МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2003

УДК 539.214

© 2003 г. А.В. ГНОЕВОЙ, В.М. ЧЕСНОКОВ

БИНГАМОВСКАЯ СРЕДА КАК ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Приводится краткий исторический обзор развития представлений о механических свойствах бингамовских сред и их механических моделях применительно к задачам исследования течений таких сред в гидродинамическом смысле. Вводятся понятия агрегатных состояний бингамовских сред, связывающих реологические свойства таких сред с их внутренним напряженным состоянием. Получены критерии определения агрегатных состояний бингамовских сред.

1. Известно, что тело Шведова–Бингама [1] является телом, обладающим несколькими фундаментальными свойствами: вязкостью и пластичностью. Реологическое уравнение тела Шведова–Бингама для чистого сдвига имеет следующий вид [2]:

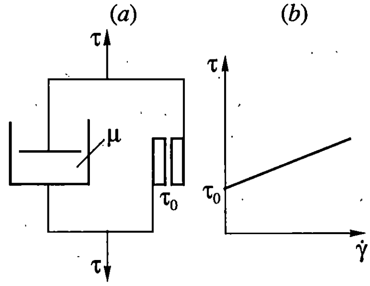
$$\tau = \tau_0 + \mu\dot{\gamma} \tag{1.1}$$

На фиг. 1 приведены механическая модель и кривая течения соответствующие существовавшим представлениям о свойствах бингамовской среды [2].

Вещества, свойства которых соответствуют телу Шведова–Бингама, образуют класс веществ, называемых телами Шведова–Бингама или чаще просто бингамовскими средами. Среды, обладающие вязкостью и пластичностью в различной степени и образующие более широкий класс веществ чем бингамовске среды, называют вязкопластичными средами. Реологические свойства бингамовских сред проявляются и, следовательно, экспериментально и инструментально могут быть выявлены только в процессе их механического движения относительно неподвижного измерительного элемента прибора или наоборот, движения измерительного элемента прибора относительно неподвижной среды. Сказать что-либо о свойствах покоящейся в некоторой емкости среде невозможно.

Изучением реологических свойств сред, обладающих вязкостью и пластичностью, впервые начали заниматься Шведов, Бингам, Бочер, Рейнер, Скотт–Блэр [1]. Ими экспериментально изучалось поведение некоторых бингамовских сред, например, масляных красок, суспензий глины, пищевых масс, для случаев чистой деформации сдвига. Было установлено, что течение таких сред начинается только с того момента, когда касательное напряжение τ в точках среды достигает некоторой определенной величины, которая была названа предельным напряжением сдвига τ_0 или пределом текучести. При дальнейшем увеличении касательного напряжения движение этих сред происходило в соответствии с законом вязкого трения Ньютона.

Необходимо отметить следующий очень важный момент в изучении бингамовских сред. Впервые на возможность получения уравнений, описывающих течение вязких жидкостей с пределом текучести, и каким именно образом эти уравнения могут быть получены, указал Б. Сен-Венан [3]. Сами уравнения были получены позднее Г. Генки [4], а соотношения между компонентами напряжений и компонентами скоростей деформации, предложенные Сен-Венаном для случая сложного напряженного состояния таких сред [3], явились обобщением экспериментального соотношения (1.1), установленного Бингамом и Шведовым для чистого сдвига.



Фиг. 1

Предложенные Сен-Венаном соотношения между компонентами напряжений и компонентами скоростей деформации, позволили записать обобщенное реологическое уравнение или обобщенную реологическую модель бингамовской среды в следующем виде:

$$T = \tau_0 + 2\mu H \tag{1.2}$$

$$T = \sqrt{1/6[(\tau_{xx}-\tau_{yy})^2 + (\tau_{yy}-\tau_{zz})^2 + (\tau_{zz}-\tau_{xx})^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \tag{1.3}$$

$$H = \sqrt{1/6[(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx})^2] + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь T, H – интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации сдвига; τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} – компоненты тензора напряжений; ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz} – компоненты тензора скоростей деформации. Выражения (1.3) и (1.4) характеризуют напряженное и деформированное состояния среды в произвольной ее точке.

В соответствии с обобщенной реологической моделью среды (1.2), если интенсивность напряжений во всех ее точках меньше предельного напряжения сдвига $T < \tau_0$, то среда будет находиться в состоянии покоя (фиг. 1, *в*)).

Течение среды начнется, когда интенсивность напряжений T в некоторых ее точках будет равна или превысит значение предельного напряжения сдвига τ_0, т.е. будет выполняться условие $T \geq \tau_0$ [5]. Область текущей среды, в точках которой $T > \tau_0$, называют областью сдвигового или почти вязкого течения. В этой области проявляются как вязкие, так и пластические свойства среды. Это хорошо известно из экспериментов на ротационных вискозиметрах. С помощью ротационных вискозиметров определяют вязкость μ и предельное напряжение сдвига τ_0, соответствующие каждой конкретной бингамовской среде [2].

Область текущей среды, в точках которой $T = \tau_0$, называют областью ядра или пластического течения. В этой области проявляются только пластические свойства среды, а вязкие свойства здесь не проявляются [5, 6].

Точки среды, лежащие на поверхности, разделяющей области вязкого и пластического течений, образуют внутреннюю границу течения среды. В точках среды на границе вязкого течения интенсивность напряжений равна предельному напряжению сдвига $T = \tau_0$. Таким образом, в текущей среде нет областей (точек среды), где бы интенсивность напряжений была меньше предельного напряжения сдвига $T < \tau_0$.

На основании сказанного можно представить следующие возможные агрегатные состояния бингамовской среды в зависимости от ее внутреннего напряженного состояния:

покой при $T < \tau_0$ во всех точках среды;

сдвиговое или *вязкое течение* при $T > \tau_0$ во всех точках среды;

пластическое течение при $T = \tau_0$ во всех точках среды;

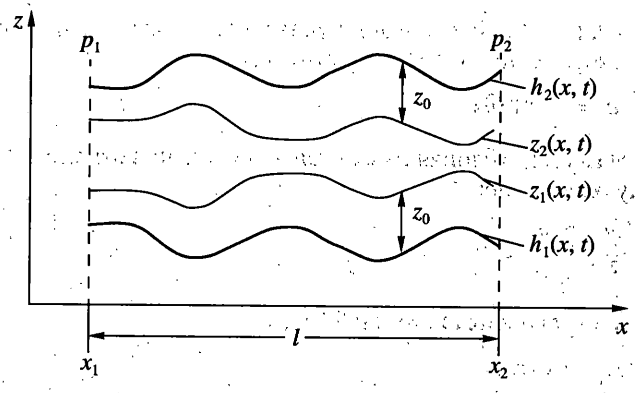
вязкопластическое течение с образованием двух областей течения: область вязкого течения в точках среды, где $T > \tau_0$, и область пластического течения в точках среды, где $T = \tau_0$.

Подобное представление об областях течения, агрегатном состоянии и свойствах бингамовских сред, которые проявляются по-разному в зависимости от их внутреннего напряженного состояния, появилось сравнительно недавно в процессе совместной работы авторов [5]. Далее приводятся некоторые из этих результатов.

Долгое время, начиная с работы Г. Генки [4], было принято считать, что в текущей среде, наряду с областью сдвигового течения, существует и область где интенсивность напряжений T может быть меньше или равна предельному напряжению сдвига τ_0 [2, 4, 7–10]. Интенсивность скоростей деформации H в такой области считалась равной нулю. Таким образом, еще до решения задачи по определению поля скоростей, полагалось, что в среде имеется область, где $T = \tau_0$, $H = 0$, и которая движется как твердое тело. Эта область получила название "квазитвердой (жесткой) области или ядра". При этом область, в которой могло быть $T = \tau_0$, $H \neq 0$ (пластическая область), не рассматривалась.

Большое влияние на понимание авторами физической картины течения бингамовских сред оказали работы М. Рейнера [2, 11]. В работе [11] дан подробный анализ уравнений Г. Генки, области их применения и, своего рода, ключ к пониманию поведения сред, имеющих несколько фундаментальных свойств. Рейнером, в частности, отмечается, что "в соответствии с третьей аксиомой реологии, реологическое уравнение более простого тела (низшего по иерархии) может быть получено из реологического уравнения менее простого тела (высшего по иерархии), если положить какие-либо константы последнего равными нулю". Это значит, например, что из реологического уравнения тела Шведова–Бингама (1.1) при $\tau_0 = 0$ можно получить реологическое уравнение вязкой жидкости, а при $\mu = 0$ – реологическое уравнение тела Сен-Венана (пластического тела). В этой же работе Рейнер развивает свою мысль далее: "В соответствии с третьей аксиомой реологии, если известно решение задачи для бингамова тела, можно получить решение аналогичной задачи для сен-венанова тела, полагая величину η_p равной нулю". Здесь под η_p Рейнером понимается коэффициент динамической вязкости среды или, как его называют в реологии, коэффициент пластической вязкости.

Анализ многочисленных научных работ, и особенно, работ Сен-Венана [3], Генки [3], Липскомба и Денна [12], Рейнера [2, 11] и других исследователей, а также собственные попытки решать более сложные, чем одномерные задачи о течении бингамовских сред с использованием существующего представления о модели среды как о теле с квазитвердым ядром, показал несоответствие этих решений третьей аксиоме реологии [2]. Это несоответствие состояло в том, что из полученных решений не следовали решения для пластического течения, если приравнивать к нулю коэффициент пластической вязкости среды $\mu = 0$. Позднее авторами было установлено, что этот результат и не мог быть иным, так как при пластическом течении ядро должно занимать всю область течения, а при квазитвердом ядре, как это будет показано далее, это возможно



Фиг. 2

только в некоторых частных случаях (ядро, прилипшее к стенке канала, или одномерные по скоростям течения).

Таким образом, существующее представление о ядре течения бингамовской среды, как о твердом или квазитвердом теле, противоречит как самой модели этой среды, так и третьей аксиоме реологии. Покажем это на следующем примере.

2. Пример. Рассмотрим задачу о плоском течении бингамовской среды в канале с произвольно деформируемыми стенками (фиг. 2). Считается, что течение среды вызвано как движением стенок самого канала, так и перепадом давления на его торцах.

Положим, как это было принято ранее, что существует область, где бингамовская среда движется как твердое тело. Задаваясь законом деформирования стенок $h_1(x, t)$ и $h_2(x, t)$, можем найти проекции скорости их точек на оси x и z. В качестве внешних граничных условий используем условия прилипания среды к стенкам канала. Предполагая, что на некоторых расстояниях $z_1(x, t) - h_1(x, t)$ и $h_2(x, t) - z_2(x, t)$ от стенок канала имеется область течения, где среда движется как твердое тело, сформулируем граничные условия на границах раздела сдвиговых и жесткой областей. Поскольку напряжения в жесткой области неопределенны [13], то внутренними граничными условиями будут только условия непрерывности скорости течения на границах раздела областей.

Все сказанное позволяет сформулировать граничные условия задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&z = h_1(x, t): \quad v_x = U_1(x, t), \quad v_z = W_1(x, t)\\
&z = z_1(x, t): \quad v_x^s(x, t) = v_{1x}^r(x, t), \quad v_z^s(x, t) = v_{1z}^r(x, t)\\
&z = z_2(x, t): \quad v_x^s(x, t) = v_{2x}^r(x, t), \quad v_z^s(x, t) = v_{2z}^r(x, t)\\
&z = h_2(x, t): \quad v_x = U_2(x, t); \quad v_z = W_2(x, t)\\
&x = x_1: \quad \tau_{xx}(z, t) = -p_1\\
&x = x_2: \quad \tau_{xx}(z, t) = -p_2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь верхними индексами s и r обозначены проекции скорости, соответственно, со стороны сдвиговой и жесткой областей течения.

Решение начнем с определения проекций скорости в жесткой области (ядре). Для этой области запишем условия равенства нулю компонент тензора скоростей деформации $\varepsilon_{xx} = 0$, $\varepsilon_{zz} = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$. На основании уравнения несжимаемости проекции скорости выразим через функцию тока Ψ по формулам:

$$\upsilon_x = \partial\Psi/\partial z, \quad \upsilon_z = -\partial\Psi/\partial x \tag{2.2}$$

Согласно равенствам (2.2), условия равенства нулю компонент скоростей деформации запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0 \tag{2.3}$$

Решение первого уравнения системы (2.3) дает

$$\Psi(x, z, t) = f(x, t) + \xi(z, t) \tag{2.4}$$

Подстановка этого решения во второе уравнение системы (2.3) приводит к двум уравнениям относительно функций $f(x, t)$ и $\xi(z, t)$:

$$\partial^2 f/\partial x^2 = \partial^2\xi/\partial z^2 = \theta(t) \tag{2.5}$$

Решение уравнений (2.5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= 1/2\theta(t)x^2 + C_1(t)x + C_2(t) \\ \xi(z, t) &= 1/2\theta(t)z^2 + C_3(t)z + C_4(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

На основании равенства (2.4) для функции тока получим выражение:

$$\Psi(x, z, t) = 1/2\theta(t)x^2 + C_1(t)x + C_2(t) + 1/2\theta(t)z^2 + C_3(t)z + C_4(t) \tag{2.7}$$

Используя равенства (2.2) найдем проекции скорости точек жесткого ядра

$$\upsilon_z = -\theta(t)x - C_1(t), \quad \upsilon_x = \theta(t)z + C_3(t) \tag{2.8}$$

Как и следовало ожидать, получены выражения проекций скорости точек твердого тела, совершающего плоское движение. Так как проекции скорости υ_z точек жесткого ядра не зависят от координаты z, то удовлетворить условиям (2.1) для этой проекции на границах раздела сдвиговой и жесткой областей, в общем случае, не представляется возможным. Такое положение противоречит общей постановке задачи о плоском течении бингамовской среды.

Таким образом, сделанное предположение о наличии в движущейся бингамовской среде твердого ядра неверно. Что и требовалось показать.

Однако в некоторых случаях это не влияет на результат. Например, когда рассматривается течение среды параллельно оси x (течение между плоскостями параллельными оси x), $\upsilon_z \equiv 0$. Тогда, как следует из первого равенства (2.8), функции $\theta(t)$ и $C_1(t)$ будут равны нулю, и из второго равенства (2.8) получим

$$\upsilon_x = C_3(t) \tag{2.9}$$

Точно так же, всем внутренним граничным условиям (2.1) можно удовлетворить и в случае чисто кругового течения среды. Тогда, со стороны сдвиговой области, на границе раздела, скорости точек среды будут иметь следующий вид:

$$\upsilon_x^s = \omega z, \quad \upsilon_z^s = -\omega x \tag{2.10}$$

Здесь $\omega(t)$ – угловая скорость физической границы раздела сдвиговой и жесткой областей. В данном случае, функции $C_1(t)$ и $C_3(t)$ равны нулю, а функция $\theta(t)$ равна $\omega(t)$

и распределение скоростей точек жесткой области, как и следовало ожидать, будет таким же, как и во вращающемся твердом теле

$$v_x = \omega z, \quad v_z = -\omega x \tag{2.11}$$

Условиям на границе раздела областей сдвигового течения и жесткого ядра можно удовлетворить и для нулевых значений скоростей на этой границе. Но это означает, что квазитвердая область (ядро) может существовать, только как часть среды прилипшей к неподвижным стенкам.

Из вышесказанного следует, что основным недостатком в существовавшем представлении о течении бингамовских сред является постулирование существования области течения, скорости в которой распределены так же, как в твердом теле. Принятие данного постулата приводило к следующим проблемам при решении задач, связанных с исследованием течений бингамовских сред:

1. Несоответствию модели бингамовской среды. Принятие модели жесткого ядра для бингамовской среды в механике сплошной среды ничего не говорит о ее физических свойствах (вязкость и пластичность), которые имеют большое значение для практики.

2. Некорректной постановке задач о течении сплошной среды, когда распределение скоростей в некоторой области среды указывается до решения задачи об определении поля скоростей.

3. Неопределенности поля напряжений в постулируемой квазитвердой области.

4. Противоречию с третьей аксиомой реологии, т.е. невозможности, в общем случае, получить все характеристики течения пластической среды из решения соответствующей задачи для бингамовской среды, путем приравнивания к нулю коэффициента пластической вязкости.

5. Невозможности, в общем случае, удовлетворить условию непрерывности скорости на внутренней границе, разделяющей области жесткого ядра и сдвигового течения, что ведет к неопределенности и поля скоростей.

Для устранения вышеназванных проблем при анализе течений бингамовских сред авторами было предложено: (*а*) принять в соответствии с моделью бингамовской среды (1.2) ядро течения такой среды телом Сен-Венана $T = \tau_0$; (*в*) различать в текущей среде в зависимости от напряженного состояния следующие области: область сдвигового течения, в которой интенсивность напряжений T больше предельного напряжения сдвига τ_0 ($T > \tau_0$); область идеально пластического течения, в которой интенсивность напряжений T равна предельному напряжению сдвига τ_0 ($T = \tau_0$).

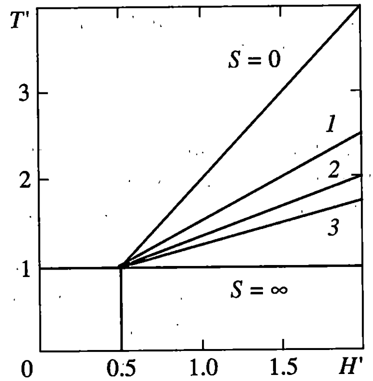
3. Приведем теперь основное реологическое уравнение бингамовской среды (1.2) к безразмерной форме. Для этого введем характерный линейный размер l, характерную скорость U и характерное напряжение Θ. Подставив в равенство (1.2) вместо размерных величин их выражения через соответствующие безразмерные величины и характерные параметры, приведем уравнение (2) к следующему виду:

$$\Theta T' = \tau_0 + 2\mu U H'/l \tag{3.1}$$

Здесь T', H' – соответственно безразмерные интенсивности напряжений и скоростей деформации, имеющие такой же вид в безразмерных переменных, как и в размерных (1.3), (1.4).

В соответствии со структурой выражения (3.1), характерное напряжение Θ в бингамовской среде должно складываться из характерного пластического напряжения, равного предельному напряжению сдвига τ_0, и характерного вязкого напряжения, равного $\mu U/l$, т.е.:

$$\Theta = \tau_0 + \mu H/l \tag{3.2}$$



Фиг. 3

С учетом данного соотношения уравнение (3.1) приводится к следующему виду:

$$T' = \frac{S}{S+1} + \frac{2}{S+1}H' \tag{3.3}$$

Здесь S – параметр Сен-Венана

$$S = \tau_0 l/(\mu U) \tag{3.4}$$

Если параметр $S = 0$ ($\tau_0 = 0$), то из уравнения (3.3) следует основное реологическое уравнение для вязкой ньютоновской жидкости в безразмерной форме:

$$T' = 2H' \tag{3.5}$$

Если параметр $S = \infty$ ($\mu = 0$), то из уравнения (3.3) следует основное реологическое уравнение для идеально пластической (сен-венановской) среды в безразмерной форме:

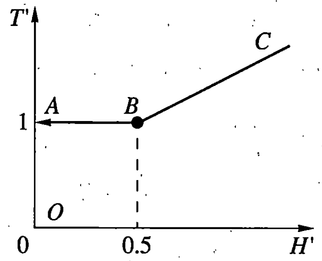
$$T' = 1 \tag{3.6}$$

На фиг. 3 приведены графики зависимости безразмерной интенсивности напряжений T' от безразмерной интенсивности скоростей деформации H' (3.3) при различных значениях параметра S. Из графиков видно, что сдвиговое течение в бингамовской среде существует при значениях $S \neq 0$ и $S \neq \infty$ и при безразмерной интенсивности напряжений $T' > 1$ и безразмерной интенсивности скоростей деформации $H' > 0.5$.

При $T' = 1$, $H' = 0.5$ в среде существует пластическое течение. Таким образом, в текущей бингамовской среде значения безразмерных параметров могут принимать только следующие значения: $T' \geq 1$, $H' \geq 0.5$.

4. Вышесказанное позволяет дать следующее графическое представление о реологическом поведении бингамовской среды и ее агрегатных состояниях в зависимости от значений безразмерных параметров T', H' (фиг. 4).

Первое возможное агрегатное состояние среды – покой. Состояние покоя будет, если во всех точках среды безразмерная интенсивность напряжений $T' < 1$, а безразмерная интенсивность скоростей деформации во всех ее точках $H' = 0$. У среды, которая находится в состоянии покоя, ее фундаментальные свойства вязкость и пластичность не проявляются и она ведет себя как твердое тело. Эти свойства проявляются и могут



Фиг. 4

быть измерены, как об этом ранее уже говорилось, только в движущейся или текущей среде. Состоянию покоя среды соответствует прямая OA на фиг. 4.

Второе возможное агрегатное состояние среды – пластическое течение. Пластическое течение будет в тех точках среды, где безразмерная интенсивность напряжений $T' = 1$, а безразмерная интенсивность скоростей деформации $0.5 \geq H' > 0$. У среды, которая находится в состоянии пластического течения, проявляются только пластические свойства (пластичность), а вязкость не проявляется. Этому состоянию среды соответствует прямая AB на фиг. 4.

Третье возможное агрегатное состояние среды – сдвиговое или почти вязкое течение. Сдвиговое течение будет в тех точках среды, где безразмерная интенсивность напряжений $T' > 1$, а безразмерная интенсивность скоростей деформации $H' > 0.5$. У среды, которая находится в состоянии сдвигового течения, проявляются как пластические (пластичность), так и вязкие (вязкость) свойства. Этому состоянию среды соответствует прямая BC на фиг. 4.

Таким образом, в текущей среде нет областей, где бы она находилась в “твердом” состоянии, т.е. где бы выполнялись условия на безразмерные параметры $T' < 1$, $H' = 0$. И наоборот, если в текущей среде имеется область, в точках которой выполняются условия $T' < 1$, $H' = 0$, то это область где среда находится в состоянии покоя. Физически это возможно только для той области среды, которая “прилипла” к стенкам канала и относительно этих стенок она не движется.

Исходя из поведения бингамовской среды (фиг. 4) можно сформулировать следующие критерии определения ее агрегатного состояния.

Критерий 1. Для того, чтобы бингамовская среда находилась в состоянии покоя, необходимо и достаточно, чтобы безразмерные параметры были равны $T' < 1$, $H' = 0$.

Критерий 2. Для того, чтобы бингамовская среда находилась в состоянии пластического течения, необходимо и достаточно, чтобы безразмерные параметры были равны $T' = 1$, $0.5 \geq H' > 0$.

Критерий 3. Для того, чтобы бингамовская среда находилась в состоянии сдвигового течения, необходимо и достаточно, чтобы безразмерные параметры были равны $T' > 1$, $H' > 0.5$.

5. Заключение. Такой подход к анализу бингамовской среды позволил уточнить ее модель в части касающейся ее агрегатных состояний и реологического поведения в зависимости от ее внутреннего напряженного и деформированного состояний. Одновременно с уточнением модели получены критерии, позволяющие определять агрегатные состояния бингамовских сред и границы перехода сред из одного агрегатного состояния в другое.

Авторы благодарят Д.М. Климова за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rheologie der Lebensmittel / Hrsg.: D. Weipert/H.-D. Tscheuschner / E. Windhab.: Behr's, Hamburg, 1993. 620 s.
2. *Рейнер М.* Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.
3. *Сен-Венан Б.* Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости // Теория пластичности. Сб. статей / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 11–19.
4. *Генки Г.* О медленных стационарных течениях в пластических телах с приложениями к прокатке, штамповке и волочению // Теория пластичности. Сб. статей / Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 136–156.
5. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* К теории течений бингамовских сред: Препринт № 626. М.: ИПМ РАН, 1998. 63 с.
6. *Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М.* Об одном случае плоского течения бингамовских сред // Изв. АН. МТТ. 2001. № 5. С. 63–73.
7. *Воларович М.П., Гуткин А.М.* Течение вязкопластичного тела между двумя параллельными плоскими стенками и в кольцевом зазоре между коаксиальными трубками // ЖТФ. 1946. Т. XVI. Вып. 3. С. 321–329.
8. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичного тела // Уч. зап. МГУ. Сер. Механика. Вып. 39. М.: МГУ, 1940. С. 3–81.
9. *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во МГУ, 1977. 373 с.
10. *Мясников В.П.* Течение вязко-пластичной среды при сложном сдвиге // ПМТФ. 1961. № 5. С. 76–87.
11. *Рейнер М.* Деформация и течение. М.: Гостоптехиздат, 1963. 381 с.
12. *Lipscomb G.G. and Denn M.M.* Flow of Bingam fluids ill complex geometries // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 14(1984), 337–346.
13. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.01.2003