

© 2003 г. Р.И. НЕПЕРШИН

ВНЕДРЕНИЕ КОНЕЧНОГО КЛИНА В ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Рассмотрен нестационарный процесс плоского пластического течения при внедрении клина конечной ширины в идеальнопластическое полупространство с учетом контактного трения. На первом этапе внедрение описывается автомодельным решением с сохранением геометрического подобия пластической области. Второй этап внедрения моделируется полем линий скольжения и годографом скоростей с линией скольжения чистого сдвига, выходящей на границу полупространства. Определяется форма границы полупространства около клина и зависимость силы, действующей на клин, от глубины внедрения от точечного контакта с полупространством до стационарного обтекания клина неограниченной пластической средой.

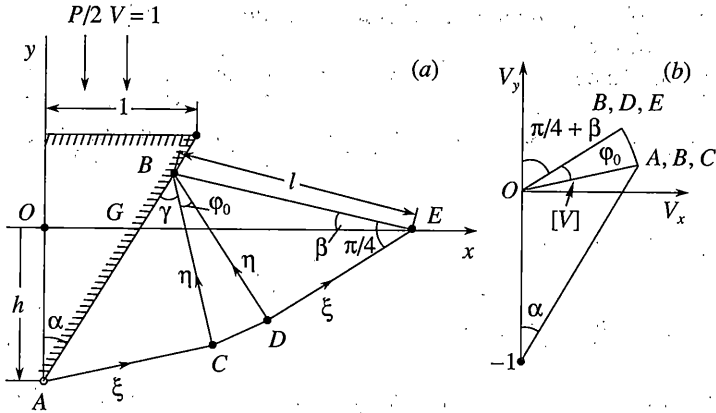
Известны автомодельные решения нестационарных задач плоского пластического течения при внедрении неограниченного гладкого клина в идеальнопластическое полупространство с прямолинейной [1] и криволинейной [2] границами. Нестационарная задача о внедрении гладкого тонкого лезвия в идеальнопластическое полупространство решена в [3] методом малого параметра.

В [2, 4] рассмотрено начальное внедрение гладкого клина конечной ширины в идеальнопластическое полупространство в предположении смещения жесткопластической границы вдоль начальной границы полупространства с образованием криволинейной жесткой области около клина. Известны также расчеты начального внедрения жестких штампов в упругопластическое полупространство [5–7] методом конечных элементов. Однако, сильное искажение деформируемой границы около ребра штампа вследствие сингулярности пластического течения в этой области существенно ограничивают возможности упругопластического моделирования.

В [8] нестационарное внедрение плоского гладкого штампа в идеальнопластическое полупространство моделируется полем линий скольжения и годографом скоростей с изолированной линией чистого сдвига, выходящей на границу полупространства. Такая модель позволяет анализировать весь процесс нестационарного внедрения вплоть до стационарной стадии движения штампа в неограниченной среде. Этот подход использован в настоящей работе для моделирования внедрения конечного клина от начального точечного контакта с полупространством до стационарного движения клина в неограниченной идеальнопластической среде с учетом контактного трения.

1. Первая стадия внедрения. На первой стадии внедрения пластическая область сохраняет геометрическое подобие, и задача имеет автомодельное решение, которое является обобщением решения для гладкого клина [1, 2] на случай шероховатого клина с учетом контактного трения на его наклонной грани.

Рассмотрим правую симметричную относительно вертикальной плоскости пластическую область при внедрении жесткого клина по нормали к горизонтальной границе идеальнопластического полупространства. Полуширину клина, скорость внедрения



Фиг. 1

клина и удвоенное касательное напряжение текучести материала полупространства принимаем за единицу длины, скорости и напряжения соответственно.

На фиг. 1 показано поле линий скольжения (а) и годограф скоростей (б), удовлетворяющие кинематическим и статическим граничным условиям задачи. Вследствие геометрического подобия форма пластической области на физической плоскости не изменяется от начального точечного контакта вершины клина А с пластическим полупространством до внедрения клина на глубину h_0 , при которой длина контакта с пластической областью равна конечной длине наклонной грани клина. В области АВС прямые линии скольжения η наклонены к границе АВ под углом γ , который определяется касательным напряжением контактного трения μ :

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos 2\mu, \quad 0 \leq \mu \leq \frac{1}{2} \quad (1.1)$$

Длина l наклонной свободной границы ВЕ пластической области определяется выражением

$$l = \sqrt{2} x_B \cos \gamma / \sin \alpha, \quad 0 \leq x_B \leq 1 \quad (1.2)$$

где α – половина угла клина. Глубина внедрения клина возрастает от нуля до h_0 пропорционально координате x_B точки В:

$$h = x_B (\cos \alpha - \sqrt{2} \cos \gamma \sin \beta) / \sin \alpha \quad (1.3)$$

где β – угол наклона свободной пластической границы ВЕ относительно границы полупространства. Угол ϕ_0 центрированного веера линий скольжения η в точке В определяется выражением

$$\phi_0 = \pi/4 + \alpha - \gamma - \beta \quad (1.4)$$

Из условия несжимаемости пластического материала следует равенство площадей треугольников АОГ и ВЕГ, которое дает уравнение для определения неизвестного угла β :

$$(h/l)^2 \sin \alpha = \sin \beta \sin (\pi/4 + \gamma + \phi_0) \quad (1.5)$$

С помощью соотношений (1.2)–(1.4) приводим выражение (1.5) к виду, удобному для вычисления угла β :

$$\sin \beta [\sqrt{2} + \cos \beta \cos \gamma / \sin \alpha] - \frac{1}{2} \cos \alpha / \cos \gamma = 0 \quad (1.6)$$

Значения β находим из решения нелинейного уравнения (1.6) с помощью итерационной формулы Ньютона.

Среднее напряжение на границе контакта AB определяется интегралом Генки вдоль линии скольжения ξ при значении $\sigma = -1/2$ в области BED . Нормальное напряжение на наклонной грани клина и вертикальная сила P , действующая на клин, определяются выражениями

$$\sigma_n = -\left[\frac{1}{2}(1 + \sin 2\gamma) + \varphi_0\right] \quad (1.7)$$

$$P = 2x_B \left[\mu \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2}(1 + \sin 2\gamma) + \varphi_0 \right], \quad 0 \leq x_B \leq 1 \quad (1.8)$$

Выражение (1.8) показывает сильное влияние контактного трения на силу P для острого клина конечной ширины x_B при $\alpha \rightarrow 0$.

Вследствие геометрического подобия формы пластической области на физической плоскости глубина внедрения h , длина l наклонной границы и сила P линейно возрастают от нуля до максимального значения при $x_B = 1$ в конце рассматриваемой стадии внедрения клина. При этом годограф скоростей в плоскости $\{V_x, V_y\}$ остается неизменным, как показано на фиг. 1, в.

Из условия непрерывности скоростей, нормальных к наклонной грани клина и к жесткопластической границе, находим разрыв скорости вдоль жесткопластической границы $B-E$:

$$[V] = \sin \alpha / \cos \gamma \quad (1.9)$$

и скорости точек в области ABC :

$$V_x = [V] \cos(\gamma - \alpha), \quad V_y = [V] \sin(\gamma - \alpha) \quad (1.10)$$

и в области BDE :

$$V_x = [V] \cos(\pi/4 - \beta), \quad V_y = [V] \sin(\pi/4 - \beta) \quad (1.11)$$

Вследствие симметрии пластического течения относительно оси y предельный угол наклона линии скольжения ξ с отрицательным направлением оси y в точке A равен $\pi/4$, поэтому углы α и γ связаны неравенством

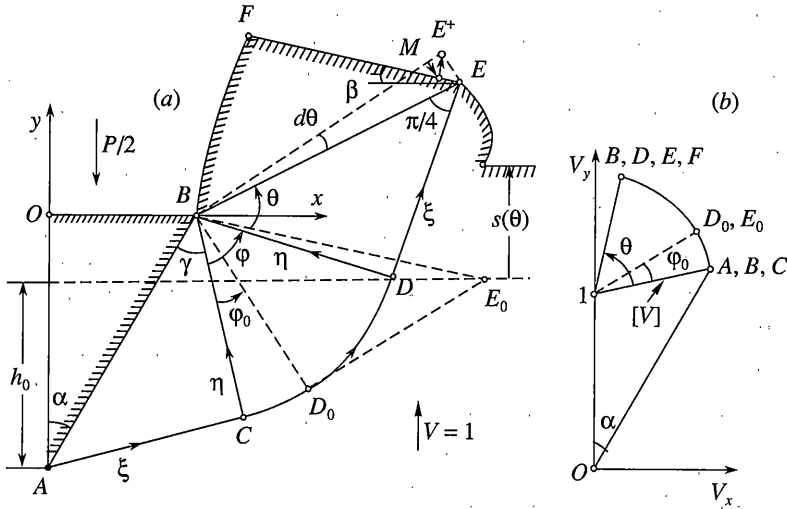
$$\alpha \leq \gamma + \pi/4, \quad 0 < \alpha \leq \pi/2 \quad (1.12)$$

Если $\alpha = \pi/2$, из (1.12) следует $\gamma = \pi/4$ или $\mu = 0$. В этом случае поле линий скольжения и годограф скоростей первой стадии совпадают с решением Прандтля при внедрении плоского штампа с образованием жесткого клина, на границе которого происходит скольжение пластического материала со скоростью $[V]$ при максимальном трении $\mu = 1/2$.

Из неравенства (1.12) следует также образование жестких зон на наклонной поверхности клина для углов $\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/2$ за счет напряжения контактного трения, которое изменяется в пределах $1/2 \geq \mu \geq 0$ для соответствующих углов α из указанного интервала.

2. Вторая стадия внедрения. Первая стадия внедрения заканчивается при равенстве длины границы контакта AB пластической области длине наклонной грани клина $1/\sin \alpha$ (фиг. 1, а).

При дальнейшем внедрении клина происходит изменение формы пластической области и поля скоростей с образованием выпуклой границы полупространства около клина. На фиг. 2 показано поле линий скольжения (а) и годограф скоростей (б) на второй стадии внедрения клина с прямолинейной наклонной частью EF выпуклой грани-



Фиг. 2

цы, которая в момент начала второй стадии внедрения совпадает со свободной пластической границей BE_0 , показанной на фиг. 2,а штриховой линией.

На второй стадии внедрения угол φ центрированного веера поля линий скольжения в точке B увеличивается в процессе внедрения. Вдоль линии скольжения DE принимаем чистый пластический сдвиг при $\sigma = 0$, который возможен при разгрузке области BDE до сжатия с напряжением $-1/2$ параллельно границе BE и при растяжении $+1/2$ под углом $\pi/4$ к линии DE в жесткой области справа от этой линии [8]. Жесткая область BEF свободна от напряжений. Вращение области BDE вокруг точки B и соответствующее изменение скоростей в плоскости годографа позволяют моделировать нестационарный процесс внедрения клина.

Рассмотрим задачу отбегания клина идеальнопластической средой,двигающейся с вертикальной скоростью $V_y = 1$, в системе координат $\{x, y\}$, связанной с клином. Параметром внедрения клина, соответствующим перемещению среды s , принимаем увеличение угла φ центрированного веера поля линий скольжения

$$\theta = \varphi - \varphi_0 \tag{2.1}$$

где φ_0 – начальное значение угла φ , определяемое выражением (1.4). Глубина внедрения клина относительно границы полупространства определяется выражением

$$h = h_0 + s(\theta), \quad s(0) = 0 \tag{2.2}$$

где h_0 – значение h , определяемое из (1.3) при $x_B = 1$.

Длина границы BE остается постоянной в процессе внедрения и равна значению l_0 , определяемому из (1.2) при $x_B = 1$. Координаты точки E и скорости точек жесткой области слева от DE равны

$$x_E = 1 + l_0 \cos(\theta - \beta), \quad y_E = l_0 \sin(\theta - \beta) \tag{2.3}$$

$$V_x = [\cos(\theta - \beta) - \sin(\theta - \beta)]/l_0 \tag{2.4}$$

$$V_y = 1 + [\cos(\theta - \beta) + \sin(\theta - \beta)]/l_0 \tag{2.5}$$

При $\theta = 0$ точка E совпадает с точкой E_0 и точка F совпадает с точкой B . При $\theta > 1$ над границей BE появляется жесткая область с прямолинейным участком EF , который образуется материальными точками, покидающими область BDE через границу BE , и криволинейной границей BF , образуемой материальными точками, покидающими пластическую область в угловой точке B . Справа от точки E образуется понижающаяся криволинейная граница жесткой области вследствие перехода материальных точек из области BDE в правую жесткую область через линию сдвига DE .

Вычисление вышуклой границы около клина начинаем от известной начальной границы BE_0 при $\theta = 0$ для последовательности малых приращений угла $d\theta$. Пусть при данном значении θ граница полупространства около клина известна. По уравнениям (2.3) находим координаты $\{x^+, y^+\}$ точки E^+ для $\theta + d\theta$ (фиг. 2,а). Затем находим координаты материальной точки M , лежащей на наклонной границе FE , которая перемещается в точку E^+ при приращении угла $d\theta$. Она находится на пересечении границы FE с прямой, проходящей через точку E^+ параллельно вектору скорости (2.4), (2.5) при $\theta + d\theta/2$:

$$\begin{aligned} x_M &= [x^+ a + x_E \operatorname{tg} \beta + y_E - y^+] / [a + \operatorname{tg} \beta] \\ y_M &= y_E + (x_E - x_M) \operatorname{tg} \beta, \quad a = V_y / V_x \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вычисляем элементарные перемещения точки M : $dx = x^+ - x_M$ и $dy = y_+ - y_M$, и перемещаем на эти величины все точки левой границы BFM . Находим элементарное вертикальное перемещение ds жесткой области справа от линии сдвига DE из соотношения

$$ds = dy / V_y (\theta + d\theta/2) \quad (2.7)$$

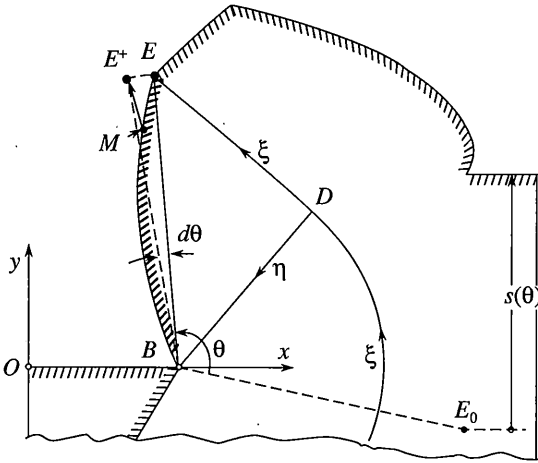
так как скорость идеальнопластической среды равна единице, и прибавляем вертикальное перемещение ds всем точкам границы полупространства справа от точки M . В результате получаем новую границу полупространства около клина для угла $\theta + d\theta$. При этом соотношение (2.7) устанавливает связь угла θ с перемещением s и глубиной внедрения клина h по уравнению (2.2).

На фиг. 2,а показан пример смещенной границы полупространства с плоским участком FE при внедрении гладкого клина с углом $\alpha = \pi/6$. Увеличение угла θ и глубины внедрения клина приводят к уменьшению длины участка FE , который исчезает при совпадении точек F и E при значении угла θ^* , удовлетворяющего уравнению

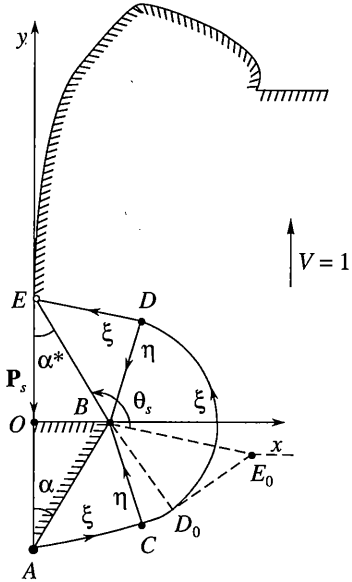
$$x_F(\theta^*) = 1 + l_0 \cos(\theta^* - \beta) \quad (2.8)$$

При $\theta > \theta^*$ точка E переходит на левую криволинейную границу, выходящую из угловой точки B . Материальную точку M , попадающую в точку E^+ при приращении угла $d\theta$ (фиг. 3), находим на пересечении прямой, проходящей через точку E^+ параллельно вектору скорости (2.4), (2.5) при $\theta + d\theta/2$ с криволинейной границей BE , соответствующей углу θ , которую аппроксимируем кусочно-линейной зависимостью по координатам конечного числа известных точек этой границы. Координаты точки M находим из соотношений

$$\begin{aligned} x_M &= (y^+ - y_j + x_j b - a x^+) / (b - a) \\ y_M &= y_j + (x - x_j) b \\ a &= V_y / V_x, \quad b = (y_{j+1} - y_j) / (x_{j+1} - x_j) \end{aligned} \quad (2.9)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

где j – номер узловой точки известной границы BE , который находим с помощью неравенства $y_{j+1} < y_M < y_j$ определяющего отрезок границы BE , на котором находится точка M . Последующие вычисления смещения левой и правой границ полупространства относительно линии сдвига DE аналогичны описанным выше.

Усилие P , действующее на клин на второй стадии внедрения, рассчитывается по формуле (1.8) при $x_B = 1$ с учетом $\sigma = 0$ на линии сдвига DE :

$$P = 2 \left[\mu \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\gamma + \varphi_0 + \theta \right] \quad (2.10)$$

для значений α , μ и γ удовлетворяющих неравенствам (1.12).

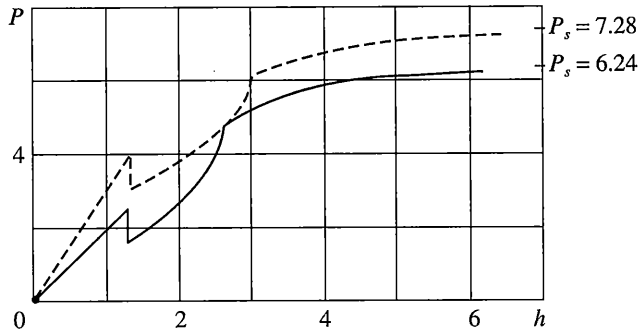
Разгрузка пластической области BDE при переходе ко второй стадии внедрения приводит к скачку силы P , которая затем возрастает пропорционально углу θ .

На фиг. 3 показана криволинейная граница полупространства при внедрении гладкого клина с углом $\alpha = \pi/6$ при $\theta > \theta^*$. Дальнейшее увеличение угла θ приводит к быстрому росту элементарных смещений точки M с уменьшением криволинейного сектора свободной от напряжений жесткой области слева от прямой BE . При этом в соответствии с (2.7) происходит быстрое возрастание перемещения s и глубины внедрения клина, над которым образуется глубокая воронка при погружении его в идеальнопластическую среду.

3. Стационарное обтекание клина. При выходе точки E на вертикальную ось симметрии нестационарный процесс внедрения переходит в стадию стационарного обтекания клина идеальнопластической средой. Криволинейная жесткая область слева от прямой BE исчезает, и эта граница совпадает с линией тока поля скоростей стационарного пластического течения около клина с полем линий скольжения и годографом скоростей, которые показаны на фиг. 2 при предельном значении угла θ_s :

$$\theta_s = \pi/2 + \beta + \alpha^* \quad (3.1)$$

$$\alpha^* = \arcsin[\sin \alpha / (\sqrt{2} \cos \gamma)] \quad (3.2)$$



Фиг. 5

где α^* – угол наклона границы BE с отрицательным направлением оси y . Сила P_s сопротивления среды движению клина определяется выражением

$$P_s = 2 \left[\mu \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\gamma + 3\pi/4 + \alpha + \alpha^* - \gamma \right] \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.2) и (3.3) видно, что при наличии контактного трения существует угол наклона клина, при котором сила P_s минимальна.

На фиг. 4 показана форма границы полупространства при начале стационарного обтекания гладкого клина с углом $\alpha = \pi/6$ идеально-пластической средой. На фиг. 5 показаны зависимости силы P от глубины внедрения клина с углом $\alpha = \pi/6$ при отсутствии трения (сплошная линия) и при наличии трения $\mu = 0.25$ (штриховая линия). Скачки силы P соответствуют глубине внедрения клина при переходе от первой стадии ко второй. Обе зависимости асимптотически приближаются к значениям сил сопротивления среды $P_s = 6.24$ для $\mu = 0$ и $P_s = 7.28$ для $\mu = 0.25$ при стационарном обтекании клина идеальнопластической средой.

Для расчета нестационарного внедрения клина в пластическое полупространство и силы сопротивления среды при стационарном обтекании клина написаны программы для ПЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1985. = Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
2. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
4. Быковцев Г.И., Хромов А.И. Плоская деформация идеальных жесткопластических тел с учетом изменения границ // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 2. С. 71–78.
5. Lee C.H., Kobayashi S. Elastoplastic analysis of plane strain and axisymmetric flat punch indentation by the finite element method // Intern. J. Mech. Sci. 1970. V. 12. № 4. P. 349–370.
6. Hardy C., Baronet C.N., Tordion G.V. The elasto-plastic indentation of a half-space by rigid sphere // Intern. J. Num. Mech. Engng. 1971. V. 3. № 3. P. 451–462.
7. Voyiadjis G.Z., Buckner N.E. Indentation of a half-space with a rigid indenter // Intern. J. Num. Mech. Engng. 1983. V. 19. № 10. P. 1555–1578.
8. Непершин Р.И. Внедрение плоского штампа в жесткопластическое полупространство // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 140–146.