МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2003

УДК 539.3

 Б.Е. ПОБЕДРЯ

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТОВ

Сформулированы основные принципы обобщенной термодинамики, в рамках которой могут рассматриваться процессы механики сплошной среды (МСС), в том числе и процессы разрушения. Даны формулировки энтропийного критерия длительной прочности и общего термодинамического критерия разрушения, показана их связь с другими известными критериями. Построена процедура осреднения для решения задачи о прочности в композитах, компоненты которых описываются физически нелинейными определяющими соотношениями.

Введем четырехмерное евклидово пространство $R^4 = R^1 \times R^3$, где R^1 – временнóе пространство, а R^3 – координатное пространство $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$. Будем считать, что греческий индекс α пробегает значения $\alpha = 0, 1, 2, 3$. При этом индекс 0 относится к временному пространству $\partial_0 \equiv \partial/\partial t$, а остальные индексы к координатному $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, т.е.

$$\partial_\alpha f \equiv f_{,\alpha} = \begin{cases} \partial f/\partial t, & \alpha = 0 \\ \partial f/\partial x_i, & \alpha = i \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

В этом же четырехмерном пространстве можно ввести вектор $\overset{(1)}{z}$, например, с компонентами

$$\overset{(1)}{z}{}^{\alpha} = (\rho, \rho v_i) \tag{1}$$

а также векторы $\overset{(1+i)}{z}$ с компонентами

$$\overset{(1+i)}{z}{}^{\alpha} = (\rho v_i, \rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \tag{2}$$

где ρ – плотность, v_i – компоненты вектора скорости, σ_{ij} – напряжения.

Будем считать, что $\overset{(1)}{z}, \overset{(2)}{z}, \overset{(3)}{z}, \overset{(4)}{z}$ – компоненты некоторого N-мерного вектора $\mathbf{z}$ (в данном случае $N = 4$). Тогда уравнения МСС можно записать в виде

$$\mathbf{z}^{\alpha}_{,\alpha} = \mathbf{f} \tag{3}$$

где $\mathbf{f}$ – N-мерный вектор источников (входных данных). В данном случае

$$\overset{(1)}{f} = 0, \quad \overset{(1+i)}{f} = \rho F_i \tag{4}$$

Составим M-мерный вектор основных переменных $\mathbf{y}$ ($M = 4$), который выберем так

$$\mathbf{y} = (\overset{(1)}{y} = p, \overset{(1+i)}{y} = v_i) \tag{5}$$

где p – давление. Тогда для замыкания системы уравнений (3) требуется воспользоваться определяющими соотношениями

$$\mathbf{z}^{\alpha} = \mathbf{z}^{\alpha}(\mathbf{y}) \tag{6}$$

При этом иногда к числу таких определяющих соотношений причисляются и кинематические уравнения.

Заметим, что определяющие соотношения могут содержать температуру. В этом случае система уравнений (3) не будет замкнутой даже при использовании определяющих соотношений (6), так как в них дополнительно входит переменная T – температура. Ее можно включить дополнительной компонентой в вектор $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = (\overset{(1)}{y} = p, \overset{(1+i)}{y} = v_i, \overset{(5)}{y} = T)$$

Таким образом $N = 4$, а $M = 5$, поэтому система (3) не замкнута и при использовании (6). Для ее замыкания требуется привлечение основных законов термодинамики [1, 2].

В МСС удобно пользоваться равенством, вытекающим из первых двух законов термодинамики [1]:

$$TdS = \delta Q + W^*dt$$

где W^* – функция рассеивания (некомпенсированное тепло, диссипация), $S = \int_V \rho\, s dV$ – энтропия. Неравенство Клазиуса можно также представить в форме

$$T\rho\frac{ds}{dt} \geq -q_{i,i} + \rho q \tag{7}$$

или

$$T\rho\frac{ds}{dt} = -q_{i,i} + \rho q + w^*, \quad \int_V w^* dV = W^*$$

Уравнения сохранения энергии и притока тепла соответственно записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + (\rho e v_i)_{,i} + q_{i,i} = \rho q + \sigma_{ij}v_{ij} \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \rho v^2/2) + (\rho e v_i + \rho v^2 v_i/2)_{,i} + q_{i,i} - (\sigma_{ij}v_j)_{,i} = \rho q + \rho F_i v_i \tag{9}$$

где e – плотность внутренней энергии [1].

Наряду с компонентами (1) и (2) N-мерного вектора $\mathbf{z}$ введем еще одну

$$\overset{(5)}{z} = (\rho e, \rho e v_i + q_i)$$

для уравнения (8) и

$$\overset{(5)}{z} = (\rho e + \rho v^2/2, \rho e v_i + \rho v^2 v_i/2 + q_i - \sigma_{ij}v_{ij})$$

для уравнения (9). Соответственно дополним N-мерный вектор источников $\mathbf{f}$ (4) компонентой

$$\overset{(5)}{f} = \rho q + \sigma_{ij}v_{ij}$$

для уравнения (8) и

$$\overset{(5)}{f} = \rho q + \rho F_i v_i$$

для уравнения (9). Таким образом, и уравнение (8) и уравнение (9) входят в уравнение (3).

Кроме неравенства Клазиуса (7) в термодинамике пользуются неравенством Фурье

$$q_i T_{,i} \le 0 \tag{10}$$

Используя (10), неравенство Клазиуса (7) можно записать в виде

$$\rho \frac{ds}{dt} \ge \rho q - \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i}$$

которое называют неравенством Клазиуса–Дюгема. Его можно также представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + (\rho s v_i)_{,i} + \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} \ge \rho q \tag{11}$$

Введем компоненты M-мерного вектора

$$h^\alpha = -(\rho s, \rho s v_i + q_i/T)$$

т.е.

$$h^0 = -\rho s, \quad h^i = \rho s v_i + q_i/T$$

и источник χ:

$$\chi = -\rho q$$

Тогда неравенство (11) записывается в виде

$$h^\alpha_{,\alpha} \le \chi \tag{12}$$

Назовем неравенство (12) энтропийным неравенством. В отсутствие источников ($\chi = 0$) оно таково

$$h^\alpha_{,\alpha} \le 0 \tag{13}$$

Сплошная среда описывается кинематическими параметрами: перемещениями u_i, скоростями v_i, деформациями ε_{ij}, скоростями деформаций v_{ij}; статическими параметрами: напряжениями σ_{ij}, давлением p; другими параметрами: плотностью ρ, температурой T, тепловым потоком q_i и др. Некоторые из этих параметров связаны между собой определяющими соотношениями, например [1, 3]:

$$\sigma_{ij} = \mathscr{F}_{ij}(\underset{\sim}{\varepsilon}, T)$$

или (закон Фурье):

$$q_i = -\lambda_{ij} T_{,j}$$

Часть параметров, которые называются термодинамическими параметрами состояния, полностью определяют состояние системы и поэтому все остальные параметры через них каким-либо образом выражаются. Одним из термодинамических параметров состояния является температура T (внутренний параметр состояния). Другие параметры (внешние) могут быть скалярами, векторами или тензорами второго, а также более высокого рангов. Некоторые из термодинамических параметров состояния могут быть связаны между собой уравнениями состояния.

Итак, пусть заданы уравнения МСС (3) с N-мерным вектором входных данных $\mathbf{f}$ и известны определяющие соотношения (6) с M-мерным вектором основных переменных $\mathbf{y}$. Назовем $\mathbf{y}(t)$ основным процессом. Определяющие соотношения (6) должны удовлетворять ряду требований. Они должны быть локальными по пространственным переменным (постулат макроскопической определимости [4]), инвариантными относительно преобразований в R^3 и удовлетворять некоторым другим требованиям [5]. Система уравнений (3) будет замкнута в том случае, если размерности векторов $\mathbf{z}^\alpha$ и $\mathbf{y}$ одинаковы ($M = N$).

Но если система (3) замкнута и выполнены условия дополнительности (граничные условия и начальные данные), искомое решение задачи МСС должно удовлетворять энтропийному неравенству (13) (предполагаем, что источники отсутствуют $\chi = 0$). При этом, конечно же, должны существовать соотношения, связывающие величины h^α с основным процессом

$$h^\alpha = h^\alpha(\mathbf{y}) \tag{14}$$

Выполнение неравенства (13) должно обеспечивать корректную постановку задачи нахождения основного процесса $\mathbf{y}(t)$. Требование, чтобы уравнения (3) описывали процесс распространения волн с конечной скоростью, должно вытекать из некоторых свойств величин h^α. Потребуем, чтобы функция h^0 в (14) удовлетворяла требованию положительной определенности выражения

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial^2(h^0)}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{y}} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \tag{15}$$

для любого M-мерного вектора $\mathbf{a}$. Требование (15) похоже на требование положительности касательного модуля [5].

В силу того, что для каждого основного процесса $\mathbf{y}(t)$ должно выполняться энтропийное неравенство (13), существуют N-мерные векторы, называемые множителями Лагранжа $\mathbf{\Lambda}$ [6, 7], такие что согласно (3) и (13) имеет место неравенство

$$h^\alpha_{,\alpha} - \mathbf{\Lambda} \cdot (\mathbf{z}^\alpha_{,\alpha} - \mathbf{f}) \leq 0 \tag{16}$$

которое можно также переписать в виде

$$(h^\alpha - \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{z}^\alpha)_{,\alpha} + \mathbf{\Lambda}_{,\alpha} \cdot \mathbf{z}^\alpha + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{f} \leq 0 \tag{17}$$

Введем новый вектор k^α:

$$k^\alpha = -h^\alpha + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{z}^\alpha \tag{18}$$

Тогда из (17) имеем

$$-k^\alpha_{,\alpha} + \mathbf{\Lambda}_{,\alpha} \cdot \mathbf{z}^\alpha + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{f} \leq 0 \tag{19}$$

Пусть теперь существует преобразование, связывающее N-мерный вектор $\mathbf{\Lambda}$ с M-мерным вектором основного процесса $\mathbf{y}$ (разумеется, взаимная однозначность такого преобразования возможна только при $M = N$):

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{\Lambda}) \tag{20}$$

Тогда, используя определяющие соотношения (6) и (14), можно с помощью (20) записать

$$\mathbf{z}^\alpha = \mathbf{z}'^\alpha(\mathbf{\Lambda}), \quad h^\alpha = H'^\alpha(\mathbf{\Lambda}) \tag{21}$$

Поэтому из (19) имеем

$$(-\partial k^\alpha/\partial\mathbf{\Lambda} + \mathbf{z}^\alpha)\cdot\mathbf{\Lambda}_{,\alpha} + \mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{f} \le 0 \tag{22}$$

Это неравенство должно выполняться для каждого поля $\mathbf{\Lambda}$, а следовательно, и для его градиента $\mathbf{\Lambda}_{,\alpha}$. Тогда из (22) обязательно должно быть

$$\mathbf{z}^\alpha = \partial k^\alpha/\partial\mathbf{\Lambda} \tag{23}$$

и согласно (18)

$$h^\alpha = -k^\alpha + \mathbf{\Lambda}\cdot\partial k^\alpha/\partial\mathbf{\Lambda} \tag{24}$$

Таким образом, определяющие соотношения (21) можно считать потенциальными и, зная этот потенциал k^α, согласно (23) и (24) находятся необходимые для решения задачи определяющие соотношения (21).

Энтропийное неравенство (13) в силу (22) и (23) можно записать в следующем виде

$$\mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{f} \le 0$$

Приступим к его исследованию.

Прежде всего заметим, что касательный модуль – матрица $N \times N$ – должен быть симметричным. Это следует из (23):

$$\frac{\partial\mathbf{z}^\alpha}{\partial\mathbf{\Lambda}} = \frac{\partial^2 k^\alpha}{\partial\mathbf{\Lambda}\partial\mathbf{\Lambda}}$$

Физический смысл множителей Лагранжа $\mathbf{\Lambda}$ еще не был установлен. Вернемся к неравенству (16) и запишем его, используя основной процесс

$$\left(\frac{\partial h^\alpha}{\partial\mathbf{y}} - \mathbf{\Lambda}\cdot\frac{\partial\mathbf{z}^\alpha}{\partial\mathbf{y}}\right)\cdot\mathbf{y}_{,\alpha} + \mathbf{\Lambda}\cdot\mathbf{f} \le 0 \tag{25}$$

что, разумеется, выполняется для всех основных процессов $\mathbf{y}$. Поэтому из (25) имеем

$$\partial h^\alpha/\partial\mathbf{y} = \mathbf{\Lambda}\cdot\partial\mathbf{z}^\alpha/\partial\mathbf{y} \tag{26}$$

Так как основной процесс выбирается любым, положим, что он совпадает с $\mathbf{z}^0$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{z}^0 \tag{27}$$

Тогда из (26) следует

$$\partial h^0/\partial\mathbf{y} = \mathbf{\Lambda} \tag{28}$$

Дифференцируя (28) по $\mathbf{y}$, получим

$$\frac{\partial^2 h^0}{\partial\mathbf{y}\partial\mathbf{y}} = \frac{\partial\mathbf{\Lambda}}{\partial\mathbf{y}} \tag{29}$$

Однако согласно (15) левая часть соотношения (29) положительно определена. Поэтому якобиан в правой части (29) отличен от нуля и можно ввести преобразование (14).

Покажем теперь, что система (3), (6) является гиперболической, если справедливо энтропийное неравенство (13), (14) и выполняется условие (15). В самом деле, запишем (3), используя (6) и (20), в виде

$$\frac{\partial \mathbf{z}^{\alpha}}{\partial \mathbf{\Lambda}} \cdot \mathbf{\Lambda}_{,\alpha} = \mathbf{f} \tag{30}$$

Учитывая (23), из (30) имеем

$$\frac{\partial^2 k^{\alpha}}{\partial \mathbf{\Lambda} \partial \mathbf{\Lambda}} \cdot \mathbf{\Lambda}_{,\alpha} = \mathbf{f} \tag{31}$$

откуда видно, что система уравнений (3) симметрична. Эта система будет к тому же гиперболичной, если в (31) выполнено условие

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial^2 k^0}{\partial \mathbf{\Lambda} \partial \mathbf{\Lambda}} \cdot \mathbf{a} \geq 0$$

Положим теперь, что выполнено (27). Тогда согласно (31) и (3):

$$\frac{\partial^2 k^0}{\partial \mathbf{\Lambda} \partial \mathbf{\Lambda}} \cdot \delta \mathbf{\Lambda} = \delta \mathbf{z}^0 = \delta \mathbf{y}$$

Отсюда согласно (29):

$$\delta \mathbf{\Lambda} \cdot \frac{\partial^2 k^0}{\partial \mathbf{\Lambda} \partial \mathbf{\Lambda}} \cdot \delta \mathbf{\Lambda} = \delta \mathbf{\Lambda} \cdot \delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{y} \cdot \frac{\partial^2 h^0}{\partial \mathbf{\Lambda} \partial \mathbf{\Lambda}} \cdot \delta \mathbf{y} \tag{32}$$

Однако в силу (15) правая часть (32) неотрицательна. Отсюда следует неотрицательность левой части и гиперболичность системы (3).

Итак, энтропийное неравенство можно не постулировать априори, а получить как требование, предъявляемое к решению (основному процессу). Впервые в термостатике такой подход был реализован Каратеодори [8].

В заключение, запишем равенство (26) в виде

$$dh^{\alpha} = \mathbf{\Lambda} \cdot d\mathbf{z}^{\alpha}$$

Критерий длительной прочности, основанный на применении термодинамических принципов, получил название энтропийного критерия [9].

Для адиабатических процессов из основных законов термодинамики следует

$$S(t) - S(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{W^*}{T} dt$$

где $S(t_0)$ – энтропия в некоторый момент времени t_0.

Согласно энтропийному критерию прочности разрушение наступает в некоторый критический момент времени $t = t_*$, для которого S достигает своего предельного значения

$$S(t)|_{t = t_*} = S_*$$

Это значение рассматривается как некоторая характеристика материала, найденная экспериментально либо из физико-теоретических расчетов. Иногда [9] величина S_* определяется как энтропия, которую необходимо подвести к единице объема вещества, находящегося при абсолютном нуле, чтобы расплавить его.

Тогда энтропийный критерий можно сформулировать в виде

$$S_0 + \int_0^{t_*} \frac{W^*(t)}{T(t)} dt = S_*$$

где t_* – время до разрушения. Отсюда видно, что для использования энтропийного критерия длительной прочности необходимо знание функции рассеивания для выбранной модели.

Рассмотрим связь энтропийного критерия с некоторыми критериями длительной прочности [10]. Пусть деформирование образца производится при начальной температуре T_0, тогда согласно энтропийному критерию предельное соотношение записывается в виде

$$\Delta S(T_0) = S_* - S_0(T_0)$$

Если нагружение образца начинается при другой начальной температуре T'_0, то начальное значение плотности энтропии равно

$$S(t)|_{t=0} = S_0(T'_0) = S_0(T_0) + \int_{T_0}^{T'_0} \frac{c(T)}{T} dT$$

а критическое значение приращения плотности энтропии, соответствующее начальной температуре T'_0, вычисляется следующим образом

$$\Delta S(T'_0) = S_* - S_0(T_0) - \int_{T_0}^{T'_0} \frac{c(T)}{T} dT = \Delta S(T_0) - \int_{T_0}^{T'_0} \frac{c(T)}{T} dT$$

Сформулируем теперь общий термодинамический критерий прочности. Разрушение материала наступает в момент, когда одна из аддитивных составляющих какого-либо термодинамического потенциала (например, внутренней энергии E_β) достигает предельного значения E^*_β:

$$E_\beta = E^*_\beta \quad (\beta = 0, 1, \ldots, N) \tag{33}$$

Значение E_β соответствует разрушению связанному с переходом в новое агрегатное состояние (например, с плавлением).

Величины E^*_β могут зависеть от скалярных параметров, например, от инвариантов тензора напряжений или деформаций в момент времени t^*, предшествующий разрушению.

В отличие от энтропийного критерия термодинамический (33) может применяться не только к адиабатическим процессам. Кроме того, он описывает хрупкое разрушение для обратимых моделей, для которых функция рассеивания равна нулю.

Термодинамический критерий не требует введения дополнительного кинетического уравнения. Для описания эволюции параметров прочностных характеристик может быть использован закон сохранения энергии, который для плотности внутренней энергии e записывается в одном из следующих видов

$$\rho\frac{de}{dt} = -q_{i,i} + \rho q + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \rho\frac{d}{dt}\left(e + \frac{1}{2}\dot{u}_i\dot{u}_i\right) = -q_{i,i} + \rho q + \rho F_i\dot{u}_i$$

где q_i – вектор теплового потока, а q – массовый приток тепла.

Для композитов плотность внутренней энергии представима асимптотическим разложением и с помощью метода осреднения [5] могут быть найдены эффективные характеристики композита. На каждом шаге приближения термодинамический критерий прочности применим к приведенной анизотропной среде.

Рассмотрим систему уравнений (3) и определяющие соотношения (6). Кроме того, задано энтропийное неравенство (13) и определяющие соотношения (14). Согласно методу осреднения [5] введем "быстрые" переменные

$$\xi_0 = t, \quad \xi_\beta = x_i/\kappa \ (\beta = 0, 1, 2, 3) \tag{34}$$

где κ – малый геометрический параметр. Производную по ξ_β будем отмечать чертой внизу.

Оставим пока в стороне граничные условия и рассмотрим уравнения (3) и энтропийное неравенство (13). Тогда имеем из (3) и (34):

$$\frac{1}{\kappa}\mathbf{z}^\alpha_{|\alpha} + \mathbf{z}^\alpha_{,\alpha} = \mathbf{f} \tag{35}$$

Решение уравнений (3), (6) ищем в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(x) + \kappa\mathbf{N}^{(1)}(\xi, \partial\mathbf{Y}) + \kappa^2\mathbf{N}^{(2)}(\xi, \partial\mathbf{Y}, \partial^2\mathbf{Y}) + \mathbf{N}^{(3)}(\xi, \partial\mathbf{Y}, \partial^2\mathbf{Y}, \partial^3\mathbf{Y}) + \ldots \tag{36}$$

где $\mathbf{N}^{(q)}$ – локальные функционалы уровня q, аргументами которых являются быстрые координаты ξ_β и градиенты процессов $\mathbf{Y}$ по медленным координатам порядка $1, 2, \ldots, q$.

Таким образом, разложение (36) запишется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{q=0}^{\infty} \kappa^q\mathbf{N}^{(q)}, \quad \mathbf{N}^{(0)} \equiv \mathbf{Y}(x) \tag{37}$$

причем все локальные функционалы отрицательного уровня тождественно равны нулю. Дифференцируя (37), получим

$$\mathbf{y}_{,\beta} = \sum_{q=0}^{\infty} \kappa^q(\mathbf{N}^{(q+1)}_{|\beta} + \mathbf{N}^{(q)}_{,\beta}) \tag{38}$$

Используя (38), разложим определяющие соотношения (6) в ряд по параметру κ:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^\alpha = & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\frac{\partial^r\mathbf{z}^\alpha(\xi, \partial\mathbf{y})}{\partial\mathbf{y}_{,\beta_1}\partial\mathbf{y}_{,\beta_2}\ldots\partial\mathbf{y}_{,\beta_r}} \sum_{q_1=1}^{\infty}\sum_{q_2=1}^{\infty}\ldots\sum_{q_r=1}^{\infty}\kappa^{q_1+q_2+\ldots+q_r}\times \\ & \times(\mathbf{N}^{(q_1+1)}_{|\beta_1} + \mathbf{N}^{(q_1)}_{,\beta_1}) \otimes (\mathbf{N}^{(q_2+1)}_{|\beta_2} + \mathbf{N}^{(q_2)}_{,\beta_2}) \otimes \ldots \otimes (\mathbf{N}^{(q_r+1)}_{|\beta_r} + \mathbf{N}^{(q_r)}_{,\beta_r}) \end{aligned} \tag{39}$$

Подставим (39) в (3) и приравняем выражения при одинаковых степенях κ некоторым векторам, не зависящим от быстрой переменной η_β. Выражение при степени -1 приравняем нулю. Тогда

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{r=0}^{p+1}\frac{1}{r!}\frac{\partial^r\mathbf{z}^\alpha(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})}{\partial\mathbf{y}_{,\beta_1}\ldots\partial\mathbf{y}_{,\beta_r}} \sum_{q_1+\ldots+q_r=p+1} (\mathbf{N}^{(q_1+1)}_{|\beta_1} + \mathbf{N}^{(q_1)}_{,\beta_1}) \otimes \ldots \otimes (\mathbf{N}^{(q_r+1)}_{|\beta_r} + \mathbf{N}^{(q_r)}_{,\beta_r})\right]_{|\alpha} + \\ & + \left[\sum_{r=0}^{p}\frac{1}{r!}\frac{\partial^r\mathbf{z}^\alpha(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})}{\partial\mathbf{y}_{,\beta_1}\ldots\partial\mathbf{y}_{,\beta_r}} \sum_{q_1+\ldots+q_r=p} (\mathbf{N}^{(q_1+1)}_{|\beta_1} + \mathbf{N}^{(q_1)}_{,\beta_1}) \otimes \ldots \otimes (\mathbf{N}^{(q_r+1)}_{|\beta_r} + \mathbf{N}^{(q_r)}_{,\beta_r})\right]_{,\alpha} = \\ & = \mathbf{A}^{(p)\alpha}_{,\alpha}(\partial\mathbf{Y}, \partial^2\mathbf{Y}, \ldots, \partial^{p+1}\mathbf{Y}) \end{aligned} \tag{40}$$

где $p = -1, 0, 1, \ldots$; $q_k = 1, 2, \ldots$; $k = 1, \ldots, r$, причем величины $\mathbf{A}^{(p)}$ с отрицательными индексами тождественно равны нулю. Соотношения (40) представляют собой рекуррентную последовательность уравнений для определения локальных функционалов при дополнительных условиях

$$\begin{gathered}\langle \mathbf{N}^{(q)} \rangle = 0, \quad q > 0, \quad [[\mathbf{N}^{(q)}]] = 0 \\ \left\langle \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{r!} \frac{\partial^r \mathbf{z}^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})}{\partial \mathbf{y}_{,\beta_1} \ldots \partial \mathbf{y}_{,\beta_r}} \sum_{q_1 + \ldots + q_r = p} (\mathbf{N}^{(q_1+1)}_{|\beta_1} + \mathbf{N}^{(q_1)}_{,\beta_1}) \otimes \ldots \otimes (\mathbf{N}^{(q_r+1)}_{|\beta_r} + \mathbf{N}^{(q_r)}_{,\beta_r}) \right\rangle = \\ = \mathbf{A}^{(p)\alpha}(\partial\mathbf{Y}, \partial^2\mathbf{Y}, \ldots, \partial^{p+1}\mathbf{Y}) \\ q_k \geq 1 \quad (k = 1, \ldots, r)\end{gathered} \tag{41}$$

Соотношения (40) представляют собой последовательность нелинейных задач для неоднородной среды (задачи $G_A(p)$, $p = -1, 0, 1, \ldots$). Заметим, что только задача $G_A(-1)$:

$$\mathbf{z}^{\alpha}_{|\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \partial\mathbf{N}^{(1)}) = 0$$

является нелинейной. Остальные задачи $G_A(0)$, $G_A(1)$, … будут линейными.

Уравнения (35) с учетом (40) приобретут вид

$$\sum_{q=0}^{\infty} \kappa^q \mathbf{A}^{(q)\alpha}_{,\alpha}(\partial\mathbf{Y}, \ldots, \partial^{q+1}\mathbf{Y}) = \mathbf{f}(x) \tag{42}$$

Чтобы решить уравнения (42), воспользуемся разложением

$$\mathbf{Y} = \sum_{p=0}^{\infty} \kappa^p \mathbf{X}^{\{p\}} \tag{43}$$

Подставляя разложение (43) в аргумент функций $\mathbf{A}^{(q)}$ и представляя эти функции в виде ряда по степеням κ, получим

$$\begin{gathered}\mathbf{A}^{(q)\alpha}(\partial\mathbf{Y}, \ldots, \partial^{q+1}\mathbf{Y}) = \sum_{r_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{r_{q+1}=0}^{\infty} \frac{1}{r_1! \ldots r_{q+1}!} \times \\ \times \frac{\partial^{r_1 + \ldots r_{q+1}} \mathbf{A}^{(q)\alpha}(\partial\mathbf{X}^{\{0\}}, \partial^2\mathbf{X}^{\{0\}}, \ldots, \partial^{q+1}\mathbf{X}^{\{0\}})}{\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^1} \ldots \partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_1}^1} \partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^2} \ldots \partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_2}^2} \ldots \partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^{q+1}} \ldots \partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_{q+1}}^{q+1}}} \times \\ \times \sum_{p_1^1=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_{r_1}^1=1}^{\infty} \sum_{p_1^2=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_{r_2}^2=1}^{\infty} \ldots \sum_{p_1^{q+1}=0}^{\infty} \ldots \sum_{p_{r_{q+1}}^{q+1}=1}^{\infty} \times \\ \times \kappa^{p_1^1 + \ldots + p_{r_1}^1 + p_1^2 + \ldots + p_{r_2}^2 + \ldots + p_1^{q+1} + \ldots + p_{r_{q+1}}^{q+1}} \times \\ \times \mathbf{X}^{\{p_1^1\}}_{,\beta_1^1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{X}^{\{p_{r_1}^1\}}_{,\beta_{r_1}^1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{X}^{\{p_1^2\}}_{,\beta_1^2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{X}^{\{p_{r_2}^2\}}_{,\beta_{r_2}^2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{X}^{\{p_1^{q+1}\}}_{,\beta_1^{q+1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{X}^{\{p_{r_{q+1}}^{q+1}\}}_{,\beta_{r_{q+1}}^{q+1}}\end{gathered} \tag{44}$$

Воспользуемся также разложением локальных функционалов по степеням к:

$$\mathbf{N}^{(q)}(\xi, \partial\mathbf{Y}, \ldots, \partial^q\mathbf{Y}) = \sum_{r_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{r_q=0}^{\infty}\frac{1}{r_1!\ldots r_q!}\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_q}\mathbf{N}^{(q)}(\xi, \partial\mathbf{X}^{\{0\}}, \partial^2\mathbf{X}^{\{0\}}, \ldots, \partial^q\mathbf{X}^{\{0\}})}{\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^1}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_1}^1}\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^2}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_2}^2}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^q}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_q}^q}}\times$$

$$\times\sum_{p_1^1=1}^{\infty}\ldots\sum_{p_{r_1}^1=1}^{\infty}\sum_{p_1^2=1}^{\infty}\ldots\sum_{p_{r_2}^2=1}^{\infty}\ldots\sum_{p_1^q=1}^{\infty}\ldots\sum_{p_{r_q}^q=1}^{\infty}\kappa^{p_1^1+\ldots+p_{r_1}^1+p_1^2+\ldots+p_{r_2}^2+\ldots+p_1^q+\ldots+p_{r_q}^q}\times \tag{45}$$

$$\times\mathbf{X}_{,\beta_1^1}^{\{p_1^1\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}_{,\beta_{r_1}^1}^{\{p_{r_1}^1\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}_{,\beta_1^2}^{\{p_1^2\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}_{,\beta_{r_2}^2}^{\{p_{r_2}^2\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}_{,\beta_1^q}^{\{p_1^q\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}_{,\beta_{r_q}^q}^{\{p_{r_q}^q\}}$$

Подставим теперь (44) и (45) в уравнения (42) и приравняем члены при одинаковых степенях к. Тогда получим рекуррентную последовательность задач механики для однородной среды (задачи $D_A(q)$, $q = 0, 1, \ldots$). При этом только задача $D_A(0)$:

$$\mathbf{A}_{,\alpha}^{(0)\alpha}(\mathbf{X}^{\{0\}}) = \mathbf{f} \tag{46}$$

будет нелинейной. Все остальные задачи $D_A(q)$, $q \geq 1$:

$$\left[\frac{\partial\mathbf{A}^{(0)\alpha}(\partial\mathbf{X}^{\{0\}})}{\partial\mathbf{Y}_{,\beta}}\mathbf{X}_{,\beta}^{(q)}\right]_{,\alpha} = \mathbf{f}^{\{q\}}$$

линейны. Входные данные определяются из рекуррентных соотношений

$$\mathbf{f}^{(q)} = \mathbf{Q}_{,\alpha}^{\{q\}\alpha},\quad \mathbf{Q}^{\{q\}\alpha} = \sum_{m+n=q}\sum_{r_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{r_{m+1}=0}^{\infty}\frac{1}{r_1!\ldots r_{m+1}!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{r_1+\ldots r_{m+1}}\mathbf{A}^{(m)\alpha}(\partial\mathbf{X}^{\{0\}}, \partial^2\mathbf{X}^{\{0\}}, \ldots, \partial^{m+1}\mathbf{X}^{\{0\}})}{\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^1}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_1}^1}\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^2}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_2}^2}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^{m+1}}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_{m+1}}^{m+1}}}\sum_{n_1^1+\ldots+n_{r_1}^1+n_1^2+\ldots+n_{r_2}^2+n_1^{m+1}+\ldots+n_{r_{m+1}}^{m+1}=n}\times$$

$$\times\mathbf{X}^{\{n_1^1\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}^{\{n_{r_1}^1\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}^{\{n_1^2\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}^{\{n_{r_2}^2\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}^{\{n_1^{m+1}\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}^{\{n_{r_{m+1}}^{m+1}\}}+ \tag{47}$$

$$+\sum_{r_1=2}^{\infty}\frac{1}{r_1!}\frac{\partial^{r_1}\mathbf{A}^{(0)\alpha}(\partial\mathbf{X}^{\{0\}})}{\partial\mathbf{Y}_{,\beta_1^1}\ldots\partial\mathbf{Y}_{,\beta_{r_1}^1}}\sum_{n_1^1+\ldots+n_{r_1}^1=q}\mathbf{X}_{,\beta_1^1}^{\{n_1^1\}}\otimes\ldots\otimes\mathbf{X}_{,\beta_{r_1}^1}^{\{n_{r_1}^1\}}$$

$$r_1+\ldots+r_{m+1}\geq 1,\quad m\geq 1,\quad n\geq 0$$

Задача $D_A(0)$ (46) является задачей теории эффективного модуля. В ней следует положить

$$\mathbf{X}^{\{0\}} = \mathbf{Y} \tag{48}$$

и после нахождения основного процесса $\mathbf{Y}$ из (39) определим

$$\mathbf{z}^{(0)\alpha} = \mathbf{z}^{(0)\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y}) = \mathbf{z}^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y}+\nabla\mathbf{N}^{(1)})$$

При этом, как видно из (41):

$$\mathbf{A}^{(0)\alpha}(\partial\mathbf{Y}) = \langle \mathbf{z}^{(0)\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y})\rangle = \langle \mathbf{z}^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})\rangle \qquad (49)$$

Аналогично проводится процедура осреднения энтропийного неравенства (13) при учете определяющих соотношений (17). Для этой цели нужно (17) разложить в ряд по степеням κ, как это сделано в (39). Получим

$$\left[\sum_{r=0}^{p+1} \frac{1}{r!} \frac{\partial^r h^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})}{\partial\mathbf{y}_{,\beta_1}\ldots\partial\mathbf{y}_{,\beta_r}} \sum_{q_1+\ldots+q_r=p+1} (\mathbf{N}_{|\beta_1}^{(q_1+1)} + \mathbf{N}_{,\beta_1}^{(q_1)})\ldots(\mathbf{N}_{|\beta_r}^{(q_r+1)} + \mathbf{N}_{,\beta_r}^{(q_r)})\right]_{|\alpha} +$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{p} \frac{1}{r!} \frac{\partial^r h^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})}{\partial\mathbf{y}_{,\beta_1}\ldots\partial\mathbf{y}_{,\beta_r}} \sum_{q_1+\ldots+q_r=p} (\mathbf{N}_{|\beta_1}^{(q_1+1)} + \mathbf{N}_{,\beta_1}^{(q_1)})\ldots(\mathbf{N}_{|\beta_r}^{(q_r+1)} + \mathbf{N}_{,\beta_r}^{(q_r)})\right]_{;\alpha} = \qquad (50)$$

$$= B_{,\alpha}^{(p)\alpha}(\partial\mathbf{Y}, \partial^2\mathbf{Y}, \ldots, \partial^{p+1}\mathbf{Y})$$

при этом

$$\left\langle \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{r!} \frac{\partial^r h^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})}{\partial\mathbf{y}_{,\beta_1}\ldots\partial\mathbf{y}_{,\beta_r}} \sum_{q_1+\ldots+q_r=p} (\mathbf{N}_{|\beta_1}^{(q_1+1)} + \mathbf{N}_{,\beta_1}^{(q_1)}) \otimes \ldots \otimes (\mathbf{N}_{|\beta_r}^{(q_r+1)} + \mathbf{N}_{,\beta_r}^{(q_r)})\right\rangle =$$

$$= \mathbf{B}^{(p)\alpha}(\partial\mathbf{Y}, \partial^2\mathbf{Y}, \ldots, \partial^{p+1}\mathbf{Y})$$

$$q_k \geq 1 \quad (k = 1, \ldots, r)$$

Итак, получаем рекуррентную систему (50), дополняющую (40), для определения локальных функционалов.

Неравенства (13) можно переписать в виде

$$B_{,\alpha}^{(0)\alpha}(\partial\mathbf{X}^{\{0\}}) \leq 0$$

или, подставляя (45) и разложение аналогичное (44):

$$\left[\frac{\partial B^{(0)\alpha}(\partial\mathbf{X}^{\{0\}})}{\partial\mathbf{Y}_{,\beta}}\mathbf{X}_{,\beta}^{(q)}\right]_{,\alpha} \leq \chi^{\{q\}} \qquad (51)$$

где $\chi^{\{q\}}$ подсчитывается аналогично $\mathbf{f}^{\{q\}}$ в (47).

Итак, для теории эффективного модуля имеем задачу (46) с энтропийным неравенством (51). При этом для определения величин $\mathbf{A}^{(0)\alpha}$ требуется на ячейке периодичности решить задачу

$$\mathbf{z}_{,\alpha}^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)}) = 0$$

для нахождения локальных функционалов $\mathbf{N}^{(1)}$. Величины же $B^{(0)\alpha}$ находятся по формуле

$$B^{(0)\alpha}(\partial\mathbf{Y}) = \langle h^{(0)\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y})\rangle = \langle h^{\alpha}(\xi, \partial\mathbf{Y} + \nabla\mathbf{N}^{(1)})\rangle$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00780).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1976. Т. 1. 535с; Т. 2. 573 с.

3. *Клюшников В.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР. 1963. 271 с.
5. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
6. *Liu I.-Shih.* Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 46. № 2. P. 131–148.
7. *Müller I.* Thermodynamics. Boston: Pitman, 1985. 521 p.
8. *Caratheodory C.* Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik // Math. Ann. 1909. Bd. 67. H. 3. S. 355–386.
9. *Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Коннов В.А.* Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. 248 с.
10. *Кишкин Б.П.* Конструкционная прочность материалов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 184 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.05.2003