

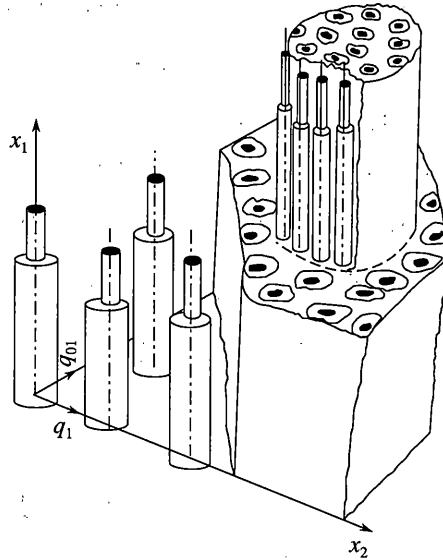
УДК 539.3

© 2003 г. Г.А. ВАНИН

МОМЕНТНАЯ ТЕРМОДИНАМИКА ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

На примере нестационарной теплопроводности в волокнистой среде рассмотрены основы моментной термодинамики необратимых процессов. Термодинамические потенциалы для стационарных процессов в композитах построены ранее с помощью метода аналогий [1]. Термин моментная термодинамика введен для выделения исследований, учитывающих влияние существенных градиентов на состояния тел вблизи их границ, в областях с интенсивной локальной нагрузкой и других задач, которые не рассматриваются в классической термодинамике необратимых процессов. В последней, как известно [2], не привлекаются модели тел к изучению их состояний. В связи с развитием нанотехнологий представляют интерес разработки применительно к новым материалам и учитывающие неоднородное состояние тел как на наноуровне, так и на более низких масштабных уровнях одновременно. Рациональный учет влияния на состояние сложных материалов полей различной физической природы приводит к необходимости привлечения моментной термодинамики для построения разрешающих и других уравнений. В работе сформулированы условия достижения локального равновесия систем, а также с помощью обобщения основных соотношений моментной механики композитов [3] и термодинамических параметров на неоднородные среды, предлагается алгоритм решения задач теории теплопроводности.

1. Рассмотрим процесс теплопроводности в среде с иерархической структурой и упороченной на высшем масштабном уровне множеством непрерывных волокон с цилиндрическими полостями, заполненными другим материалом. Центры волокон образуют гексагональную или тетрагональную решетки. Следующий, более низкий, масштабный уровень структуры в свою очередь также образован множеством регулярно размещенных и одинаково ориентированных непрерывных волокон большего диаметра и имеющих волокнистое строение на более высоком масштабном уровне (фигура). Таким образом, рассматриваемая система имеет так называемую лестничную иерархию структуры [3], когда расстояние между ближайшими большими волокнами на один или более порядков превосходит таковые в структуре более высокого масштабного уровня. Полагаем, что градиент температуры направлен перпендикулярно ориентации волокон. В среде с регулярной структурой на выбранном масштабном уровне определяющий объем, включающий отдельную ячейку среды с одним или несколькими волокнами, является минимальным объемом, содержащим более или менее полные данные об эффективных характеристиках среды. Поэтому предлагаемая теория строится на допущении, что при эволюции системы определяющий объем проходит последовательность равновесных состояний. Последнее ограничение предполагает медленное протекание процессов во времени, а распределение температуры в отдельной ячейке соответствует стационарному процессу теплопроводности. Таким образом, в теории существенно неоднородных сред накладываются более строгие ограничения



на условия существования равновесных состояний, чем это имеет место в классической термодинамике неравновесных процессов [2].

Суммарный тепловой поток в ячейке представим в виде суммы составляющих потоков

$$q = q_0 + q_N + q_* \quad (1.1)$$

где q_0 – поток с постоянным градиентом, q_N – высокоградиентный поток, q_* – поток, рассеянный волокнами. Каждому потоку соответствует свое рассеянное поле. При постоянном потоке возникает двоякопериодический градиент рассеянного температурного поля, который строго вычисляется с помощью эллиптических функций Вейерштрасса [4]. С ростом градиента температуры рассеянное поле более интенсивно затухает при удалении от межфазных границ, что определяет слабое взаимодействие рассеянных полей между смежными волокнами. Поэтому для умеренной объемной концентрации волокон ($\zeta \leq 0.7$) в разложении функций, характеризующих рассеянное отдельным волокном поля, достаточно сохранить только первые члены. В случае поперечного потока температурное поле не зависит от третьей координаты x_1 , поэтому для упрощения вводим новые обозначения переменных и проекции потоков: $x_2 = x$, $x_3 = y$, $q_2 = q_1$, $q_3 = q_{01}$, $z = x + iy$. Температурное поле в определяющем объеме ищется в виде суммы гармонических функций

$$T_0 = \varphi_0(z) + \overline{\varphi_0(z)}, \quad T_a = \varphi_a(z) + \overline{\varphi_a(z)}, \quad T = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} - (1/\kappa)(V + \overline{V}) \quad (1.2)$$

где κ – коэффициент теплопроводности. Индексами 0, a и s или без них обозначаются величины, относящиеся соответственно к материалу, заполняющему полости в волокнах, волокну и матрице. Функция $V(z)$ определяет интенсивность градиента температурного поля. Учитывая условия равновесного состояния в определяющем объеме, ее можно представить в виде

$$V(z) = - \sum_{n=0}^N \frac{z^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)!} (q_1 - iq_{01})_{n+1} \quad (1.3)$$

Член при $n = 0$ соответствует потоку q_0 ; $(q_1 - iq_{01})_2 = q_2 - q_{02} - 2iq_{11}$. В условиях совершенного контакта между волокном и центральным включением ($z \in l_0$) и волокном с

матрицей ($z \in l$) выполняются предельные соотношения на границах

$$T^+ = T^-, \quad (q_1 - iq_{01})^+ = (q_1 - iq_{01})^- \quad (z \in l_0, z \in l)$$

Последние преобразуются к функциональным уравнениям

$$\begin{aligned} (1 + \kappa_0/\kappa_a)\varphi_0(z) + (1 - \kappa_0/\kappa_a)\overline{\varphi_0(z)} &= 2\varphi_a(z) \quad (z \in l_a) \\ (1 + \kappa_a/\kappa)\varphi_a(z) + (1 - \kappa_a/\kappa)\overline{\varphi_a(z)} &= 2\varphi(z) - 2/\kappa V(z) \quad (z \in l) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Допустимые разложения искомых функций

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n, \quad \varphi_a(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k, \quad \varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^{-n} \\ A_k &= -2(q_1 - iq_{01})_{(k)} \mu_k, \quad A_{-k} = -2(q_1 - iq_{01})_{(k)} a_0^{2k} (1 - \kappa_0/\kappa_a)(1 + \kappa_0/\kappa_a)^{-1} \mu_k \\ B_k &= -4(q_1 - iq_{01})_{(k)} (1 + \kappa_0/\kappa_a)^{-1} \mu_k, \quad C_k = -(q_1 - iq_{01})_{(k)} \frac{a^{2k} \lambda_k}{\kappa 2^k k!} \\ \mu_k &= \frac{a^{2b}}{\kappa 2^k k!} (1 + \kappa_a/\kappa)^{-1} \left(1 + \varepsilon \frac{2k(1 - \kappa_a/\kappa)(1 - \kappa_0/\kappa_a)}{(1 + \kappa_a/\kappa)(1 + \kappa_0/\kappa_a)} \right)^{-1} \\ \lambda_k &= \left(\frac{1 - \kappa_0/\kappa}{1 + \kappa_a/\kappa} + \varepsilon \frac{2k(1 - \kappa_0/\kappa_a)}{1 + \kappa_0/\kappa_a} \right) \left(1 + \varepsilon \frac{2k(1 - \kappa_a/\kappa)(1 - \kappa_0/\kappa_a)}{(1 + \kappa_a/\kappa)(1 + \kappa_0/\kappa_a)} \right)^{-1}, \quad \varepsilon^k = (a_0/a)^k \end{aligned} \quad (1.5)$$

где a_0 – соответственно радиус полости и внешней поверхности волокна. Усредненные потоки и градиенты температурного поля определяются по предложенному автором [3] соотношению для производства энтропии

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_0} \int_{F_0} (q_1 T_1 + q_{01} T_{01}) dF &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} (\hat{q}_1 \hat{T}_1 + \hat{q}_{01} \hat{T}_{01})_{(k)} \\ (\hat{q}_1 \hat{T}_1 + \hat{q}_{01} \hat{T}_{01})_{(2)} &= \hat{q}_2 \hat{T}_2 + 2\hat{q}_{11} \hat{T}_{11} + \hat{q}_{02} \hat{T}_{02}, \quad T_i - iT_{0i} = 2\partial T/\partial z \end{aligned} \quad (1.6)$$

где F_0 – площадь ячейки, а перевернутой галочкой отмечены величины, усредненные по F_0 . Используя разложение температуры в степенной ряд, найдем усредненные тепловые потоки

$$(\hat{q}_1 - i\hat{q}_{01})_{(k)} = \frac{1}{F_0} \oint_{L_0} q_n \bar{z}^{(k)} ds$$

Здесь L_0 – внешний контур, ограничивающий F_0 ; q_n – поток по нормали к L_0 . Ограничиваясь тремя первыми функциями, найдем

$$\hat{q}_1 - i\hat{q}_{01} = (1 - \zeta \lambda_1)(q_1 - iq_{01})$$

$$(\hat{q}_1 - i\hat{q}_{01})_{(2)} = 2I_2(1 - \zeta^2 \lambda_2)(q_1 - iq_{01})_{(2)}$$

$$(\hat{q}_1 - i\hat{q}_{01})_{(3)} = I_4(1 - \zeta^3 \lambda_3)(q_1 - iq_{01})_{(3)}, \quad I_{2n} = \frac{1}{F_0} \int x^{2n} dF$$

В принятом приближении установлены определяющие соотношения

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 - i\hat{q}_{01} &= -\kappa_1(\hat{T}_1 - i\hat{T}_{01}) \\ (\hat{q}_1 - i\hat{q}_{01})_{(2)} &= -2I_2\kappa_2(\hat{T}_1 - i\hat{T}_{01})_{(2)} \\ (\hat{q}_1 - i\hat{q}_{01})_{(3)} &= -I_4\kappa_3(\hat{T}_1 - i\hat{T}_{01})_{(3)} \\ \kappa_k &= \kappa(1 - \zeta^k\lambda_k)(1 + \zeta^k\lambda_k)^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Первое уравнение (1.7) представляет закон теплопроводности Фурье для однородного в общем случае анизотропного тела. Последующие зависимости характеризуют влияние более высоких градиентов температуры на величину теплового потока. Это указывает на то, что закон Фурье должен быть уточнен при рассмотрении тепловых процессов в неоднородных средах, когда вводятся усредненные параметры.

2. Для составления соотношений моментной термодинамики в случае неоднородных тел, определим эффективные термодинамические параметры. Внутренняя энергия однородной среды в случае простой теплопроводности при пренебрежении влиянием теплового расширения, будет $U = c_v T$ (c_v – теплоемкость при постоянном объеме). В случае композиционной среды, состоящей из k компонентов, если пренебречь влиянием условий на межфазных границах, эффективная внутренняя энергия

$$\rho \hat{U} = \frac{1}{F_0} \sum_k \int_{F_k} \rho_k c_k T dF$$

где ρ_k – плотность k -фазы. Используя разложение температуры в степенной ряд, в случае трехфазной волокнистой среды при поперечном тепловом потоке, найдем

$$\begin{aligned} \rho \hat{U} &= \rho_1 c_1 \hat{T} + 1/2 I_2 \rho_2 c_2 \langle \nabla^2 T \rangle + (1/4!) I_4 \rho_3 c_3 \langle \nabla^2 \nabla^2 T \rangle + \dots \\ \rho_k c_k &= \rho_0 c_0 \varepsilon^{2k} \zeta^k + \rho_a c_a (1 - \varepsilon^{2k}) \zeta^k + \rho_s c_s (1 - \zeta^k) \end{aligned}$$

Распространяя определение энергии на макрообъем среды, в принятом приближении получим ее локальное значение на более низком масштабном уровне

$$\begin{aligned} \rho U &= \rho_1 c_1 T + 1/2 I_2 \rho_2 c_2 \nabla^2 T + (1/4!) I_4 \rho_3 c_3 \nabla^2 \nabla^2 T + \dots \\ \nabla^2 &= \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Скорость возрастания энтропии \dot{S} определим равенством

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\rho U}{dt} \quad (2.2)$$

Для дальнейшего введем функцию рассеивания, аналогичную диссипативной функции Релея. Последнюю строим, используя обобщения закона теплопроводности в виде (1.7). Учитывая положительную определенность функций, найдем

$$\Psi = -\frac{1}{2F_0} \int_{F_0} (q_1 T_1 + q_{01} T_{01}) dF = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} (\hat{q}_1 \hat{T}_1 + \hat{q}_{01} \hat{T}_{01})_{(k)} \quad (2.3)$$

Используя уравнения (1.7), функцию Ψ представим в виде

$$\Psi = 1/2 [\kappa_1 (\hat{T}_1^2 + \hat{T}_{01}^2) + I_2 \kappa_2 (\hat{T}_1^2 + \hat{T}_{01}^2)_2 + 1/6 I_4 \kappa_3 (\hat{T}_1^{(2)} + \hat{T}_{01}^{(2)})_3 + \dots] \quad (2.4)$$

Другое представление моментной функции рассеивания получено при замене градиентов температуры на соответствующие потоки

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\kappa_1} (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_{01}^2) + \frac{1}{2I_2 \kappa_2} (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_{01}^2) + \frac{1}{6I_4 \kappa_3} (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_{01}^2)_{(3)} + \dots \right]$$

Функции рассеивания для объема $F_* \geq F_0$ построим на основе соотношений (2.3) и (2.4), которые рассматриваются как локальные функции рассеивания [2]:

$$\Psi = 1/2 [\kappa_1 (T_1^2 + T_{01}^2) + I_2 \kappa_2 (T_1^2 + T_{01}^2)_2 + 1/6 I_4 \kappa_3 (T_1^2 + T_{01}^2)_{(3)} + \dots]$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\kappa_1} (q_1^2 + q_{01}^2) + \frac{1}{4I_2 \kappa_2} (q_1^2 + q_{01}^2)_{(2)} + \frac{1}{6I_4 \kappa_3} (q_1^2 + q_{01}^2)_{(3)} + \dots \right] \quad (2.5)$$

$$(q_1^2 + q_{01}^2)_{(2)} = q_2^2 + 2q_{11}^2 + q_{02}^2$$

Первые члены в разложениях функций рассеивания соответствуют безмоментным состояниям. В качестве приложений найденных параметров найдем разрешающие уравнения, краевые условия и представление для суммарного потока тепла. В случае стационарной теплопроводности указанные соотношения можно получить при варьировании по термодинамическим силам [7] потенциала рассеивания

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \int_{F_*} dF \left[\kappa_1 (T_1 \delta T_1 + T_{01} \delta T_{01}) + I_2 \kappa_2 (T_1 \delta T_1 + T_{01} \delta T_{01}) + \frac{1}{6} I_4 \kappa_3 (T_1 \delta T_1 + T_{01} \delta T_{01})_{(3)} + \dots \right] = \\ &= \int_{F_*} dF \left(-\kappa_1 \nabla^2 T + I_2 \kappa_2 \nabla^2 \nabla^2 T - \frac{1}{6} I_4 \kappa_3 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 T + \dots \right) \delta T - \oint_{L_*} q_n \delta T ds + \\ &+ \oint_{L_*} (M_n \delta T_n + M_s \delta T_s) ds + \oint_{L_*} (M_{2n} \delta T_{2n} + 2M_{ns} \delta T_{ns} + M_{2s} \delta T_{2s}) ds + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Суммарный поток по нормали к L_* – контуру F_* равен

$$q_n = -\kappa_1 \partial T / \partial n + I_2 \kappa_2 \nabla^2 \partial T / \partial n - 1/6 I_4 \kappa_3 \nabla^2 \nabla^2 \partial T / \partial n + \dots \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) определяет закон теплопроводности неоднородных сред с симметричной структурой. Из (2.6) вытекает уравнение теплопроводности, найденное с учетом высоких градиентов температурного поля в неоднородной среде

$$-\kappa_1 \nabla^2 T + I_2 \kappa_2 \nabla^2 \nabla^2 T - 1/6 I_4 \kappa_3 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 T + \dots = 0 \quad (2.8)$$

Краевые условия нетрудно получить при рассмотрении контурных интегралов (2.6), где (ρ_0 – радиус кривизны контура):

$$\begin{aligned} M_n &= (\partial^2 / \partial n^2) (I_2 \kappa_2 T - 1/6 I_4 \kappa_3 \nabla^2 T) + (1/(6\rho_0)) I_4 \kappa_3 \times \\ &\times (\partial^3 T / \partial n \partial s^2 - (1/\rho_0^2) \partial \rho_0 / \partial n \partial T / \partial n) + \dots \\ M_s &= (\partial^2 / \partial n \partial s) (I_2 \kappa_2 T - 1/6 I_4 \kappa_3 \nabla^2 T) + \dots \\ M_{2n} &= 1/6 I_4 \kappa_3 \partial^3 T / \partial n^3 + \dots \\ M_{ns} &= 1/6 I_4 \kappa_3 \partial^3 T / \partial n^2 \partial s + \dots \\ M_{2s} &= 1/6 I_4 \kappa_3 (\partial^3 T / \partial n \partial s^2 + (1/\rho_0) \partial^2 T / \partial n^2 - (1/\rho_0) (\partial \rho_0 / \partial n) (\partial T / \partial n)) + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

В случае совершенного контакта двух тел со структурой в первом приближении найдем

$$T^+ = T^-, \quad q_n^+ = q_n^-, \quad M_n^+ = M_n^-, \quad M_s^+ = M_s^- \quad (2.10)$$

Условия совершенного контакта во втором приближении будут

$$T^+ = T^-, \quad q_n^+ = q_n^-, \quad (M_n - 2\partial M_{ns}/\partial s)^+ = (M_n - 2\partial M_{ns}/\partial s)^- \quad (2.11)$$

$$M_s^+ = M_s^-, \quad M_{2n}^+ = M_{2n}^-, \quad M_{2s}^+ = M_{2s}^-$$

Краевые условия свободного края во втором приближении

$$q_n + \partial/\partial s(M_s - \partial M_{2s}/\partial s) = 0, \quad M_n - 2\partial M_{ns}/\partial s = 0, \quad M_{2n} = 0 \quad (2.12)$$

Чтобы получить краевые условия в первом приближении в (2.12) следует отбросить M_{2n}, M_{2s}, M_{ns} , что понижает число уравнений до двух. Нетрудно убедиться, что порядок разрешающего уравнения согласуется с числом краевых условий, что соответствует корректной постановке краевых задач. Решение уравнения (2.8), как было установлено ранее, строится из суммы функций, удовлетворяющих более простым уравнениям [3]:

$$T = \varphi(z) + \sum_k \Psi_k, \quad \nabla^2 \varphi(z) = 0, \quad \nabla^2 \Psi_k - v_k^2 \Psi_k = 0$$

Если в представлении функции рассеивания (2.6) сохранить последующие члены, то решение задачи будет построено в асимптотическом приближении более высокого порядка. Эффективность подобных приближений зависит от скорости убывания последующих членов. В большинстве рассмотренных задач достаточно было сохранить в решении только первые члены. При контакте неоднородных тел с разными определяющими объемами следует ожидать возникновения возмущений в состоянии тел вблизи межфазных границ. В этом случае для уточнения состояний контактирующих тел необходимы дополнительные исследования.

3. Рассмотрим термодинамику нестационарного процесса теплопроводности, пользуясь представлением Фурье [2]. Вводя соответствующий этому представлению потенциал рассеивания Ψ , из уравнения баланса энтропии получим

$$\int_{F_*} dF \left\{ T^2 \rho \dot{S} + T^2 \left[\left(\frac{q_1}{T} \right)_1 + \left(\frac{q_{01}}{T} \right)_{01} \right] - \Psi \right\} = \quad (3.1)$$

$$= \int_{F_*} dF [(\rho \dot{U} + q_2 + q_{02})T - (q_1 T_1 + q_{01} T_{01} + \Psi)]$$

Точкой отмечены производные по времени t . По определению все величины в F_* осреднены в определяющем объеме $F_0 \ll F_*$. Функция Ψ найдена в (2.5), внутренняя энергия – в (2.1), поток q_n – в (2.3). Произведение $q_1 T_1 + q_{01} T_{01}$ определено согласно равенству

$$\frac{1}{F_0} \int_{F_0} (q_1 T_1 + q_{01} T_{01}) dF = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} (\hat{q}_1 \hat{T}_1 + \hat{q}_{01} \hat{T}_{01}) \rightarrow \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} (q_1 T_1 + q_{01} T_{01})_{(k)}$$

Из условия вариации функционала (3.1) по термодинамическим силам (температуре), при фиксированном потоке, находим

$$\delta \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} (q_1 T_1 + q_{01} T_{01})_{(k)} + \delta \Psi = 0, \quad \int_{F_*} dF (\rho \dot{U} + q_2 + q_{02}) \delta T = 0 \quad (3.2)$$

Здесь принято во внимание, что из уравнения баланса внутренней энергии при постоянстве потоков $\rho \dot{U} + q_2 + q_{02} = 0$ следует постоянство $\rho \dot{U}$. Поставляя в (3.2) значения потоков по (2.7) и внутреннюю энергию (2.1), получим основное уравнение теории нестационарной теплопроводности неоднородных тел

$$\begin{aligned} & (\rho_1 c_1 \partial/\partial t - \kappa_1 \nabla^2)^T + I_2 (1/2 \rho_2 c_2 \partial/\partial t + \kappa_2 \nabla^2) \nabla^2 T + \\ & + I_4 ((1/4!) \rho_3 c_3 \partial/\partial t - 1/6 \kappa_3 \nabla^2) \nabla^2 \nabla^2 T + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Преобразуя его по Лапласу, получим

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{\infty} T e^{-pt} dt \\ & (\rho \rho_1 c_1 - \kappa_1 \nabla^2) \theta + I_2 (1/2 p \rho_2 c_2 + \kappa_2 \nabla^2) \nabla^2 \theta + \\ & + I_4 ((p/4!) \rho_3 c_3 + 1/6 \kappa_3 \nabla^2) \nabla^2 \nabla^2 \theta + \dots = \\ & = \rho_1 c_1 T_0 + 1/2 I_2 \rho_2 c_2 \nabla^2 T_0 + (1/4!) I_4 \rho_3 c_3 \nabla^2 \nabla^2 T_0 + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функция T_0 определяет распределение температуры в начальный момент $t = 0$. В соответствии с порядком дифференциального уравнения (3.3) и краевых условий (2.11) или (2.12), необходимо задавать при $t = 0$ кроме начального распределения температуры, начальные значения моментов первого и второго порядка. Если начальное состояние среды можно выразить через ряд функций, удовлетворяющих краевым условиям и уравнению Гельмгольца

$$T_0 = \sum_k D_k \Phi_k, \quad \nabla^2 \Phi_k + v_k^2 \Phi_k = 0 \quad (3.5)$$

то решение краевой задачи возможно найти в виде аналогичного ряда. Решение задачи при заданной начальной температуре в виде ряда (3.5) после обращения преобразования Лапласа будет

$$T = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_k \Phi_k \frac{e^{pt} dp}{p + p_k} = \sum_k D_k \Phi_k e^{-p_k t}$$

$$p_k = (\kappa_1 v_k^2 + I_2 \kappa_2 v_k^4 + 1/6 I_4 \kappa_3 v_k^6) (\rho_1 c_1 - 1/2 I_2 \rho_2 c_2 v_k^2 + (1/4!) I_4 \rho_3 c_3 v_k^4)^{-1}$$

В случае неограниченной области правую часть (3.4) удобно представить в виде преобразования Фурье. В качестве примера рассмотрим одномерный процесс остывания бесконечного стержня ($-\infty < x < \infty$), боковая поверхность которого термоизолирована; вблизи центра при $t = 0$ задано δ -образное распределение температуры. Решение строим в одномоментном приближении

$$(\rho_1 c_1 + 1/2 I_2 \rho_2 c_2 \partial^2/\partial x^2) \partial T/\partial t - (\kappa_1 - I_2 \kappa_2 \partial^2/\partial x^2) \partial^2 T/\partial x^2 = 0$$

Преобразуя уравнение по Лапласу, найдем

$$\begin{aligned} & p(\rho_1 c_1 + 1/2 I_2 \rho_2 c_2 d^2/dx^2) \theta - \kappa_1 d^2 \theta/dx^2 + \\ & + I_2 \kappa_2 d^4 \theta/dx^4 = \rho_1 c_1 T_0 + 1/2 I_2 \rho_2 c_2 d^2 T_0/dx^2 \end{aligned}$$

В качестве δ -образной функции принимаем

$$T_0 = \frac{\theta_0}{\pi} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \sigma_x d\sigma (\operatorname{Re} \alpha > 0)$$

При $\alpha \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ эта функция стремится к функции Дирака [5]. Решение (3.6) ищем в виде

$$\theta = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\infty} L(\sigma) e^{-\alpha\sigma} \cos \sigma_x d\sigma, \quad L = (p + p_0)^{-1}$$

$$p_0 = \sigma^2 (\kappa_1 + I_2 \kappa_2 \sigma^2) \left(\rho_1 c_1 - \frac{1}{2} I_2 \rho_2 c_2 \sigma^2 \right)^{-1}$$

Решение однородного уравнения опускаем. Распределение температуры найдем, совершая обратное преобразование [6]:

$$T = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \theta e^{pt} dp = \frac{\theta_0}{2\pi^2 i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp e^{pt} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha\sigma} \cos \sigma_x}{p + p_0} d\sigma \quad (3.6)$$

Переставляя порядок интегрирования и вычисляя интеграл, найдем

$$T = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \cos \sigma_x \exp \left[-\alpha\sigma - \tau\sigma^2 \left(1 + I_2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) (1 - \beta^2 \sigma^2)^{-1} \right] \quad (3.7)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} (I_2 \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1), \quad \tau = \kappa_1 t / (\rho_1 c_1)$$

В аналитическом виде интеграл выражается через известные функции при $I_2 \kappa_2 = 0$. Действительно, используя интеграл [6]:

$$\int_0^{\infty} dt e^{-(a^2 + 2bt)} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/a} \operatorname{erfc} \frac{b}{\sqrt{a}}$$

получим

$$T = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \cos \sigma_x \exp(-\alpha\sigma - \tau\sigma^2) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(\frac{\alpha^2 - x^2}{4\tau}\right) \times \\ \times \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}\right) \cos\left(\frac{\alpha x}{2\tau}\right) - i \operatorname{erfc}\left(\frac{ix}{2\sqrt{\tau}}\right) \sin\left(\frac{\alpha x}{2\tau}\right) \right]$$

В общем случае необходимо применять численные методы. Рассмотрим изменение во времени распределения температуры в компонентах определяющего объема. В отдельной ячейке коэффициенты разложения являются функциями потоков и их градиентов

$$q_1 - iq_{01} = -\kappa_1 (T_1 - iT_{01}) (1 - \zeta \lambda_1)^{-1}$$

$$(q_1 - iq_{01})_{(2)} = -\kappa_2 (T_1 - iT_{01})_{(2)} (1 - \zeta^2 \lambda_2)^{-1}$$

В одномерном состоянии согласно (3.7)

$$T_k = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \left(\frac{d^k}{dx^k} \cos \sigma x \right) \exp \left[-\alpha\sigma - \tau\sigma^2 \left(1 + I_2 \sigma^2 \kappa_2 / \kappa_1 \right) (1 - \beta^2 \sigma^2)^{-1} \right]$$

Результирующий поток будет

$$q_1 = \frac{\theta_0}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma (\kappa_1 \sigma - I_2 \kappa_2 \sigma^2 + \dots) \sin \sigma x \exp[-\alpha \sigma - \tau \sigma^2 (1 + I_2 \sigma^2 \kappa_2 / \kappa_1) (1 - \beta^2 \sigma^2)^{-1}]$$

В случае иерархической регулярной структуры новый определяющий объем должен содержать, как минимум, одно волокно большего диаметра и находиться в равновесном состоянии. Температурное поле в ячейке в первом приближении определяется как

$$T_a = \Phi_a(z) + \varphi_a(z) + \Psi_a, \quad \Psi_a = \sum_{-\infty}^{\infty} P_n I_n (v_a r) e^{in\theta}$$

$$T = \Phi(\bar{z}) + \overline{\varphi(z)} - (1/\kappa)(V + \bar{V}) + \Psi, \quad \Psi = \sum_{-\infty}^{\infty} Q_n K_n (vr) e^{in\theta}$$

$$v_a^2 = \kappa_{1a} (I_{2a} \kappa_{2a})^{-1}, \quad v^2 = \kappa_1 (I_2 \kappa_2)^{-1}$$

где r, θ – цилиндрические координаты с началом на оси большего волокна, $I_n(x), K_n(x)$ – функции Макдональда [6]. Функции Ψ_a, Ψ характеризуют моментное состояние. При известных коэффициентах разложения функций $\Phi_a(z), \varphi(z)$ на основе уравнения усреднения (1.6), находим эффективные потоки и соответствующие им термодинамические силы, а также усредненные кинетические коэффициенты.

Как видно, в средах с лестничной структурой все вычисления повторяются для каждого уровня аналогично первому приближению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванин Г.А. Градиентная механика и термодинамика многоуровневых композитов // Механика композитных материалов. 1996. Т. 32. № 1. С. 3–20.
2. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 304 с.
3. Ванин Г.А. Моментная механика композитов // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37. № 5–6. С. 621–654.
4. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 302 с.
5. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. М.: ГИТЛ, 1951. 480 с.
6. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1974. 831 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.10.2002