МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 2003

УДК 539.3

© 2003 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ТРЕНИЯ, ИЗНОСА И ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

Максимально упрощена схема контакта тел с упругими мягкими покрытиями с целью возможно большего учета явлений, протекающих в области контакта. Предложена формула для описания нелинейного трения, переходящая в закон трения Кулона при относительно малом контактном давлении и в закон адгезионного трения при относительно большом контактном давлении. С использованием этой формулы рассмотрено явление износа поверхностей покрытий при тепловыделении от трения в условиях неидеального теплового контакта. Найдены условия термосиловой устойчивости процесса износа покрытий.

В близкой постановке задача рассматривалась в [1–4].

**1. Постановка задачи о контакте двух тел с тонкими мягкими покрытиями.** Пусть на одно тело нанесено покрытие *1* начальной толщины $h_{10}$, а на другое тело – покрытие *2* начальной толщины $h_{20}$; механические и теплофизические характеристики покрытий различны; механические характеристики самих тел значительно превосходят механические характеристики покрытий тел так, что тела по сравнению с их покрытиями можно считать абсолютно жесткими; область контакта тел с покрытиями намного превосходит толщины покрытий $h_{10}$ и $h_{20}$ так, что покрытия можно считать относительно тонкими.

Используя "принцип микроскопа" [5], растянем окрестность какой-либо точки внутри области контакта и представим схему контакта тел с покрытиями, как это показано на фиг. 1.

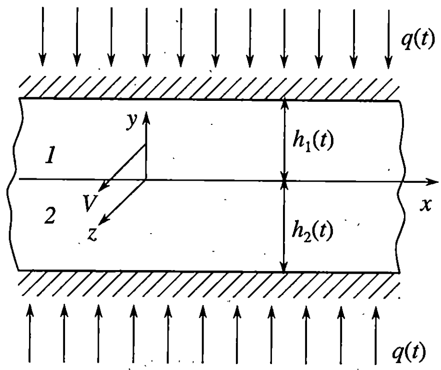
Пусть в момент времени $t = 0$ одно тело, находясь в контакте с другим, начинает двигаться относительно него с постоянной скоростью $V$ в направлении оси $z$. Динамическими эффектами будем пренебрегать. Обозначим через $q(t)$ контактное давление в момент времени $t$, в силу принципа микроскопа его можно считать не зависящим от координат $x$ и $z$.

Допустим, что в области контакта возникают силы трения $\tau(t)$, связанные с давлением $q(t)$ нелинейной зависимостью $\tau = k(q)$. В качестве функции $k(q)$ можно, например, принять

$$k(q) = \tau_*[1 - \exp(-kq/\tau_*)] \tag{1.1}$$

где $\tau_*$ – минимальное из касательных напряжений текучести материалов покрытий, $k$ – коэффициент кулоновского трения пары материалов покрытий. Закон трения в форме (1.1) удобен в том отношении, что при относительно малых значениях давления $q$ он переходит в закон трения Кулона, а при относительно больших значениях давления $q$ – в закон адгезионного трения.

Вследствие трения в области контакта возникает износ поверхностей покрытий. Происходит изменение толщин покрытий за счет износа и термоупругих деформаций.




**Фиг. 1**

Обозначим текущие значения толщин покрытий через $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Износ будем считать абразивным, тогда уменьшение толщин покрытий вследствие износа произойдет соответственно на величины [6]:

$$v_{1*}(t) = -l_{12}V\int_0^t k(q)d\zeta, \quad v_{2*}(t) = l_{21}V\int_0^t k(q)d\zeta \tag{1.2}$$

где $l_{12}(l_{21})$ – коэффициент износостойкости материала покрытия *1* (*2*) при работе в паре с покрытием *2* (*1*).

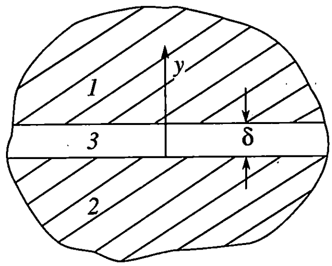
Вследствие трения в области контакта происходит также тепловыделение. Если пренебречь малой долей мощности работы сил трения, идущей на износ покрытий и на приращение мощности их упругой энергии, то количество тепла, выделяемое в единицу времени на единицу площади контакта, можно представить формулой

$$Q = V\tau(t) = Vk(q) \tag{1.3}$$

Износ – медленно протекающий процесс, поэтому будем считать, что функции $q(t)$, $\tau(t)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ являются медленно меняющимися.

**2. Определение контактных температур.** В контактной задаче с учетом износа и тепловыделения от трения интересно определить не только контактное давление, но и контактные температуры поверхностей покрытий. Для этого предварительно, до определения контактного давления (временно считая его заданным), должна быть рассмотрена задача теплопроводности для тел с покрытиями при наличии источников тепла в зоне их контакта, т.е. на оси $x$. Поскольку $q(t)$ изменяется медленно, то процесс теплопроводности можно считать квазистационарным.

На самом деле тепловыделение происходит не на оси $x$, а в тонком слое, примыкающем к оси $x$, толщины $\delta \ll \mathrm{Inf}(h_{10}, h_{20})$, который называют "третьим телом". Теплофизические свойства этого слоя из-за наличия продуктов износа, шероховатостей поверхностей контакта и существования множества мельчайших дефектов вблизи этих поверхностей (микроповреждений и трещин) весьма неоднородны по толщине. Таким образом, чтобы правильно сформулировать граничные условия задачи теплопроводности между покрытиями *1* и *2*, т.е. на оси $x$, нужно сначала решить задачу теплопроводности для неоднородного по теплофизическим свойствам слоя толщины $\delta$ с распределенными в нем источниками тепла (фиг. 2).




**Фиг. 2**

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности

$$[\lambda(y)T'(y)]' = -f(y) \qquad (2.1)$$

где $T(y)$ – температура третьего тела, $\lambda(y)$ – его коэффициент теплопроводности, $f(y)$ – распределенные в нем источники тепла. Поставим на границах третьего тела следующие условия:

$$T = T_2, \quad \lambda(0)T' = \lambda_2 T_2' \quad \text{при} \quad y = 0 \qquad (2.2)$$

$$T = T_1, \quad \lambda(\delta)T' = \lambda_1 T_1' \quad \text{при} \quad y = \delta \qquad (2.3)$$

где $T_1$ и $T_2$ – температуры в покрытиях *1* и *2*, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – коэффициенты теплопроводности их материалов. Условия (2.2) и (2.3) – это обычные условия равенства температур и потоков тепла между разнородными контактирующими телами. Заметим, что $\lambda(\delta) = \lambda_1$, $\lambda(0) = \lambda_2$ в силу непрерывности перехода теплофизических свойств третьего тела к теплофизическим свойствам покрытий *1* и *2* на границах $y = \delta$ и $y = 0$. Заметим еще, что

$$\int_0^\delta f(\eta)d\eta = Q \qquad (2.4)$$

где величина $Q$ определяется формулой (1.3).

Интегрируя уравнение (2.1) один раз и используя вторые условия (2.2) и (2.3), получим

$$\lambda_2 T_2' - \lambda_1 T_1' = Q = Vk(q) \qquad (2.5)$$

Интегрируя уравнение (2.1) вторично и используя первые условия (2.2) и (2.3), получим

$$T_1 - T_2 = -\int_0^\delta f(\eta)d\eta \int_\eta^\delta \frac{dy}{\lambda(y)} + \lambda_2 T_2' \frac{\delta}{\lambda_*} \qquad (2.6)$$

$$\frac{1}{\lambda_*} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \frac{d\eta}{\lambda(\eta)} \qquad (2.7)$$

Оценивая левую часть соотношения (2.6) сверху и снизу, найдем

$$\begin{aligned} &T_1 - T_2 \le \lambda_2 T_2' \delta/\lambda_* \\ &T_1 - T_2 \ge -Q\delta/\lambda_* + \lambda_2 T_2' \delta/\lambda_* = \lambda_1 T_1' \delta/\lambda_* \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Учитывая, что $\delta$ очень мало, примем теперь для $T_1 - T_2$ среднее значение между верхней и нижней оценками. В результате получим известное [7] условие неидеального теплового контакта

$$\lambda_2 T_2' + \lambda_1 T_1' = 2(T_1 - T_2)/r \quad (r = \delta/\lambda_*) \tag{2.9}$$

Величина $r$ называется контактным термосопротивлением. Чем больше $q(t)$, тем плотнее контакт и меньше $r$, т.е. $r = r(q)$, где $r(q)$ монотонно убывающая функция. Ниже для простоты будем считать величину $r$ постоянной.

Приступим теперь к решению задачи теплопроводности для тел с покрытиями. При $y = 0$ будем ставить условия (2.5) и (2.9). Примем, что температура тел $T_0$ постоянна и все время равна температуре окружающей среды, ее можно принять за начало отсчета температур, т.е. положить $T_0 = 0$; значит $T_1 = 0$ при $y = h_1$ и $T_2 = 0$ при $y = -h_2$. Температуры покрытий в области контакта ($y = 0$) обозначим соответственно через $T_1^*$ и $T_2^*$. Тогда из уравнений теплопроводности для покрытий

$$T_1'' = 0, \quad T_2'' = 0 \tag{2.10}$$

найдем для температур в покрытиях выражения

$$T_1 = T_1^*(1 - y/h_1), \quad T_2 = T_2^*(1 + y/h_2) \tag{2.11}$$

С помощью (2.11) удовлетворим, наконец, условиям (2.5) и (2.9) при $y = 0$. В результате для контактных температур $T_1^*$ и $T_2^*$ получим выражения

$$\begin{aligned} T_1^* &= Vk(q)h_1(\lambda_2 r + 2h_2)D^{-1}, \quad T_2^* = Vk(q)h_2(\lambda_1 r + 2h_1)D^{-1} \\ D &= 2(\lambda_1\lambda_2 r + \lambda_2 h_1 + \lambda_1 h_2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Необходимо потребовать, чтобы $T_1^*$ и $T_2^*$ при любых значениях $t$ не достигали температур плавления $T_{1*}$ и $T_{2*}$ материалов соответствующих покрытий. Это при условии, что $q(t) \le q^* < \infty$, накладывает ограничение на скорость $V$, т.е. из равенств $\max_t T_i^* = T_{i*}$ ($i = 1, 2$) может быть найдена некоторая критическая скорость $V_*$, превышение которой приведет в какой-то момент времени к подплавлению одного из покрытий.

Для окончательного суждения о величине контактных температур надо определить контактное давление $q(t)$.

**3. Определение контактного давления.** *1.* Допустим сначала, что функция $q(t)$ задана. Найдем ресурс работы пары тел с покрытиями. Для этого заметим, что должны иметь место равенства

$$v_1(h_1, t) + v_{1*}(t) = -h_{10} + h_1(t), \quad v_2(-h_2, t) + v_{2*}(t) = h_{20} - h_2(t) \tag{3.1}$$

где $v_1(y, t)$ и $v_2(y, t)$ – упругие перемещения точек покрытий по оси $y$, а $v_{1*}(t)$ и $v_{2*}(t)$ определяются формулами (1.2). Относительно $v_1(h_1, t)$ и $v_2(-h_2, t)$ заметим, что с уменьшением $h_1(t)$ и $h_2(t)$ справедливы асимптотические соотношения

$$v_1(h_1, t) = O(h_1), \quad v_2(-h_2, t) = O(h_2) \tag{3.2}$$

(это вытекает из формул (3.10), приведенных ниже).

Предположим, что износ достаточно развит, тогда в силу формул (3.1) и (3.2) можно записать

$$h_{10} - l_{12} V \int_0^t k(q) d\zeta = O(h_1), \quad h_{20} - l_{21} V \int_0^t k(q) d\zeta = O(h_2) \tag{3.3}$$

Определим ресурс работы как время, необходимое для полного истирания одного из покрытий. Из первой формулы (3.3) при $h_1 = 0$ найдем некоторое время $t_1$, из второй формулы (3.3) при $h_2 = 0$ определим некоторое время $t_2$. Тогда ресурс равен

$$t_* = \inf(t_1, t_2) \tag{3.4}$$

Например, при $q(t) \equiv q_* = \text{const}$ имеем

$$t_* = \inf\left[\frac{h_{10}}{l_{12} V k(q)}, \frac{h_{20}}{l_{21} V k(q)}\right] \tag{3.5}$$

2. Пусть теперь функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ заданы, тогда функция

$$\delta(t) = h_{10} + h_{20} - h_1 - h_2 \tag{3.6}$$

определяющая процесс сближения оснований $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий, также задана. Найдем, как изменяется контактное давление $q(t)$.

Вычтем первое соотношение (3.1) из второго, тогда в силу (3.6) получим

$$\upsilon_2(-h_2, t) - \upsilon_1(h_1, t) + \upsilon_{2*}(t) - \upsilon_{1*}(t) = \delta(t) \tag{3.7}$$

Чтобы определить $\upsilon_2(-h_2, t)$ и $\upsilon_1(h_1, t)$, т.е. вертикальные упругие перемещения границ $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий *1* и *2*, воспользуемся, пренебрегая инерционными членами, уравнениями линейной несвязанной термоупругости [8]. Учитывая, что температуры в покрытиях определяются формулами (2.11), а напряженно-деформированное состояние покрытий зависит только от координаты $y$ и времени $t$ (как параметра), будем иметь

$$\begin{gathered} \upsilon_1(y, t) = \frac{\beta_1 T_1^*}{2h_1} y^2 + a_1 y + b_1 h_1, \quad \upsilon_2(y, t) = \frac{\beta_2 T_2^*}{2h_2} y^2 + a_2 y + b_2 h_2 \\ \sigma_{y1} = \gamma_1(a_1 - \beta_1 T_1^*), \quad \sigma_{y2} = \gamma_2(a_2 - \beta_2 T_2^*) \\ \beta_i = \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i}\alpha_i, \quad \gamma_i = \frac{2(1 - \nu_i)}{1 - 2\nu_i} G_i \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $G_i$ и $\nu_i$ – модули сдвига и коэффициенты Пуассона покрытий, $\alpha_i$ – их коэффициенты линейного расширения. Функции времени $a_i$ и $b_i$ определяются из следующих граничных условий

$$\upsilon_1(0, t) = \upsilon_2(0, t) = 0, \quad \sigma_{y1}(0, t) = \sigma_{y2}(0, t) = -q(t) \tag{3.9}$$

В результате найдем

$$\upsilon_1(h_1, t) = -q h_1/\gamma_1 + \beta_1 h_1 T_1^*/2, \quad \upsilon_2(-h_2, t) = q h_2/\gamma_2 - \beta_2 h_2 T_2^*/2 \tag{3.10}$$

Подставим теперь соотношения (1.2), (3.10) в (3.7) и исключим $T_1^*$, $T_2^*$ с помощью формул (2.12). В итоге получим для определения $q(t)$ при известных $h_1(t)$, $h_2(t)$ (а, следовательно, и при известном $\delta(t)$) нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$\left(\frac{h_2}{\gamma_2}+\frac{h_1}{\gamma_1}\right)q-\frac{\beta_2 h_2^2(\lambda_1 r+2h_1)+\beta_1 h_1^2(\lambda_2 r+2h_2)}{2D}Vk(q)+(l_{12}+l_{21})V\int_0^t k(q)d\zeta=\delta(t) \quad (3.11)$$

*3*. Пусть далее $\delta(t)$ имеет порядок упругого перемещения. Это очевидно будет, если рассмотрим относительно малый отрезок времени $0\le t\le t_*<\infty$. В этом случае в уравнении (3.11) можно приблизительно заменить $h_1(t)$ на $h_{10}$ и $h_2(t)$ на $h_{20}$. Положим также, что $k(q)$ имеет вид (1.1), а скорость износа постоянна, т.е. $\delta(t)=\delta_0+\delta_1 t$. Тогда интегральное уравнение (3.11) после перехода к безразмерным величинам

$$q' = kq/\tau_*,\quad t' = Vt/(h_{20}+h_{10})$$
$$\delta_0' = \delta_0/(h_{20}+h_{10}),\quad \delta_1' = \delta_1/V \quad (3.12)$$

(штрихи далее опускаем) и безразмерным комплексам

$$a = \frac{(\gamma_1 h_{20}+\gamma_2 h_{10})\tau_*}{k\gamma_1\gamma_2(h_{20}+h_{10})}$$
$$b = \frac{[\beta_2 h_{20}^2(\lambda_1 r+2h_{10})+\beta_1 h_{10}^2(\lambda_2 r+2h_{20})]V\tau_*}{2D_0(h_{20}+h_{10})} \quad (3.13)$$
$$c = (l_{21}+l_{12})\tau_*,\quad D_0 = 2(\lambda_1\lambda_2 r+\lambda_2 h_{10}+\lambda_1 h_{20})$$

примет вид

$$aq-b(1-e^{-q})+c\int_0^t(1-e^{-q})d\zeta = \delta_0+\delta_1 t \quad (3.14)$$

Заметим, что интегральное уравнение (3.14) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$q'(a-be^{-q}) = -(c-\delta_1)+ce^{-q} \quad (3.15)$$

при начальном условии

$$aq_0-b(1-e^{-q_0}) = \delta_0 \quad (3.16)$$

где $q_0$ – начальное безразмерное контактное давление.

После решения задачи (3.15), (3.16) и определения $q(t)$ безразмерные контактные температуры

$$\vartheta_1 = \frac{T_1^* D_0}{V\tau_* h_{10}(\lambda_2 r+2h_{20})},\quad \vartheta_2 = \frac{T_2^* D_0}{V\tau_* h_{20}(\lambda_1 r+2h_{10})} \quad (3.17)$$

могут быть в соответствии с (2.12) найдены по формуле

$$\vartheta_{1,2} = 1-e^{-q} \quad (3.18)$$

*4*. Рассмотрим случай, когда $q_0$ мало, и будем считать, что в рассматриваемом диапазоне времени давление $q(t)$ также мало. Линеаризуя соотношения (3.15), (3.16) и (3.18), имеем

$$q'(a-b)+cq = \delta_1,\quad q_0(a-b) = \delta_0,\quad \vartheta_{1,2} = q \quad (3.19)$$

Отсюда при $a > b$:

$$q = \frac{\delta_1}{c} + \left(\frac{\delta_0}{a-b} - \frac{\delta_1}{c}\right)\exp\left(-\frac{ct}{a-b}\right) \tag{3.20}$$

Таким образом $q(t)$ меняется в пределах от $\delta_0(a-b)^{-1}$ при $t = 0$ до $\delta_1 c^{-1}$ при $t \to \infty$.

Заметим, что $a > b$ – условие термосиловой устойчивости процесса износа, ибо если $a < b$, то контактное давление $q(t)$ и, следовательно, контактные температуры $\vartheta_{1,2}(t)$ экспоненциально растут по модулю с течением времени.

Пусть теперь $q_0$ велико, и будем считать, что в рассматриваемом диапазоне времени давление $q(t)$ также велико. Упрощая соотношения (3.15), (3.16) и (3.18), имеем

$$q' = -\frac{c-\delta_1}{a}, \quad q_0 = \frac{b+\delta_0}{a}, \quad \vartheta_{1,2} = 1 \tag{3.21}$$

Отсюда при $c > \delta_1$:

$$q = -\frac{c-\delta_1}{a}t + \frac{b+\delta_0}{a} \tag{3.22}$$

Таким образом $q(t)$ меняется в пределах от $(b+\delta_0)a^{-1}$ при $t = 0$ до нуля при $t = (b+\delta_0)(c-\delta_1)^{-1}$.

Заметим, что $c > \delta_1$ является условием отсутствия катастрофического износа, ибо если $c < \delta_1$, то контактное давление линейно растет с течением времени.

5. Рассмотрим при выполнении условий $a > b$ и $c > \delta_1$ общий случай (3.15), (3.16) и (3.18). Решение уравнения (3.15) имеет вид

$$\begin{aligned} t = {} & \left[\frac{a}{c-\delta_1}q_0 + \left(\frac{a}{c-\delta_1} - \frac{b}{c}\right)\left(q_0 + \ln\left|c-\delta_1 - c\mathrm{e}^{-q_0}\right|\right)\right] - \\ & -\left[\frac{a}{c-\delta_1}q + \left(\frac{a}{c-\delta_1} - \frac{b}{c}\right)\left(q + \ln\left|c-\delta_1 - c\mathrm{e}^{-q}\right|\right)\right] \end{aligned} \tag{3.23}$$

где $q_0$ определяется по заданному $\delta_0$ из начального условия (3.16).

Несложный анализ формулы (3.23) показывает, что если

$$\delta_1 = c(1 - \mathrm{e}^{-q_0}) \tag{3.24}$$

то $q = q_0$ и $\vartheta_{1,2} = 1 - \exp(-q_0)$ при всех $t$. Если (режим 1):

$$\delta_1 < c(1 - \mathrm{e}^{-q_0}) \tag{3.25}$$

то $q$ с течением времени монотонно уменьшается от значения $q_0$ при $t = 0$ и выходит на асимптоту $q_1 = -\ln[(c-\delta_1)c^{-1}]$ при $t \to \infty$; аналогичное изменение претерпевает $\vartheta_{1,2}$ в соответствии с формулой (3.18). Если (режим 2):

$$\delta_1 > c(1 - \mathrm{e}^{-q_0}) \tag{3.26}$$

то $q$ с течением времени монотонно возрастает от значения $q_0$ при $t = 0$ и выходит на асимптоту $q_1 = -\ln[(c-\delta_1)c^{-1}]$ при $t \to \infty$; аналогичное изменение претерпевает $\vartheta_{1,2}$ в соответствии с формулой (3.18).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00346) и Минобразования, программа "Университеты России" (грант УР.04.03.005).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Аннакулова Г.К.* Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1990. Т. 11. № 1. С. 24–28.
2. *Александров В.М., Аннакулова Г.К.* Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 154–160.
3. *Александров В.М.* О термосиловом взаимодействии деформируемых покрытий тел с учетом износа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 5. С. 70–75.
4. *Александров В.М.* Абразивный износ тонкого мягкого покрытия при нелинейном законе трения с учетом тепловыделения // Изв. ВУЗов. Сев.-Кавказ. регион. Техн. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 11–13.
5. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. *Хрущов М.М., Бабичев М.А.* Абразивное изнашивание. М.: Наука, 1970. 252 с.
7. *Подстригач Я.С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. ж. 1963. Т. 6. № 10. С. 129–136.
8. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 308 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.02.2003