МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2003

УДК 593.3

© 2003 г. Р.Л. САЛГАНИК

ДЛИННАЯ УПРУГАЯ ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА, РАСПРОСТРАНЯЮЩАЯСЯ МЕЖДУ МАТЕРИАЛОМ И МАССИВОМ СЛОЕВ, РАБОТАЮЩИХ НА ИЗГИБ

В континуальном приближении рассмотрено распространение длинной поверхностной волны по границе контакта однородного и изотропного упругого материала с упругим слоистым массивом, в котором слои взаимно проскальзывают без трения и сопротивляются изгибу, причем влияние нагружения вдоль слоев на их прогибы пренебрежимо мало. Выведено уравнение для закона дисперсии и показано, что указанная волна существует. Получены асимптотики закона дисперсии в случаях когда: волна близка к рэлеевской и волна далека от рэлеевской.

1. Введение. Исследованиям распространения волн в слоистых средах посвящена обширная литература (см., например, [1]). Однако в ней пока еще мало внимания уделено изучению эффектов взаимного проскальзывания слоев и их сопротивления изгибу, становящихся существенными, когда сопротивление проскальзыванию слоев по межслойным границам достаточно низко либо сильно снижается (в соответствующих областях) под действием нагружения. В случае достаточно длинных волн эти эффекты могут быть рассмотрены в рамках континуального подхода, что и делается ниже.

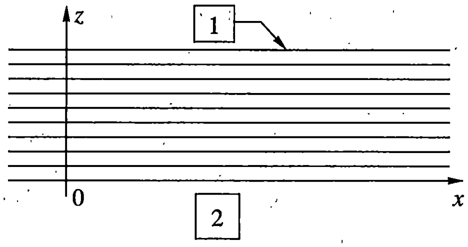
Деформирование слоистых структур при проявлении в них указанных эффектов, описываемых континуально, оказывается качественно иным, чем в случае, когда слои сцеплены друг с другом. Отличие между этими двумя случаями становится наиболее значительным, когда практически исчезает влияние сдвигового сопротивления межслойных границ на прогибы слоев. Тогда деформирование каждого отдельного слоя в слоистом массиве можно описывать по классической теории изгиба, а сам этот массив можно описывать континуально при условии, что достаточно много слоев попадает в области существенного изменения их прогиба. Это условие заведомо выполняется, когда отношение модуля упругости массива поперек слоев к его модулю упругости вдоль слоев достаточно мало. Это отношение может быть достаточно малым, например, при значительной шероховатости поверхностей слоев, вследствие чего фактическая площадь контактов между ними может быть гораздо меньше номинальной. При этом модуль упругости слоистого массива поперек слоев должен трактоваться как эффективный. Еще меньшим указанное отношение может быть, когда контакты между слоями осуществляются через прослойки, гораздо более податливые, чем сами слои. Отметим, что требование достаточной малости указанного отношения модулей упругости может быть ослаблено и даже вообще снято в тех случаях, когда интересуются полями деформаций в рассматриваемых слоистых структурах там, где эти поля изменяются достаточно плавно, например, на значительном удалении от мест сосредоточенных воздействий на них.

Начало исследованиям по применению континуального подхода к описанию слоистых структур, в которых проявляется изгибная жесткость слоев, было, по-видимому, положено в работе [2]. В ней изучался закон дисперсии длинноволновой части спектра колебаний пластинчатого кристалла в континуальном приближении с учетом поперечной (изгибной) жесткости образующих его слабо изгибающихся атомных слоев. Далее, континуальный подход был применен в [3] для рассмотрения слабого изгиба упругих балок, образующих слоистый массив. Этот подход был развит в [4, 5], где описание, аналогичное представленному в [3], было распространено на случай слоистого массива, состоящего из тонких упругих плоских слоев, или пластин, деформирующихся согласно классической теории изгиба. При этом были учтены эффекты, связанные с нагружением массива вдоль слоев, эффекты, связанные с касательными напряжениями, действующими на межслойных границах, а также динамические эффекты. В частности, в [4], было рассмотрено и распространение упругих волн изгиба в указанном массиве. В [4, 5], даны ссылки на работы, в которых были решены задачи в рамках подхода [3], а также на работу, в которых явления слабого изгиба слоев в слоистом массиве рассматривалось в континуальном приближении иначе, чем в [3]. Развитие исследований в этом направлении вплоть до настоящего времени рассмотрено в [6, 7]. Анализ показывает, что подход, предложенный и развитый в [3–5], эффективен и достаточно точен для решения прикладных задач.

К числу таковых, в дополнение к уже упомянутым выше, относятся и задачи для слоистых кристаллов, из которых изготавливаются материалы, используемые в качестве твердых смазок [8]. Эти кристаллы состоят из относительно жестких атомных пластин, соединенных друг с другом прослойками, образованными гораздо более слабыми связями. Под действием сдвиговых напряжений возникает внутрикристаллическое скольжение в этих прослойках, являющееся тем механизмом, который обеспечивает смазывающие свойства материалов, состоящих из таких кристаллов. Отдельную жесткую атомную пластину вместе с прилегающей к ней прослойкой слабых связей можно заменить подходящей однородной эквивалентной пластиной, обладающей эффективными изгибной жесткостью и модулем упругости по нормали к пластине. В результате получится схема и основные уравнения, аналогичные представленным в [4, 5]. При этом изгибная жесткость окажется достаточно большой, так как будет в основном определяться жесткостью атомных пластин, а эффективный модуль упругости по нормали к слоям окажется сравнительно малым, так как будет в основном определяться прослойками слабых связей.

В данной работе, в рамках подхода, представленного в [4, 5], рассматривается задача о распространении поверхностной волны по границе контакта упругого слоистого массива со сплошным однородным упругим и изотропным материалом. Предполагается, что этот массив образован слоями, проскальзывающими друг относительно друга (с пренебрежимо малым трением) и работающими на изгиб, и может быть описан в континуальном приближении, как это сделано в работе [4]. При этом считается, что продольное нагружение слоев либо отсутствует, либо настолько слабо, что его влиянием на их прогибы можно пренебречь.

2. Постановка задачи. Предположим, что слоистый массив, расположенный при $z > 0$ в декартовой системе координат x, y, z и состоящий из большого числа тонких упругих однородных и изотропных слоев, могущих проскальзывать друг по другу и изгибаться, контактирует с упругим однородным и изотропным материалом (субстратом), расположенным при $z < 0$ (фигура: *1* – массив, *2* – субстрат). Трение между слоями в массиве и между ним и субстратом пренебрежем. Будем считать слои в массиве прижатыми друг к другу нормальным к ним однородно распределенным давлением, достаточно большим для того, чтобы обеспечить полный контакт, как между ними, так и между массивом и субстратом при их изгибе. Однородность распределения этого давления обеспечивает отсутствие его влияния на прогибы слоев. Рассматриваемую ниже волну напряжений будем считать плоской, распространяющейся вдоль оси x, так что переменные величины поля волны не зависят от y.



Тогда динамическое уравнение деформирования слоистого массива запишется в континуальном приближении следующим образом (см. [4], уравнение (2.1)):

$$m_a\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D_a\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-h_aE_a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad z>0 \tag{2.1}$$

Здесь t – время, $w(x, z, t)$ – локальный прогиб слоев, усредненный по представительному (т.е. включающему достаточно много слоев) элементу объема массива. Далее, m_a, D_a, h_a, E_a – параметры, усредненные по указанному представительному элементу объема. Их смысл таков: m_a – масса слоя, приходящаяся на единицу площади его поверхности (срединной плоскости), D_a – изгибная жесткость слоя, h_a – толщина слоя, E_a – эффективный модуль упругости слоистого массива поперек слоев. В (2.1) последний член учитывает взаимодействие слоев, причем величина $E_a\partial w/\partial z$ имеет смысл нормального к слоям напряжения в слоистом массиве, добавочного к тому однородному нормальному к слоям давлению, которое действует в этом массиве (а также, разумеется, в субстрате).

В области $z < 0$ для субстрата должна быть записана система динамических уравнений теории упругости, здесь не приводимая. Обозначим вызываемые рассматриваемой волной малые смещения в субстрате вдоль осей x, y, z через u_x, u_y, u_z, нормальные напряжения в нем, действующим вдоль этих осей – через σ_x, σ_y, σ_z, и касательные напряжения, действующие на площадках, перпендикулярным этим осям – через τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{xy} соответственно.

Предположим, что искомая плоская волна – гармоническая, т.е. u_x, u_y, u_z и w пропорциональны $\exp[i(kx-\omega t)]$ с коэффициентами пропорциональности, зависящими от z, где k и ω – постоянные волновое число и круговая частота, $i^2=-1$. Чтобы было возможным континуальное описание слоистого массива, очевидно, должно выполняться следующее условие: $k \ll (1/h_a)$ (*условие I*).

Подставив указанные зависимые переменные в упомянутую систему динамических уравнений теории упругости и в (2.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов пропорциональности, зависящих от z. Эти коэффициенты определяются так, чтобы они исчезали при удалении от границы $z = 0$ и удовлетворяли следующим граничным условиям при $z = 0$:

$$u_z = w, \quad \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right] = E_a\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0, \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.3}$$

Здесь постоянные E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона субстрата соответственно. Граничные условия (2.2), (2.3) получены исходя из того, что касательные напряжения на границе контакта слоистого массива с субстратом предположены пренебрежимо малыми, а нормальное смещение и нормальное напряжение на этой границе непрерывны.

Так как рассматривается плоская волна, распространяющаяся вдоль оси x, последнее слагаемое в круглой скобке второго уравнения (2.3) обращается в нуль. Поэтому, согласно (2.3), частная производная от u_y по z исчезает при $z = 0$. Из того, что компонента смещения u_y зависит от z экспоненциально (см. [9], §24) и должна, поэтому, исчезать при $z \to -\infty$, следует, что $u_y = 0$ при $z \le 0$. При этом второе из граничных условий (2.3) оказывается удовлетворенным, а во втором граничном условии (2.2) исчезает последний член в круглых скобках при ν.

Выполнение указанных выше подстановок в (2.1) и в системе динамических уравнений теории упругости, а также удовлетворение граничных условий (2.2) и (2.3), приводит к системе линейных алгебраических уравнений. В области значений параметров, где решение этой системы уравнений существует, она определяет закон дисперсии поверхностной волны, т.е. зависимость частоты колебаний в ней от ее волнового числа и соотношения между компонентами смещения в ней по разным осям.

3. Основная система уравнений. Выведем соотношения для поверхностной волны в слоистом массиве. В соответствии с изложенным подставим в (2.1) $w = g(z)\exp[i(kx - \omega t)]$. В результате получим

$$\frac{d^2 g}{dz^2} = \frac{D_a k^4 - m_a \omega^2}{h_a E_a} g, \quad z > 0 \tag{3.1}$$

откуда, учитывая связь между w и g и то, что ищется решение, исчезающее при $z \to +\infty$, находим

$$w(z) = b_w \exp[i(kx - \omega t) - \kappa_a z], \quad \kappa_a = \sqrt{\frac{D_a k^4 - m_a \omega^2}{h_a E_a}} \tag{3.2}$$

где b_w – постоянная и требуется, чтобы подкоренное выражение было положительным.

Найдем компоненты смещения в поверхностной волне в субстрате. Выражения для этих компонент, выведенные в [9], § 24, при решении задачи о волне Рэлея, таковы:

$$u_x = u_{tx} + t_{lx}, \quad u_z = u_{tz} + u_{lz} \tag{3.3}$$

$$u_{tx} = \kappa_t a \exp[i(kx - \omega t) + \kappa_t z], \quad u_{tz} = -ika \exp[i(kx - \omega t) + \kappa_t z] \tag{3.4}$$

$$\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \tag{3.5}$$

где a – постоянная; ρ – плотность субстрата, c_t – скорость поперечной волны и

$$u_{lx} = kb \exp[i(kx - \omega t) + \kappa_l z], \quad u_{lz} = -i\kappa_l b \exp[i(kx - \omega t) + \kappa_l z] \tag{3.6}$$

$$\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}, \quad c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \tag{3.7}$$

где b – постоянная, c_l – скорость продольной волны в субстрате. Так как искомая волна должна исчезать при $z \to -\infty$, ей должны соответствовать такие сочетания параметров, при которых подкоренные выражения в (3.5) и (3.7) для κ_t и κ_l положительны.

Выведем основную систему уравнений. Подставив выражения (3.3), с учетом (3.4)–(3.7), в оставшееся еще не удовлетворенным первое граничное условие (2.3), в результате получим (см. [9], уравнение (24.9)):

$$a(k^2+\kappa_t^2)+2bk\kappa_l = 0 \tag{3.8}$$

Подставив выражения (3.2) для w и выражения (3.3), с учетом (3.4)–(3.7), а также $u_y = 0$, в два граничных условия (2.2), получим

$$-i(ka+\kappa_l b) = b_w \tag{3.9}$$

$$i\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{(1-2\nu)k\kappa_t a+[(1-\nu)\kappa_l^2-\nu k^2]b\} = \kappa_a E_a b_w \tag{3.10}$$

Таким образом, получена система трех линейных алгебраических уравнений (3.8)–(3.10) для определения трех неизвестных; a, b, b_w. Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения этой системы является, как известно, обращение в нуль ее определителя. Отсюда получается область существования искомой поверхностной волны и ее закон дисперсии в этой области. Вместо того, чтобы приравнивать нулю определитель указанной системы уравнений, удобнее действовать методом исключения неизвестных.

Исключив b_w из (3.9) и (3.10), воспользовавшись выражениями (3.5) и (3.7) для c_t и c_l, и выполнив простые преобразования, находим

$$\begin{gathered}(c_a^2\tilde{\rho}_a\kappa_a+2c_t^2\kappa_t)ka+[c_a^2\tilde{\rho}_a\kappa_a\kappa_l+c_l^2(\kappa_l^2-k^2)+2c_t^2k^2]b = 0\\ \tilde{\rho}_a = \rho_a/\rho,\quad \rho_a = m_a/h_a,\quad c_a = \sqrt{E_a/\rho_a}\end{gathered} \tag{3.11}$$

где c_a имеет смысл скорости плоской упругой волны, распространяющейся в слоистом массиве перпендикулярно его слоям, как продольная волна в стержне.

Используем следующее соотношение, вытекающее из первых формул в (3.5) и (3.7):

$$\kappa_l^2-k^2 = -(k^2-\kappa_t^2)(c_t^2/c_l^2) \tag{3.12}$$

Поделив обе части (3.11) на c_t^2, использовав (3.12) и выполнив простые преобразования, находим

$$[(c_a^2/c_t^2)\tilde{\rho}_a\kappa_a+2\kappa_t]ka+[(c_a^2/c_t^2)\tilde{\rho}_a\kappa_a\kappa_l+k^2+\kappa_t^2]b = 0 \tag{3.13}$$

Таким образом, задача сведена к отысканию нетривиального решения системы двух линейных уравнений (3.8) и (3.13) с двумя неизвестными a и b, существующего лишь при условии обращения в нуль определителя этой системы. Это условие, после простых преобразований, приобретает вид

$$(k^2+\kappa_t^2)^2-4k^2\kappa_l\kappa_t = (c_a^2/c_t^2)\tilde{\rho}_a\kappa_a\kappa_l(k^2-\kappa_t^2) \tag{3.14}$$

Уравнение (3.14) определяет закон дисперсии волны, т.е. зависимость ω от k. Умножив (аналогично [9], § 24) обе части этого уравнения на $(k^2+\kappa_t^2)^2+4k^2\kappa_l\kappa_t$, приведем его к виду

$$\begin{gathered}\left(2k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4-16k^4\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_l^2}\right) = \frac{c_a^2\omega^2\tilde{\rho}_a}{c_t^4}\sqrt{\left(l_a^2k^4-\frac{\omega^2}{c_a^2}\right)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_l^2}\right)}\times\\ \times\left[\left(2k^2+\frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^2+4k^2\sqrt{\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c_l^2}\right)}\right],\quad l_a = \sqrt{\frac{D_a}{E_ah_a}}\end{gathered} \tag{3.15}$$

Использованное выше континуальное описание слоистого массива применимо лишь при условии, что определяющая масштаб изменения прогибов в нем характерная длина $l_a \gg h_a$ (*условие II*). Это условие заведомо выполняется, если модуль E_a существенно меньше продольного модуля упругости массива.

При нахождении из (3.15) зависимости ω от k удобно ввести (как в [9], § 24) новую искомую величину ξ, положив $\omega = c_t k\xi$. Подставив это выражение в (3.15), получим, после очевидных сокращений, следующее уравнение, определяющее зависимость ξ от k:

$$R(\xi) \equiv \xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) =$$
$$= \frac{c_a}{c_t}\tilde{\rho}_a\sqrt{\left(\frac{c_a l_a k}{c_t}\right)^2 - \xi^2}\sqrt{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\xi^2}\left[2 + \xi^2 + 4\sqrt{\left(1 - \xi^2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)(1 - \xi^2)}\right] \tag{3.16}$$

Отметим, что величина

$$(c_a l_a)^2 = (D_a/\rho_a h_a) \tag{3.17}$$

не зависит от E_a.

Если пренебречь взаимодействием между слоистым массивом и субстратом, т.е. в правой части (3.16) перейти к пределу при $(c_a/c_t) \to 0$, что соответствует, при учете независимости $c_a l_a$ от E_a, замене правой части уравнения (3.16) нулем, то, естественно, получится уравнение, определяющее $\xi = \xi_R$ в случае волны Рэлея: $R(\xi_R) = 0$. При этом ξ_R – константа, зависящая лишь от коэффициента Пуассона ν.

При учете же указанного взаимодействия ξ становится функцией волнового числа k и зависит от него, как видно из (3.16), через посредство безразмерной величины $l_a k$. Найдя из (3.16) значение ξ, соответствующее заданному значению k, можно из (3.8) выразить b через a (в силу (3.16) тот же результат получится, если для этого использовать (3.13)). Далее, используя полученный таким образом результат, можно из (3.9) выразить b_w через a (очевидно, тот же результат получится, если для этого использовать (3.10)). Таким образом, смещения u_x, u_z в субстрате и прогиб w в слоистом массиве окажутся пропорциональными коэффициенту a, который в рамках рассмотренной линейной задачи остается произвольным. Действительные выражения для прогиба w и смещений u_x, u_z в волне можно, после выполнения всего указанного выше, найти, взяв либо действительные, либо мнимые части выражений (3.2) и (3.3), с учетом (3.4)–(3.7).

4. Существование решения задачи. Речь идет о существовании допустимого решения задачи. При этом под допустимым понимается такое решение задачи, которое удовлетворяет условиям применимости использованного выше континуального описания деформирования слоистого массива во всех его представительных элементах объема. Прежде всего, видно, что для того, чтобы искомое решение задачи существовало, должно быть $0 < \xi < 1$, так как только при таком условии обеспечивается требуемая положительность подкоренных выражений для величин κ_t и κ_l, определяемых формулами (3.5) и (3.7) соответственно. Далее, положительность, правой части уравнения (3.16) обеспечивается лишь в интервале положительности функции $R(\xi)$. Эта функция, как нетрудно видеть, является монотонно возрастающей. Следовательно, она положительна в интервале $\xi_R < \xi < 1$, причем при изменении ν от нуля до 1/2, величина ξ_R изменяется от 0.8741 до 0.9554 (см. [9], § 24 и [1], § 4). Наконец, требуемая положительность подкоренного выражения для величины κ_a, определяемой выражением (3.2), т.е. положительность подкоренного выражения в квадратном корне, содержащем k, в уравнении (3.16), может быть обеспечена лишь при условии $k > (c_t/c_a\xi l_a)$. Отсюда и из *условия I* приходим к требованию $(c_t/c_a l_a) \ll (1/h_a)$, или $(c_a/c_t) \gg (h_a/l_a)$ (ус-

ловие III). Здесь множитель ξ опущен, так как в допустимом (для существования решения задачи) интервале $\xi_R < \xi < 1$ он близок к единице. Подчеркнем, что *условие III* не зависит от *условий I* и *II*, так как оно содержит параметры, не входящие в *условия I* и *II*, а именно – плотности субстрата и массива. Поэтому *условие III* может иметь самостоятельное значение, когда указанные плотности существенно отличаются одна от другой.

Таким образом, для обеспечения возможности существовании допустимого решения задачи о распространении искомой поверхностной волны должны выполняется *условия I*, *II* и *III*, которые, с учетом приведенных выше выражений для c_a и l_a принимают следующий вид:

$$k \ll (1/h_a), \quad (h_a^{3/2}\sqrt{E_a/D_a}) \ll 1, \quad c_t \ll (\sqrt{D_a/h_a\rho_a}/h_a) \tag{4.1}$$

Покажем теперь, что решение рассматриваемой задачи существует. Для этого разрешим уравнение (3.16) относительно $(c_a l_a k/c_t)^2$. В результате получим

$$\left(\frac{c_a l_a k}{c_t}\right)^2 = \xi^2 + \frac{c_t^2}{c_a^2\tilde{\rho}_a^2[1-(c_t^2/c_l^2)\xi^2]}\left\{\frac{R(\xi)}{2+\xi^2+4\sqrt{[1-(c_t^2/c_l^2)\xi^2](1-\xi^2)}}\right\}^2 \tag{4.2}$$

Как вытекает из изложенного выше, решение этого уравнения следует искать лишь в интервале $\xi_R < \xi < 1$. Отсюда и из известных свойств непрерывных функций вытекает, что при заданной величине волнового числа k, лежащей между наименьшим и наибольшим его значениями, определяемыми правой частью уравнения (4.2), решение уравнения (4.2) и, следовательно, уравнения (3.16), а также уравнения (3.15), существует. Это решение допустимо, если удовлетворены условия (4.1).

Таким образом, решение для искомой поверхностной волны существует и, как вытекает из (4.1), оно является допустимым в интервале волновых чисел $(1/h_a) \gg k > (c_t/(c_a\xi_R l_a)$. В отличие от волны Рэлея, существующей при любой величине волнового числа и распространяющейся с постоянной скоростью $v_R = \xi_R c_t$, рассматриваемая здесь поверхностная волна распространяется со скоростью, зависящей от k, т.е. для нее имеет место дисперсия. При значениях k, сравнимых с $1/h_a$ примененное выше континуальное описание слоистого массива утрачивает силу. При значениях k, намного превышающих $1/h_a$, рассматриваемая поверхностная волна должна уже рассматриваться как распространяющаяся по границе контакта с проскальзыванием между двумя упругими полупространствами (см. упоминание о такой волне в [1], § 4, со ссылкой на работу [10]).

5. Асимптотическое решение задачи. Рассмотрим два случая, в которых возможно получение асимптотического решения задачи.

Случай 1: волна, близкая к рэлеевской. Предположим, что

$$1 \gg (c_a/c_t) \gg (h_a/l_a) \tag{5.1}$$

Условие (5.1) выполняется в случае, когда податливость слоистого массива в направлении нормали к образующим его слоям значительно выше податливости субстрата. Очевидно, условие (5.1) совместимо с условиями (4.1). Малым параметром, по которому проведем ниже асимптотическое разложение искомого (допустимого) решения уравнения (3.16), является (c_a/c_t). Удержим в этом разложении лишь члены нулевого и первого порядка малости.

Член нулевого порядка получается, когда отношение c_a/c_t становится исчезающе малым. Тогда правую часть уравнения (3.16) можно, как отмечалось выше, заменить нулем, что соответствует полному пренебрежению влиянием массива на деформирование субстрата. При этом решение уравнения, получающегося из уравнения (3.16), принимает вид $\xi = \xi_R$ и искомая волна превращается в волну Рэлея.

Член первого порядка получается, когда в уравнении (3.16) принимается $\xi = \xi_R + \xi_1$, производится разложение по величине ξ_1, которая предполагается малой, и отбрасываются все члены этого разложения, содержащие ξ_1 в степенях выше первой степени. Тогда в левой части уравнения останется лишь член $R'(\xi_R)\xi_1$, где

$$R'(\xi_R) = 2\xi_R\{3\xi_R^4 - 32\xi_R^2 + 16[3 - 2(c_t^2/c_l^2)]\} \tag{5.2}$$

В правой же части уравнения (3.16) ξ везде заменится на ξ_R. В итоге, с указанной выше точностью, получим следующее асимптотическое разложение искомого решения уравнения (3.16):

$$\xi = \xi_R + \frac{c_a}{c_t}\tilde{\rho}_a\sqrt{\left[\frac{D_a}{\rho_a h_a}\left(\frac{k}{c_t}\right)^2 - \xi_R^2\right]\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\xi_R^2\right)}F(\xi_R) \tag{5.3}$$

$$F(\xi_R) = \frac{1}{R'(\xi_R)}\sqrt{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\xi_R^2}\left[2 + \xi_R^2 + 4\sqrt{\left(1 - \xi_R^2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)(1 - \xi_R^2)}\right] \tag{5.4}$$

$$\xi_R c_t\sqrt{\rho_a h_a/D_a} < k \ll (1/h_a) \tag{5.5}$$

причем вывод (5.3) выполнен с учетом (3.17). Существование интервала волновых чисел (4.5) обеспечивается выполнением условий (4.1).

Таким образом, закон дисперсии искомой поверхностной волны, с учетом формулы (5.3) и соотношения $\omega = c_t k\xi$, принимает вид

$$\omega = \left\{c_t\xi_R + c_a\tilde{\rho}_a\sqrt{\left[\frac{D_a}{\rho_a h_a}\left(\frac{k}{c_t}\right)^2 - \xi_R^2\right]\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\xi_R^2\right)}F(\xi_R)\right\}k \tag{5.6}$$

Здесь $F(\xi_R)$ определяется выражением (5.4) (с учетом (5.2)), допустимый интервал волновых чисел определяется неравенствами (5.5), условия применимости формулы (5.3) имеют вид (5.1), и условия применимости использованной механико-математической модели в целом имеют вид (4.1). Для вычисления ξ_R можно воспользоваться следующей приближенной формулой, получающейся из соответствующей формулы, приведенной для ν_R в работе [1], формула (4.106), с учетом соотношения $\nu_R = \xi_R c_t$:

$$\xi_R = 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{5\delta^2}{8} + \frac{29\delta^3}{16} + O(\delta^4), \quad \delta = \frac{1-\nu}{4(1+\nu)} \le \frac{1}{4} \tag{5.7}$$

Амплитудные и фазовые соотношения в волне, могут быть найдены, с использованием формул (5.6), (5.7), как объяснено выше в конце раздела 3.

Случай 2: волна, далекая от рэлеевской. Предположим теперь, что, в противоположность (5.1):

$$(c_a/c_t) \gg 1 \tag{5.8}$$

Очевидно, условие (5.8) совместимо с условиями (4.1). Малым параметром, по которому проведем ниже асимптотическое разложение искомого (допустимого) решения уравнения (3.16), теперь является c_t/c_a. Удержим в этом разложении лишь члены нулевого и первого порядка малости.

Член нулевого порядка получается, когда отношение c_t/c_a становится исчезающе малым, что соответствует безграничному возрастанию коэффициента c_a/c_t в правой части уравнения (3.16). При этом удовлетворить уравнению (3.16) становится возможным лишь в том случае, если стремится к нулю подкоренное выражение в правой части уравнения (3.16), содержащее k, так как при указанном предельном переходе все остальные выражения в этом уравнении остаются ограниченными в интервале $\xi_R < \xi < 1$ существования его решения. Таким образом, член нулевого приближения $\xi \equiv \xi_* = k\sqrt{D_a/\rho_a h_a}/c_t$ получается (с учетом (3.17)), если приравнять нулю указанное подкоренное выражение, содержащее k.

Член первого порядка получается, когда в (3.16) принимается $\xi = \xi_* - \xi_1$ (очевидно $\xi_1 > 0$), производится разложение по величине ξ_1, которая предполагается малой, и удерживается лишь член наименьшего порядка малости. При этом подкоренное выражение в уравнении (3.16), содержащее k, принимает вид $2\xi_1\xi_*$, а везде в остальных местах этого уравнения ξ заменяется на ξ_*.

В итоге, с указанной выше точностью, после простых преобразований, получим следующее асимптотическое разложение искомого решения уравнения (3.16) по малому параметру (c_t/c_a):

$$\xi = \xi_* - \left(\frac{c_t}{c_a}\right)^2 \frac{R(\xi_*)}{F_*}, \quad \xi_* = \frac{k}{c_t}\sqrt{\frac{D_a}{\rho_a h_a}} \tag{5.9}$$

$$F_* = 2\xi_*\sqrt{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\xi_*^2}\left[2 + \xi_*^2 + 4\sqrt{\left(1 - \xi_*^2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)(1 - \xi_*^2)}\right] \tag{5.10}$$

Таким образом, закон дисперсии искомой поверхностной волны, с учетом (5.9) и соотношения $\omega = c_t k\xi$, принимает вид

$$\omega = c_t\left\{\xi_* - \left(\frac{c_t}{c_a}\right)^2 \frac{R(\xi_*)}{F_*}\right\}k \tag{5.11}$$

Здесь $R(\xi)$ определяется левой частью (3.16), ξ_* определяется (5.9) и величина в фигурных скобках должна лежать в интервале $(\xi_R, 1)$, что, с точностью порядка $(c_t/c_a)^2$, приводит к следующему интервалу изменения k, в котором применимо выражение (5.11):

$$(\xi_R c_t/\sqrt{D_a/\rho_a h_a}) < k < (c_t/\sqrt{D_a/\rho_a h_a}) \tag{5.12}$$

Умножив все части неравенств (5.12) на h_a, видим, что, если удовлетворено третье неравенство (4.1), то для волновых чисел, лежащих в интервале (5.12), удовлетворено и первое неравенство (4.1). Амплитудные и фазовые соотношения в волне, могут быть найдены, с использованием (5.11), как объяснено выше в конце раздела 3.

Возможность реализации рассмотренной здесь поверхностной волны в какой-либо конкретной ситуации определяется тем, насколько близкими к действительности окажутся для этой ситуации условия применимости использованного выше континуального описания слоистого массива.

Автор благодарит И.Г. Горячеву за обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00376).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412 с.
2. *Лифшиц И.М.* О тепловых свойствах цепных и слоистых структур при низких температурах // ЖЭТФ. 1952. Т. 22. Вып. 4. С. 475–486.
3. *Sonntag G.* Die in Schichten gleicher Dicke reibungsfrei geschichtete Halbebene mit periodisch verteilter Randbelastung // Forsch. Geb. Ingenieurwesens, 1957, Bd. 23. H. 1/2. S. 3–8.
4. *Салганик Р.Л.* Приближение сплошной среды для описания деформирования слоистого массива // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 48–56.
5. *Салганик Р.Л.* Деформирование прямолинейно-слоистого массива как непрерывной совокупности тонких пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 25–33.
6. *Устинов К.Б.* К вопросу построения континуальной модели слоистой упругой среды: Препринт № 644. М.: Ин-т пробл. механики РАН, 1999. 28 с.
7. *Устинов К.Б.* К вопросу построения континуальной модели слоистой среды // Аннот. докл. 8-го Всерос. съезда по теоретической и прикладной механике. Пермь, 2001. С. 570–571.
8. *Prasad S., Zabinski J.* Super slippery solids // Nature. 1997. V. 387. № 6635. P. 761–763.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
10. *Murty G.S.* Wave propagation at an unbounded interface between two elastic half-spaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. V. 58. № 5. P. 1094–1095.

Москва

Поступила в редакцию
7.02.2002