий Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
9. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
10. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44–48.
11. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А. Новые несимметричные и многомодовые решения задачи о течении вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2002. № 1. С. 46–50.
12. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакишев С.А. Течение вязкой жидкости в конфузоре с большим углом раствора // Докл. РАН. 2002. Т. 386. № 3. С. 333–337.
13. Тябин Н.В. Течение вязко-пластической жидкой дисперсной системы в диффузоре и погружение клина в дисперсную систему // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 5. С. 943–946.
14. Ким А.Х., Володарович М.П. Плоская задача о движении вязко-пластичной дисперсной системы между двумя плоскостями, составляющими острый угол // Коллоидн. ж. 1960. Т. 22. № 2. С. 186–194.

15. Гуткин А.М. Медленное течение вязкопластичной дисперсной среды в коническом и плоском диффузорах при малом угле раствора // Коллоидн. ж. 1961. Т. 23. № 3. С. 352.
16. Чернышов А.Д. Установившееся течение вязко-пластической среды между двумя соосными конусами и внутри двугранного угла // ПМТФ. 1970. № 5. С. 93–99.
17. Чернышов А.Д. О движении вязко-пластической среды внутри двугранного угла // Прикл. механика. 1971. Т. 7. № 1. С. 120–124.
18. Георгиевский Д.В. Задача устойчивости квазилинейных течений относительно возмущений функции упрочнения // ПММ. 1999. Т. 63. № 5. С. 826–832.

Москва

Поступила в редакцию
25.12.2002