

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ
УДЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ВНУТРЕННИХ СИЛ
ДЛЯ ОПИСАНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ**

Инварианты тензоров напряжений и деформаций широко применяются в уравнениях состояния при учете физически нелинейных свойств материалов. Эти инварианты не зависят от механических характеристик, что облегчает их нахождение, но затрудняет описание сложных реологических свойств, например, полимерных материалов. Использование формально обратимых во времени инвариантов в качестве аргументов материальных функций и функционалов, отражающих обратимые и необратимые процессы деформирования, накопления повреждений, старения и залечиваемости материалов, создает трудности при нахождении подходящих функций и функционалов.

Ниже показывается, что во многих случаях помимо указанных возможно применение и других инвариантов, а именно: составляющих удельной работы внутренних сил. Исследование этих составляющих при разных видах нагружения и разгрузки позволяет оценить возможность предсказания на основе рассматриваемых теорий различных физических явлений, наблюдаемых в опытах. Следовательно, структурный анализ удельной работы внутренних сил полезен для априорной оценки пределов применимости любой теории.

В работе высказанная идея демонстрируется на примере нелинейной эндосинхронной теории стареющих вязкоупругих материалов, базирующейся на обобщенной модели Кельвина–Фойгта. Ранее аналогичные исследования были выполнены для обобщенной нелинейной модели Максвелла [1]. Указанные модели учитывают нелинейность упругих и вязких свойств материалов и позволяют с любой точностью описывать кривые ползучести и релаксации. Для каждой из них удельная работа внутренних сил представляется суммой пяти составляющих, имеющих различный физический смысл: мгновенно и замедленно обратимых удельных энергий, удельной рассеянной энергии, удельной энергии старения и удельной работы среднего напряжения на объемной деформации свободного температурного расширения. Эти составляющие являются инвариантами и содержат механические характеристики материалов. Ясный физический смысл облегчает их использование в качестве аргументов материальных функций и функционалов. Подтверждением этого служат эксперименты, указанные в работах [1–5], где теория базировалась на обобщенной модели Максвелла. Здесь аналогичное подтверждение приводится на основе обобщенной модели Кельвина–Фойгта с помощью теоретического анализа экспериментальной зависимости скорости звука от уровня ползучести при нагружении и разгрузке образца из наполненного полимерного материала.

1. Введение. Выбор уравнений состояния, устанавливающих зависимость между напряжениями, деформациями, временем, температурой и другими параметрами, имеющими физическую или химическую природу, остается фундаментальной задачей ме-

ханики сплошных сред. Сложность этих уравнений и их математическая структура определяются двумя факторами: стремлением описать все свойства материалов, которые необходимо учитывать при практическом применении теории, и возможностями нахождения материальных функций и функционалов, входящих в уравнения состояния. Использование таких уравнений зависит от сопоставления расходов на их экспериментальную проверку, разработку и внедрение методов решения практических задач – с теми преимуществами, которые обнаруживаются благодаря специфическим особенностям соответствующей теории.

Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов [1] разрабатывалась применительно к гетерогенным средам. Их примером являются наполненные полимерные материалы, образованные эластичной матрицей с большим содержанием жестких частиц-наполнителей. Равномерное распределение частиц в некотором характерном объеме позволяет считать, начиная с этого объема, материал изотропным и квазиоднородным. Соотношение когезионной и адгезионной прочности в таком композите является главным в структурном механизме его деформирования и разрушения. Вязкость и начало микроразрушений объясняется отслоениями наполнителей от связующего, если когезионная прочность значительно превосходит адгезионную. В противном случае материал ведет себя как нелинейно упругий. Макросопротивляемость подобных материалов зависит от технологии их изготовления, поэтому конкретное представление соответствующих уравнений состояния рационально проводить на основе общих соотношений, позволяющих учитывать частные свойства, не меняя общей иерархической структуры модели.

Существенной особенностью наполненных полимерных материалов является замечаемое в опытах накопление повреждений, проявляющееся в изменении их механических характеристик, включая предельные [6, 7]. Предварительное нагружение образцов может сильно изменить их свойства, обнаруживаемые при последующих стандартных испытаниях. Важно отметить, что область применимости линейных вариантов теории вязкоупругости сокращается при росте не только нагрузок, но и времени их действия. Таким образом, накопление повреждений – это сложный процесс, происходящий во времени. На практике при длительной эксплуатации конструкций помимо чисто механических нагружений возможны также климатические воздействия, диффузия газообразных и жидких компонент гетерогенной среды, облучение и другие факторы, приводящие к старению материалов. Поэтому понятна трудность создания теории, описывающей перечисленные свойства.

2. Нелинейная обобщенная модель Кельвина–Фойгта. Как отмечалось выше, первый вариант теории базировался на нелинейной обобщенной модели Максвелла [1]. Вначале была изучена чисто эндохронная модель теории вязкоупругости, в которой учитывалась нелинейность только вязких характеристик материалов [2, 6, 7]. Это приводило к нелинейности операторов, связывающих напряжения и деформации, через посредство так называемых “приведенных” времен. В то же время сохранялась тензорная линейность этих операторов и преемственность ядер релаксации и ползучести, определяемых в рамках линейной теории Больцмана–Вольтерра.

Затем были дополнительно введены функции старения, выражающие нелинейность упругих характеристик полимерных материалов. Слово “старение” использовалось потому, что указанные функции учитывали изменение мгновенного сопротивления материала, подвергавшегося предварительным воздействиям физического или химического характера. В выражения напряжений через деформации функции старения, зависящие от истинного времени, вводили множителями перед интегральными эндохронными операторами, а также в приведенные времена. Это связано со структурой физических моделей Максвелла и Кельвина–Фойгта, в ядрах релаксации и ползучести которых модули упругости содержатся в виде множителей перед экспоненциальными функциями

времени и входят в показатели этих функций. Поэтому зависимость от времени модулей упругости приводит к двоякому влиянию функций старения, меняющих чисто эндохронный вид нелинейной теории вязкоупругости.

Следует заметить, что процесс старения протекает во времени и не может происходить мгновенно. Поэтому функции старения не имеют разрывов в моменты разрывности своих аргументов. При вычислении функций старения значения аргументов в точках разрывов принимаются в виде их пределов “слева”.

Переходя к рассмотрению обобщенной нелинейной модели Кельвина–Фойгта, являющейся логическим дополнением обобщенной нелинейной модели Максвелла, отметим, что обе они образованы набором упругих пружин Гука и вязких демпферов Ньютона. Их последовательное соединение приводит к элементарной модели Максвелла, а параллельное – к элементарной модели Кельвина–Фойгта. Обобщенные модели образуются из элементарных моделей: соединяя параллельно элементарные модели Максвелла, приходят к обобщенной модели Максвелла, а соединяя последовательно элементарные модели Кельвина–Фойгта, приходят к обобщенной модели Кельвина–Фойгта. Нелинейные модели получаются, если коэффициенты упругости и вязкости зависят от инвариантов тензоров напряжений и деформаций, а также параметров поврежденности.

Структура обобщенных линейных моделей Максвелла позволяет представлять ядра релаксации в виде сумм убывающих во времени экспоненциальных функций, а структура обобщенных моделей Кельвина–Фойгта – получать ядра ползучести также с использованием указанных функций. Число коэффициентов, входящих в показатели экспоненциальных функций и стоящих перед ними, зависит от числа удерживаемых элементарных моделей. Задавая приемлемую точность аппроксимации экспериментальных кривых релаксации или ползучести с помощью названных моделей, можно определить все искомые коэффициенты из условий минимума квадратичных отклонений. Соответствующие системы уравнений являются нелинейными, их решения можно искать итерационными методами, например, указанными в численной программе [8]. Практика показала эффективность применения обобщенных моделей Максвелла и Кельвина–Фойгта именно благодаря использованию вычислительной техники.

Уравнения состояния, базирующиеся на нелинейной обобщенной модели Кельвина–Фойгта, записываются аналогично уравнениям, приведенным в [1], где базовой была нелинейная обобщенная модель Максвелла. Разница состоит в представлении ядер релаксации и ползучести. В линейной обобщенной модели Максвелла ядра релаксации задавались суммой убывающих экспоненциальных функций (см. (2.2) в [1]), а ядро ползучести находилось из уравнений линейной теории вязкоупругости, связывающих ядра релаксации и ползучести. В линейной обобщенной модели Кельвина–Фойгта задается ядро ползучести в виде

$$\Pi_{kf}(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{E_k} (1 - e^{-(E_k/\mu_k)t}) \quad (2.1)$$

а ядро релаксации $R_{kf}(t)$ находится из линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, связывающего $R_{kf}(t)$ и $\Pi_{kf}(t)$ [9]. В (2.1) E_k и μ_k – положительные модули упругости и коэффициенты вязкости k -ой элементарной модели Кельвина–Фойгта, E_0 – модуль упругости вырожденной элементарной модели, в которой отсутствует демпфер ($\mu_0 = 0$). Заметим, что наличие первого слагаемого в (2.1) имеет важное значение, поскольку равенство $\Pi_{kf}(0) = 1/E_0$ соответствует появлению мгновенной упругой деформации при мгновенном нагружении.

Сумма, представленная в (2.1), соответствует последовательному расположению элементарных моделей Кельвина–Фойгта, о чем говорилось выше. Считая, что пара-

метры упругости и вязкости являются сложными функциями времени, отражающими изменения напряженно-деформированного состояния, температуры и поврежденности материала, то есть заменяя E_k и μ_k на $E_k\varphi(t)$ и $\mu_k f(t)$, переходим к уравнениям типа изложенных в [1]. Здесь $\varphi(t)$ – функция старения, а $f(t)$ – характеризует изменение коэффициентов вязкости.

При трехмерном напряженно-деформированном состоянии необходимо отдельно рассматривать связь первых инвариантов тензоров напряжений и деформаций, а также связь девиаторов напряжений и деформаций. Эти соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_T(t) + \int_0^t \Pi_{kf1} [t_1(t) - t_1(\tau)] d \left[\frac{\sigma(\tau)}{\varphi_1(\tau)} \right] \\ \mathcal{E}_{ij}(t) &= \int_0^t \Pi_{kf2} [t_2(t) - t_2(\tau)] d \left[\frac{S_{ij}(\tau)}{\varphi_2(\tau)} \right] \\ \sigma &= \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{ii}, \quad \mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \theta, \quad \theta_T = \alpha \Delta T \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно; S_{ij} , \mathcal{E}_{ij} – компоненты девиаторов этих тензоров; σ – среднее напряжение; θ_T – объемная деформация свободного температурного расширения; α – коэффициент линейного температурного расширения; ΔT – перепад между эксплуатационной $T(t)$ и равновесной T_0 температурами; $\Pi_{kf1}(t)$ и $\Pi_{kf2}(t)$ – ядра объемной и сдвиговой ползучести соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера; по повторяющимся индексам i, j здесь и в дальнейшем ведется суммирование от 1 до 3; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – функции объемного и сдвигового старения; $t_1(t)$, $t_2(t)$ – приведенные (эндохронные) времена, имеющие вид

$$t_1(t) = \int_0^t \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} dx, \quad t_2(t) = \int_0^t \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} dx \quad (2.3)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ – функции объемной и сдвиговой вязкости.

Из выражений (2.2) можно получить обратные представления напряжений через деформаций

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \varphi_1(t) \int_0^t R_{kf1} (t_1(t) - t_1(\tau)) d[\theta(\tau) - \theta_T(\tau)] \\ S_{ij}(t) &= \varphi_2(t) \int_0^t R_{kf2} (t_2(t) - t_2(\tau)) d\mathcal{E}_{ij}(\tau) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь R_{kf1} , R_{kf2} – ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно. Эти ядра, как и ядра Π_{kf1} , Π_{kf2} , находятся экспериментально в пределах применимости линейной теории вязкоупругости.

Приведенные времена $t_1(t)$ и $t_2(t)$ находятся с использованием экспериментально определенных функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$. Опыты на ползучесть, релаксацию, растяжение с постоянными скоростями деформаций, включая разгрузку, показывают, что функции $\varphi_m(t)$, $f_m(t)$ ($m = 1, 2$) зависят от инвариантов тензора деформаций, температуры, параметра поврежденности и максимальной деформации, достигнутой перед началом разгрузки [1]. Помимо этого они могут зависеть и от других параметров, отражающих физические и химические процессы в материале, например, от концентрации

жидкостей или газов, уровня поглощенной радиации, степени полимеризации и т.п. Сводить все это влияние к одному какому-либо параметру поврежденности нерационально, так как параметр поврежденности задается кинетическим уравнением, сложность которого возрастает по мере учета все большего числа различных факторов.

В дальнейшем в качестве параметра поврежденности здесь берется величина удельной поглощенной энергии, являющейся частью удельной рассеянной энергии, расходуемой на изменение внутренней структуры материала (см. (3.5), [1]). Эта часть удельной работы внутренних сил имеет выражение, существенно зависящее от физической модели, положенной в основу нелинейной теории термовязкоупругости.

3. Структура удельной работы внутренних сил, соответствующая нелинейной обобщенной модели Кельвина–Фойгта. Выражение удельной работы внутренних сил $A(t)$:

$$A(t) = \int_0^t \sigma_{ij}(\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) = \int_0^t \sigma(\tau) d\theta(\tau) + \int_0^t S_{ij}(\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) \quad (3.1)$$

можно представить в виде, содержащем механические характеристики материала, если выразить деформации через напряжения или напряжения через деформации. В модели Кельвина–Фойгта это удобно сделать первым способом, поскольку в ней в явном виде задаются ядра ползучести. Соответственно, в модели Максвелла, где известны ядра релаксации, проще выразить напряжения через деформации.

С учетом (2.1) представим ядра $\Pi_{kf1}(t)$, $\Pi_{kf2}(t)$, входящие в (2.2), следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{kf1}(t) &= \frac{1}{K_0} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{K_n} [1 - e^{-(K_n/\mu_n)t}] > 0 \\ \Pi_{kf2}(t) &= \frac{1}{G_0} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{G_m} [1 - e^{-(G_m/\eta_m)t}] > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь K_0 , K_n , μ_n и G_0 , G_m , η_m – соответственно положительные характеристики ядер объемной и сдвиговой ползучести.

Из формул (3.2) можно получить выражения для производных, которые потребуются в дальнейшем

$$\begin{aligned} \Pi'_{kf1}(t) &\equiv \frac{d\Pi_{kf1}(t)}{dt} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mu_n} e^{-(K_n/\mu_n)t} > 0 \\ \Pi'_{kf2}(t) &\equiv \frac{d\Pi_{kf2}(t)}{dt} = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\eta_m} e^{-(G_m/\eta_m)t} > 0 \\ \Pi''_{kf1}(t) &\equiv \frac{d^2\Pi_{kf1}(t)}{dt^2} = - \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{\mu_n^2} e^{-(K_n/\mu_n)t} < 0 \\ \Pi''_{kf2}(t) &\equiv \frac{d^2\Pi_{kf2}(t)}{dt^2} = - \sum_{m=1}^M \frac{G_m}{\eta_m^2} e^{-(G_m/\eta_m)t} < 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Учитывая формулы (2.2), (2.3), (3.1), (3.2), находим

$$A(t) = A_T(t) + A_e(t) + A_{ev}(t) + A_*(t) + A_c(t) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
 A_T(t) &\equiv \int_0^t \sigma(\tau) d\theta_T(\tau) \\
 A_e(t) &\equiv \frac{\sigma^2(t)}{2K_0\Phi_1(t)} + \frac{S_{ij}(t)S_{ij}(t)}{2G_0\Phi_2(t)} \\
 A_{e0}(t) &\equiv \frac{\Phi_1(t)}{2} \sum_{n=1}^N K_n \theta_n^2(t) + \frac{\Phi_2(t)}{2} \sum_{m=1}^M G_m \mathcal{E}_{ij(m)}(t) \mathcal{E}_{ij(m)}(t) \\
 A_*(t) &\equiv \sum_{n=1}^N \mu_n \int_0^t f_1(\tau) \dot{\theta}_n^2(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^M \eta_m \int_0^t f_2(\tau) \dot{\mathcal{E}}_{ij(m)}(\tau) \dot{\mathcal{E}}_{ij(m)}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 A_c(t) &\equiv -\frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{\sigma^2(\tau)}{K_0\Phi_1^2(\tau)} + \sum_{n=1}^N K_n \theta_n^2(\tau) \right] d\Phi_1(\tau) - \\
 &- \frac{1}{2} \int_0^t \left[\frac{S_{ij}(\tau)S_{ij}(\tau)}{G_0\Phi_0^2(\tau)} + \sum_{m=1}^M G_m \mathcal{E}_{ij(m)}(\tau) \mathcal{E}_{ij(m)}(\tau) \right] d\Phi_2(\tau) \\
 \theta_n(t) &\equiv \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{f_1(\tau)} e^{-(K_n/\mu_n)(t_1(t)-t_1(\tau))} d\tau
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_n(t) &\equiv \frac{1}{\mu_n f_1(t)} \left[\sigma(t) - \frac{K_n \Phi_1(t)}{\mu_n} \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{f_1(\tau)} e^{-(K_n/\mu_n)(t_1(t)-t_1(\tau))} d\tau \right] \\
 \mathcal{E}_{ij(m)}(t) &\equiv \frac{1}{\eta_m} \int_0^t \frac{S_{ij}(\tau)}{f_2(\tau)} e^{-(G_m/\eta_m)(t_2(t)-t_2(\tau))} d\tau \\
 \dot{\mathcal{E}}_{ij(m)}(t) &\equiv \frac{1}{\eta_m f_2(t)} \left[S_{ij}(t) - \frac{G_m \Phi_2(t)}{\eta_m} \int_0^t \frac{S_{ij}(\tau)}{f_2(\tau)} e^{-(G_m/\eta_m)(t_2(t)-t_2(\tau))} d\tau \right]
 \end{aligned}$$

С помощью функций (3.6) можно представить объемную деформацию $\theta(t)$, девиаторы $S_{ij}(t)$ и их производные по времени

$$\begin{aligned}
 \theta(t) &= \theta_T(t) + \frac{\sigma(t)}{K_0\Phi_1(t)} + \sum_{n=1}^N \theta_n(t) \\
 \dot{\theta}(t) &= \dot{\theta}_T + \frac{1}{K_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{\sigma(t)}{\Phi_1(t)} \right] + \sum_{n=1}^N \dot{\theta}_n(t) \\
 \mathcal{E}_{ij}(t) &= \frac{S_{ij}(t)}{G_0\Phi_2(t)} + \sum_{m=1}^M \mathcal{E}_{ij(m)}(t) \\
 \dot{\mathcal{E}}_{ij}(t) &= \frac{1}{G_0} \frac{d}{dt} \left[\frac{S_{ij}(t)}{\Phi_2(t)} \right] + \sum_{m=1}^M \dot{\mathcal{E}}_{ij(m)}(t)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Анализ структурных составляющих удельной внутренней энергии (3.4), представляемых выражениями (3.5), показывает, что величины $A_e(t)$, $A_{ev}(t)$ и $A_*(t)$ всегда являются неотрицательными, знак величины $A_c(t)$ зависит от знака производных функций старения $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, а знак величины $A_T(t)$ определяется знаками среднего напряжения и свободного температурного расширения или сжатия.

Чтобы понять физический смысл выражений (3.5), заметим, что при равенстве нулю в некоторый момент времени всех компонент тензора напряжений $A_e(t)$ обращается в нуль в тот же момент времени. Поэтому $A_e(t)$ можно назвать “мгновенно обратимой” удельной энергией. Величина $A_*(t)$ – неубывающая функция времени, поскольку ее производная $W_*(t) \equiv dA_*(t)/dt$ неотрицательна при любых процессах нагружения или разгрузки материала. С ее помощью удобно описывать необратимые процессы, что дает основание назвать ее удельной “рассеянной” энергией.

Величина $A_c(t)$ обращается в нуль при любом напряженно-деформированном состоянии, если обе функции старения $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ не меняются во времени, то есть нет процесса старения материала. Поэтому $A_c(t)$ можно назвать удельной энергией “старения”. Функция $A_T(t)$ является удельной работой среднего напряжения на объемной деформации свободного температурного расширения.

И, наконец, величина $A_{ev}(t)$ может быть названа удельной “замедленно обратимой” энергией. Чтобы обосновать такое название, рассмотрим процесс нагружения и последующей разгрузки. Пусть, начиная с момента $t = t_0 > 0$, все компоненты тензора напряжений будут равны нулю. Тогда для $t > t_0$ из (3.6) получим

$$\begin{aligned} \theta_n(t) &= \frac{1}{\mu_n} \int_0^{t_0} \frac{\sigma(\tau)}{f_1(\tau)} e^{-(K_n/\mu_n)(t_1(t) - t_1(\tau))} d\tau \\ \dot{\theta}_n(t) &= -\frac{K_n \phi_1(t)}{\mu_n f_1(t)} \theta_n(t) \\ \mathcal{E}_{ij(m)}(t) &= \frac{1}{\eta_m} \int_0^{t_0} \frac{S_{ij}(\tau)}{f_2(\tau)} e^{-(G_m/\eta_m)(t_2(t) - t_2(\tau))} d\tau \\ \dot{\mathcal{E}}_{ij(m)}(t) &= -\frac{G_m \phi_2(t)}{\eta_m f_2(t)} \mathcal{E}_{ij(m)}(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Если $t_1(t)$ и $t_2(t)$ стремятся к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, то из (3.8) следует, что $\theta_n(t)$, $\dot{\theta}_n(t)$, $\mathcal{E}_{ij(m)}(t)$ и $\dot{\mathcal{E}}_{ij(m)}(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $A_{ev}(t)$ также стремится к нулю при неограниченном возрастании времени. Это показывает, что данная компонента удельной работы внутренних сил после снятия нагрузки убывает, хотя и постепенно. Этим и оправдывается соответствующее название.

Заметим, что если бы в обобщенной модели Кельвина–Фойгта отсутствовал элемент, содержащий только упругую пружину, что соответствует случаю, когда $K_0 = G_0 = \infty$, то из (3.5) имели бы $A_e(t) \equiv 0$, то есть такая физическая модель не могла описывать мгновенно обратимую энергию. Аналогично этому в [1] отмечалось, что элементарная модель Максвелла, отвечающая только одной убывающей экспоненциальной функции в ядре релаксации, не может описывать эффекта обратной ползучести, то есть в ней нет составляющей с удельной замедленно обратимой энергией.

Покажем теперь одно характерное свойство составляющих удельной работы внутренних сил. Пусть $\theta_T = 0$, то есть температура в процессе нагружения и разгрузки оста-

ется равновесной. Тогда после снятия всех напряжений работа внутренних сил будет постоянной, а соответствующая удельная мощность равняться нулю при $t \geq t_0$:

$$dA(t)/dt \equiv W(t) = W_e(t) + W_{ev}(t) + W_*(t) + W_c(t) = 0$$

Очевидно, что $W_e(t) \equiv 0$ при $t \geq t_0$. Выполнимость условия

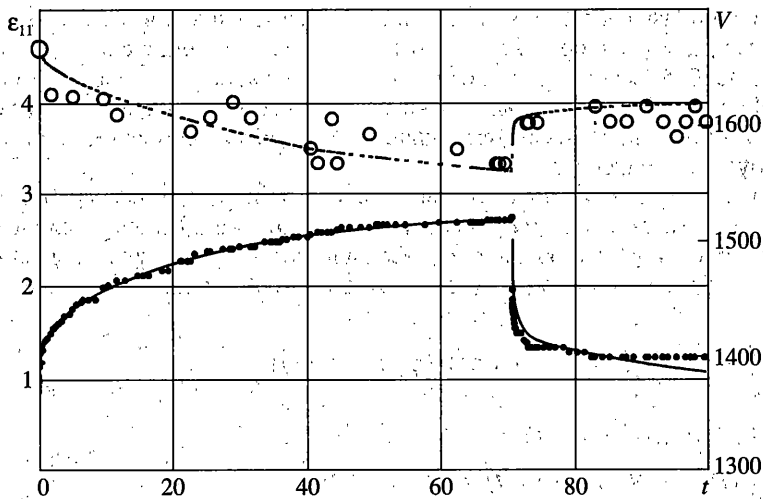
$$W_{ev}(t) + W_*(t) + W_c(t) = 0 \tag{3.9}$$

легко проверить, используя формулы (3.5) и (3.8), после чего можно сделать вывод о возрастании суммы $A_*(t) + A_c(t)$ при убывании замедленно обратимой удельной энергии $A_{ev}(t)$. Тем самым $A_{ev}(t)$ следует рассматривать как аккумулированную энергию, переходящую при полной разгрузке в $A_*(t)$ и $A_c(t)$.

При $d\varphi_1(t)/dt \leq 0$, $d\varphi_2(t)/dt \leq 0$, когда происходит механическое старение, сопровождающееся деструкцией материала, $A_c(t) \geq 0$, $W_c(t) \geq 0$, $A_{ev}(t) \geq 0$, $W_{ev} \geq 0$. Поэтому удельная рассеянная энергия $A_*(t)$ при снятии напряжений и уменьшении ее мощности будет возрастать в ограниченных пределах, поскольку часть энергии $A_{ev}(t)$ переходит в $A_c(t)$. И хотя $A_*(t)$ возрастает, опыты показывают, что после снятия напряжений материалы не разрушаются. Следовательно, необратимое изменение внутренней структуры материалов, включая их разрушение, зависит не только от удельной рассеянной энергии, но и от ее мощности, что учитывается удельной поглощенной энергией [1].

Выражения (3.5) можно переписать, используя формулы (3.2) и (3.3), тогда удельные составляющие работы внутренних сил и их мощности примут вид

$$\begin{aligned} A_e(t) &= \frac{\sigma^2(t)}{2\varphi_1(t)} \Pi_{kf1}(0) + \frac{S_{ij}(t)S_{ij}(t)}{2\varphi_2(t)} \Pi_{kf2}(0) \\ A_{ev}(t) &= -\frac{\varphi_1(t)}{2} \iint_{00}^{tt} \frac{\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)}{f_1(\tau_1)f_1(\tau_2)} \Pi_{kf1}''(2t_1(t) - t_1(\tau_1) - t_1(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 - \\ &- \frac{\varphi_2(t)}{2} \iint_{00}^{tt} \frac{S_{ij}(\tau_1)S_{ij}(\tau_2)}{f_2(\tau_1)f_2(\tau_2)} \Pi_{kf2}''(2t_2(t) - t_2(\tau_1) - t_2(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \\ A_*(t) &= \int_0^t W_*(\tau) d\tau \\ W_*(t) &= \frac{\varphi_1^2(t)}{f_1(t)} \iint_{00}^{tt} \Pi_{kf1}'(2t_1(t) - t_1(\tau_1) - t_1(\tau_2)) d \frac{\sigma(\tau_1)}{\varphi_1(\tau_1)} d \frac{\sigma(\tau_2)}{\varphi_1(\tau_2)} + \\ &+ \frac{\varphi_2^2(t)}{f_2(t)} \iint_{00}^{tt} \Pi_{kf2}'(2t_2(t) - t_2(\tau_1) - t_2(\tau_2)) d \frac{S_{ij}(\tau_1)}{\varphi_2(\tau_1)} d \frac{S_{ij}(\tau_2)}{\varphi_2(\tau_2)} \\ A_c(t) &= \int_0^t W_c(\tau) d\tau \\ W_c(t) &= \frac{\varphi_1^2(t)}{2} \left[-\Pi_{kf1}(0) \sigma^2(t)/\varphi_1^2(t) + \iint_{00}^{tt} \frac{\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)}{f_1(\tau_1)f_1(\tau_2)} \Pi_{kf1}''(2t_1(t) - t_1(\tau_1) - t_1(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \right] + \\ &+ \frac{\varphi_2^2(t)}{2} \left[-\Pi_{kf2}(0) S_{ij}(t)S_{ij}(t)/\varphi_2^2(t) + \iint_{00}^{tt} \frac{S_{ij}(\tau_1)S_{ij}(\tau_2)}{f_2(\tau_1)f_2(\tau_2)} \Pi_{kf2}''(2t_2(t) - t_2(\tau_1) - t_2(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \right] \end{aligned} \tag{3.10}$$



Фиг. 1

Выражения (3.10) могут в ряде случаев оказаться удобнее, чем (3.5), поскольку содержат в явном виде экспериментально определяемые функции ползучести, а также их первые и вторые производные. Например, из нового представления $A_{ev}(t)$ видно, что скорость обратной ползучести после начала разгрузки будет зависеть от кривизны кривой ползучести. Это обстоятельство подтверждается опытными данными. Аналогичные замечания при новых представлениях можно сделать относительно других составляющих удельной работы внутренних сил.

4. Зависимость скорости звука от уровня ползучести при нагружении и разгрузке образца из наполненного полимерного материала. Продемонстрируем полезность использования составляющих удельной работы внутренних сил на примере определения зависимости скорости звука от обратимых и необратимых изменений внутренней структуры материалов. Рассмотрим результаты эксперимента на ползучесть образца, сделанного из изотропного и квазиоднородного наполненного полимерного материала, объем которого на 75% состоял из кристаллических частиц-наполнителей и на 25% – из каучукообразного связующего. Образец имел размеры рабочей части, где замерялись деформации: $10 \times 40 \times 55$ мм. В процессе его осевого растяжения постоянным напряжением $\sigma = 0.3$ МПа в течение 70 мин и последующей разгрузки в течение 30 мин замерялись осевая и поперечная деформации, позволяющие находить объемную деформацию $\theta(t)$. Одновременно в поперечном направлении создавались ультразвуковые колебания с частотой 100 кГц и замерялась скорость звука в течение всего процесса ползучести и разгрузки. На фиг. 1 темными точками показаны величины осевой деформации $\epsilon_{11}(t)$ [%], а светлыми точками – величины скорости звука $V(t)$ [м/с], менявшиеся с течением времени.

Видно, что рост деформации ползучести, продолжавшийся до 70 минуты, сопровождался монотонным падением скорости звука. После быстрого снятия нагрузки при $t = 70$ мин осевая деформация почти мгновенно упала до некоторого уровня и затем начался процесс обратной ползучести. Уменьшение деформации сопровождалось вначале быстрым ростом скорости звука, после чего рост замедлялся, оставаясь монотонным. Эксперимент продолжался в течение 100 мин при температуре $T = 31^\circ\text{C}$.

Была поставлена задача теоретически описать зависимость скорости звуковой волны от уровня ползучести, включая процесс разгрузки. Анализ изменения деформации

при разгрузке показывает необходимость учитывать мгновенно и замедленно обратимые составляющие удельной энергии. Аналогичное изменение скорости звука свидетельствует о необходимости учитывать также поглощенную удельную энергию. Действительно, из фиг. 1 видно, что при одинаковых величинах деформации до и после разгрузки скорости звука различаются, следовательно, наблюдается необратимое изменение внутренней структуры материала.

Рассматриваемая нелинейная теория отвечает перечисленным требованиям и поэтому была положена в основу проведенных исследований. Вначале выводилось соотношение, связывающее напряжение и деформацию на фронте ультразвуковой волны. При одноосном растяжении образца напряжением $\sigma_{11}(t)$ из (2.2) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{1}{(1+\nu(t))} \int_0^t \Pi_2(t_2(t) - t_2(\tau)) d[\sigma_{11}(\tau)/\varphi_2(\tau)] \\ \nu(t) &= -\varepsilon_{22}(t)/\varepsilon_{11}(t), \quad \varepsilon_{33}(t) = \varepsilon_{22}(t) \\ \theta(t) &= \varepsilon_{11}(t)(1 - 2\nu(t)), \quad \sigma_{22}(t) = \sigma_{33}(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

По условиям эксперимента

$$\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}^0 [h(t) - h(t - t_p)], \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\sigma_{11}^0 = 0.3$ МПа, $t_p = 70$ мин – момент начала разгрузки.

Пренебрегая изменением характеристик материала $\varphi_2(t)$ и $t_2(t)$ за время прохождения ультразвуковой волны, получим приращение напряженно-деформированного состояния $\delta\sigma_{11}$, $\delta\sigma_{22}$, $\delta\sigma_{33}$, $\delta\varepsilon_{11}$, $\delta\varepsilon_{22}$, $\delta\varepsilon_{33}$, накладывающегося на основное напряженно-деформированное состояние при ползучести. В направлении распространения волны имеем

$$\delta\sigma_{22}(t) = \varphi_2(t) \int_0^t R_2(t_2(t) - t_2(\tau)) d[\delta\varepsilon_{22}(\tau)(1 + \nu_8(\tau))] \quad (4.3)$$

Оно соответствует одноосному характеру приращения напряженного состояния в поперечном направлении, когда $\delta\varepsilon_{11}(t) = \delta\varepsilon_{33}(t) = -\nu_8(t)\delta\varepsilon_{22}(t)$. Если коэффициент Пуассона в момент времени $t = t_0$ одинаков при совместном осевом и поперечном растяжении образца, то есть отсутствует деформационная анизотропия материала при прохождении ультразвуковой волны, то $\nu_8(t_0) = \nu(t_0)$. В противном случае необходимы дополнительные экспериментальные исследования.

Учитывая малое время прохождения ультразвуковой волны, представим величину приращения деформации $\delta\varepsilon_{22}$ в виде

$$\delta\varepsilon_{22}(t) = \delta\varepsilon_{22}^0 [H(t - t_0) - H(t - t_0 - \varepsilon)], \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Здесь ε – время существования ультразвуковой волны, возникающей при $t = t_0$.

Подставляя (4.4) в (4.3) и полагая $t = t_0 + \Delta$, где $0 \leq \Delta < \varepsilon$, получим выражение для $\delta\sigma_{22}(t_0 + \Delta)$, после чего искомое соотношение на фронте ультразвуковой волны находится предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\delta\sigma_{22}(t_0) = \delta\varepsilon_{22}^0 \varphi_2(t_0) R_0(0) (1 + \nu_8(t_0)) \quad (4.5)$$

Используя известное выражение скорости звука V через модуль упругости и плотность материала, с учетом (4.5) и равенства $v_s(t_0) = v(t_0)$ получим

$$V(t_0) = \sqrt{\Phi_2(t_0)R_2(0)(1 + v(t_0))/\rho(t_0)} \quad (4.6)$$

Здесь $\rho(t_0)$ – плотность материала в момент $t = t_0$. Нормируем функцию старения соотношением $\Phi_2(0) = 1$ и учитываем, что $\rho(0) = \rho(t_0)(1 + \theta(t_0))$. Тогда скорости звука в моменты $t = t_0$ и $t = 0$ будут связаны следующим образом:

$$V(t_0) = V(0)\sqrt{\Phi_2(t_0)(1 + v(t_0))(1 + \theta(t_0))/(1 + v(0))} \quad (4.7)$$

В ходе эксперимента замерялись продольная $\epsilon_{11}(t_0)$ и поперечная $\epsilon_{22}(t_0)$ деформации, после чего находились переменные значения коэффициента Пуассона $\nu(t_0) = -\epsilon_{22}(t_0)/\epsilon_{11}(t_0)$ и объемной деформации $\theta(t_0) = \epsilon_{11}(t_0)(1 - 2\nu(t_0))$. Замеряя скорости звука $V(0)$ и $V(t_0)$, из (4.7) определялась функция старения

$$\Phi_2(t_0) = V^2(t_0)(1 + v(0))/V^2(0)(1 + v(t_0))(1 + \theta(t_0)) \quad (4.8)$$

Этот способ нахождения функции старения отличается от указанного в работе [3], где требовалось исследование устойчивости тонкостенных оболочек. Описанный здесь опыт проще и предпочтительнее для идентификации $\Phi_2(t)$.

Зная функции $\epsilon_{11}(t)$, $\nu(t)$, $\theta(t)$, $\Phi_2(t)$, $\sigma_{11}(t)$, из уравнения (4.1) методом итераций находились аналитические представления сдвиговой ползучести $\Pi_2(t)$ и приведенного времени $t_2(t)$. Функция $\Pi_2(t)$ разыскивалась в виде (3.2) при $M = 8$ на интервале $0 \leq t \leq 70$ мин, а приведенное время вначале полагалось пропорциональным истинному времени, то есть $t_2(t) = kt$, где k – неизвестная положительная константа. Из условий наилучшего приближения кривой ползучести, включая область разгрузки, используя алгоритм [8], находилось значение “ k ” и коэффициенты G_0 , G_m , G_m/η_m , входящие в $\Pi_2(t)$.

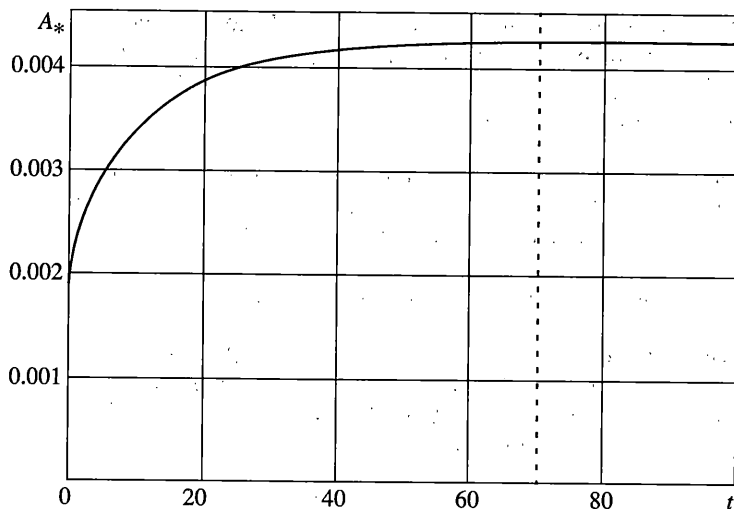
Дальнейшее уточнение проводилось введением в функцию $f_2(t)$ из (2.3) множителя, учитывающего различное сопротивление материала при активном нагружении и разгрузке (см. [6]). В итоге были получены следующие приближенные выражения для $\Pi_2(t)$ и $t_2(t)$:

$$\begin{aligned} \Pi_2(t) = & \frac{1}{1510} + \frac{1}{1590}(1 - e^{-4.213t}) + \frac{1}{41}(1 - e^{-28.19t}) + \frac{1}{62.7}(1 - e^{-1.363t}) + \frac{1}{90.8}(1 - e^{-0.071t}) + \\ & + \frac{1}{156 \times 10^3}(1 - e^{-0.147t}) + \frac{1}{24.2}(1 - e^{-0.007t}) + \frac{1}{998}(1 - e^{-0.926 \times 10^{-5}t}) + \frac{1}{62.2}(1 - e^{-1.115 \times 10^{-6}t}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$t_2(t) = \begin{cases} t \times 6.09, & 0 \leq t \leq t_p = 70 \text{ мин} \\ t_p \times 6.09 + \int_{t_p}^t \frac{d\tau}{0.85 + 0.15(\epsilon_{11}(\tau)/\epsilon_{\max})^{0.65}}, & t_p < t \leq 100 \text{ мин} \end{cases} \quad (4.10)$$

Здесь ядро ползучести $\Pi_2(t)$ представлено в 1/МПа, t – в минутах, $\epsilon_{\max} = 0.027 = \max \epsilon_{11}(s)$ при $0 \leq s \leq t_p = 70$ мин. С учетом (4.9), (4.10) деформация $\epsilon_{11}(t)$ вычислялась по формуле (4.1). Ее значения показаны на фиг. 1 сплошной линией, которая хорошо согласуется с данными экспериментов.

Для аналогичного выражения $\Phi_2(t)$ предварительно находилась величина удельной поглощенной энергии $A_d(t)$. Она также определялась приближенно. На фиг. 2 показана зависимость удельной рассеянной энергии $A_*(t)$ [МПа] от времени, вычисленная по



Фиг. 2

формуле (3.5), в которой не учитывалась часть рассеянной энергии, возникающая из-за объемной деформации. Из фиг. 2 видно, что производная от $A_*(t)$ пренебрежимо мала, начиная с $t = 41$ мин, следовательно, удельная поглощенная энергия $A_a(t)$, зависящая от мощности удельной рассеянной энергии [1], начиная с этого времени остается постоянной.

Функция $\varphi_2(t)$ принималась зависящей от объемной деформации $\theta(t)$ и удельной поглощенной энергии $A_a(t)$, которая отождествлялась с $A_*(t)$. Наилучшее приближение к опытным данным было получено при

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} e^{-4.778\theta(t) - 8.97A_*(t)}, & 0 \leq t \leq t_s \\ e^{-4.778\theta(t) - 8.97A_*(t_s)}, & t_s < t \leq 100 \text{ мин} \end{cases} \quad (4.11)$$

Здесь $t_s = 41$ мин, $A_*(t)$ выражается в МПа. Скорость звука $V(t)$, вычисленная с учетом формул (4.7), (4.11), представлена пунктирной линией на фиг. 1. Видно, что эта линия качественно и количественно хорошо согласуется с опытными данными.

Заметим, что невзирая на использование приближенных аналитических представлений деформации ползучести и функции старения, результаты расчетов оказались достаточно точными для решения поставленной задачи.

5. Заключение. Показана целесообразность использования составляющих удельной работы внутренних сил для описания обратимых и необратимых изменений внутренней структуры материалов. Это наглядно продемонстрировано в опыте на ползучесть с разгрузкой путем представления зависимости скорости ультразвуковой волны от первого инварианта тензора деформаций и удельной поглощенной энергии. Указан новый метод нахождения функции старения, более простой, чем ранее известные.

Автор выражает благодарность В.Э. Апетьяну за проведение экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00667).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов // Изв. АН. МТТ. 2002. № 4. С. 63–76.
2. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры // Изв. АН. МТТ. 1999. № 5. С. 189–205.
3. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Особенности сопротивления вязкоупругих материалов при потере устойчивости тонкостенных конструкций // Тр. XXXVI Междунар. семинара “Актуальные проблемы прочности”. Витебск: Витебский гос. технол. ун-т. Ч. II. 2000. С. 428–433.
4. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Использование функции рассеянной энергии для описания деформаций и разрушения полимерных конструкций // Упругость и неупругость. Материалы Междунар. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 90-летию А.А. Ильюшина. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 250–262.
5. *Апетьян В.Э., Быков Д.Л.* Определение нелинейных вязкоупругих характеристик наполненных полимерных материалов // Космонавтика и ракетостроение. 2002. № 3(28). С. 202–214.
6. *Быков Д.Л.* Об учете поврежденности в наполненных полимерных материалах // Изв. АН. МТТ. 1998. № 1. С. 19–28.
7. *Bykov D.L.* Modelling damage accumulation in filled polymers // Fatigue and Fracture of Eng. Materials and Structures. 1999. V. 22. № 11. P. 981–988.
8. *Polak E.* Optimization; Algorithms and Consistent Approximations. N.Y.: Springer-Verlag, 1997. 779 p.
9. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

Королев

Поступила в редакцию
3.03.2003