МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2003

УДК 539.214; 539.374

© 2003 г. Д.Д. ИВЛЕВ, $\boxed{\text{А.Ю. ИШЛИНСКИЙ}}$

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ТЕЛ

Статически определимые состояния идеально пластических тел рассматриваются как состояния, соответствующие предельным значениям несущей способности и разрушения.

1. Рассмотрим систему из трех стержней 1, 2, 3 поперечных сечений s_1, s_2, s_3, растягиваемую силой P (фиг. 1, *а*). Диаграммы $\sigma - \varepsilon$ – напряжение – деформация стержней показаны на фиг. 1, *в*, где $k_1 \le k_2 \le k_3$ – пределы текучести. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ системы показана на фиг. 2.

В дальнейшем величины, имеющие размерность напряжения и длины, будем считать безразмерными, отнесенными к некоторым характерным значениям.

Соотношения между напряжениями и деформациями имеют вид

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \sigma_1 \le k_1; \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \varepsilon_1^p, \quad \sigma_1 = k_1, \quad \varepsilon_1^p \ge 0, \quad \varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = 0 \\
\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E}, \quad \sigma_2 \le k_2; \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} + \varepsilon_2^p, \quad \sigma_2 = k_2, \quad \sigma_1 = k_1, \quad \varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p \ge 0, \quad \varepsilon_3^p = 0 \qquad (1.1) \\
\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E}, \quad \sigma_3 \le k_3; \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} + \varepsilon_3^p, \quad \sigma_3 = k_3, \quad \sigma_2 = k_2, \quad \sigma_1 = k_1, \quad \varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p \ge 0
\end{gathered}$$

где σ_i – напряжения, ε_i – деформации, ε_i^p – пластические деформации, E – модуль упругости.

Рассмотрим трехмерное пространство напряжений σ_1, σ_2, σ_3. Введем вектор

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{i} + \sigma_2 \mathbf{j} + \sigma_3 \mathbf{k} \qquad (1.2)$$

Изменение напряжений ограничено в пределах

$$0 \le \sigma_i \le k_i \qquad (1.3)$$

изменение вектора σ ограничено плоскостями текучести, ортогональными к осям σ_i, отсекающими отрезки длиной k_i (фиг. 3).

Рассмотрим вектор результирующих усилий в стержневой системе

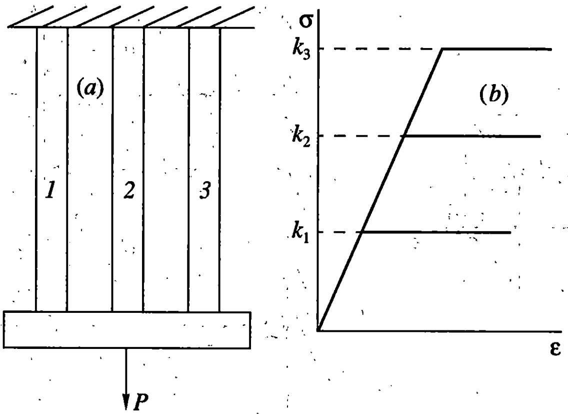
$$\mathbf{P} = \sigma_1 s_1 \mathbf{i} + \sigma_2 s_2 \mathbf{j} + \sigma_3 s_3 \mathbf{k}, \quad |\mathbf{P}| = P \qquad (1.4)$$

Изменение вектора $\boldsymbol{P}$ ограничено плоскостями, ортогональными к осям σ_i, отсекающими отрезок длиной $P_i = k_i s_i$.

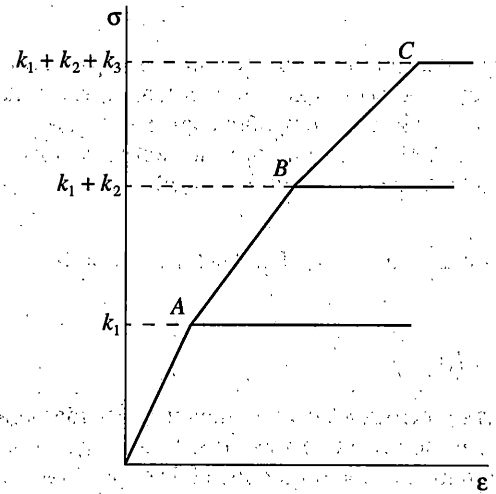
Уравнение равновесия запишется в виде

$$\sigma_1 s_1 + \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_3 = P \qquad (1.5)$$

Соотношение (1.5) определяет в пространстве σ_i плоскость, перемещающуюся параллельно самой себе с изменением нагрузки P. Напряженное состояние, удовлетворяющее условию (1.5), является статически возможным.



Фиг. 1



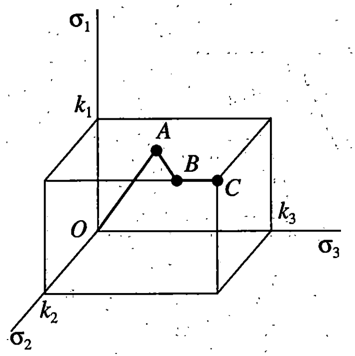
Фиг. 2

Упругое деформирование происходит до достижения стержнем 1 предела текучести k_1, при этом $\boldsymbol{\sigma}$ достигает поверхности $\sigma_1 = k_1$ в точке A (фиг. 3).

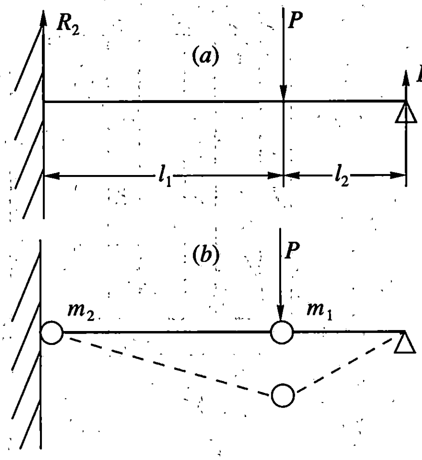
При дальнейшем нагружении $d\sigma > 0$ при достижении пластического состояния стержнем 2 вектор $\boldsymbol{\sigma}$ смещается в точку B (фиг. 3), находящейся на ребре, образованном пересечением предельных поверхностей $\sigma_1 = k_1$, $\sigma_2 = k_2$.

При продолжающемся нагружении, двигаясь вдоль ребра, вектор $\boldsymbol{\sigma}$ достигает точки C (фиг. 3), соответствующей пересечению поверхностей текучести $\sigma_1 = k_1$, $\sigma_2 = k_2$, $\sigma_3 = k_3$ предельному состоянию конструкции. Статически неопределимое состояние (1.5) становится статически определимым при $P_i = k_i s_i$.

Итак, рассматриваемая конструкция сохраняет несущую способность при достижении $\boldsymbol{\sigma}$ одной и двух поверхностей текучести. Исчерпание несущей способности происходит при достижении конструкцией состояния статической определимости. Аналогично могут быть рассмотрены системы, состоящие из n стержней, случай $n = 2$ рассмотрен в [1].



Фиг. 3



Фиг. 4

Другой пример связан со стержнем из идеального упругопластического материала, заделанного на одном конце и свободно опертого на другом, нагруженного поперечной силой P (фиг. 4, *а*). Реакция в опорах обозначим R_1, R_2; M_1 – изгибающий момент в сечении от действия силы P; M_2 – изгибающий момент в заделке; l_1, l_2 – отрезки стержня от концов до сечения действия силы P (фиг. 4, *а*).

Условия равновесия

$$R_1 + R_2 = P, \quad R_1 l_1 - M_1 = 0, \quad M_2 - R_2(l_1 + l_2) + Pl_1 = 0 \tag{1.6}$$

Из (1.6) следует

$$M_2 l_1 + M_1(l_1 + l_2) = Pl_1 l_2 \tag{1.7}$$

Рассмотрим плоскость с осями M_1, M_2, изменение изгибающих моментов с изменением силы P ($dP > 0$) происходит в пределах $0 \leq M_i \leq m_i$, где m_i – предельные значения изгибающих моментов (фиг. 5). Соотношение (1.7) определяет статически возможные значения M_1, M_2 в зависимости от P и представляет в плоскости M_1, M_2 прямую fg, перемещающуюся параллельно самой себе с изменением величины P. Очевидно, предельное состояние системы будет достигнуто при достижении стержня статически допустимого состояния, прямая fg займет положение $f_1 g_1$ (фиг. 5), при этом произойдет образование пластических шарниров, обеспечивающих кинематическую свободу потери несущей способности и разрушения (фиг. 4, *в*).

2. Рассмотрим соотношения теории идеальной пластичности. В случае плоской задачи имеют место два уравнения равновесия

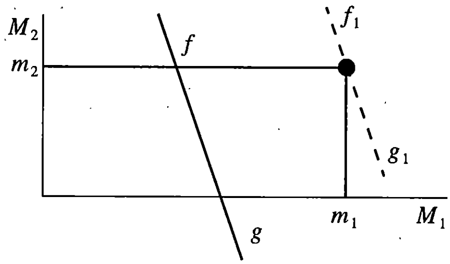
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

и условие предельного состояния

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \tag{2.2}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненты напряжения в декартовой системе координат xy.

В случае плоской задачи система соотношений (2.1), (2.2) статически определимая.



Фиг. 5

В случае осесимметричной задачи имеют место два уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\quad \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{\rho z}}{\rho}=0 \tag{2.3}$$

где σ_ρ, σ_θ, σ_z, $\tau_{\rho z}$ – компоненты напряжения в цилиндрической системе координат $\rho\theta z$.

В случае, если имеет место одно предельное соотношение

$$f(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\rho z})=0 \tag{2.4}$$

три соотношения (2.3), (2.4) являются статически неопределимыми относительно четырех компонент напряжения σ_ρ, σ_θ, σ_z, $\tau_{\rho z}$.

Статически определимая осесимметричная задача теории идеальной пластичности имеет место, если определены два предельных соотношения:

$$f_1(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\rho z})=0,\quad f_2(\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\rho z})=0 \tag{2.5}$$

Исследование свойств уравнений статически определимых соотношений осесимметричной задачи дано в [2].

В случае пространственной задачи имеют место три уравнения равновесия

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0\end{aligned} \tag{2.6}$$

Соотношения теории упругости представляют случай статически неопределимой системы уравнений. Статически возможным является поле напряжений, удовлетворяющее уравнениями равновесия (2.6).

В случае удовлетворения напряженного состояния условию пластичности

$$f_1(\sigma_{ij})=0 \tag{2.7}$$

согласно [3], соотношения (2.6), (2.7) определяют пластическое состояние материала, система четырех уравнений (2.6), (2.7) является статически неопределимой.

В случае удовлетворения напряженного состояния двум соотношениям

$$f_1(\sigma_{ij})=0,\quad f_2(\sigma_{ij})=0 \tag{2.8}$$

согласно [3], соотношения (2.6), (2.8) определяют развитое пластическое состояние, система уравнений (2.6), (2.8) продолжает оставаться статически неопределимой.

Статическая определимость соотношений теории идеальной пластичности имеет место при выполнении трех условий пластичности:

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_2(\sigma_{ij}) = 0, \quad f_3(\sigma_{ij}) = 0 \tag{2.9}$$

Для изотропного материала три независимых условия:

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad f_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{2.10}$$

приводят к полю напряжений

$$\sigma_1 = \text{const}, \quad \sigma_2 = \text{const}, \quad \sigma_3 = \text{const} \tag{2.11}$$

Для изотропного материала статическая определимость имеет место при условии полной пластичности [4]:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 = \sigma_1 + 2k, \quad k - \text{const} \tag{2.12}$$

В случае выполнения соотношений (2.12) имеют место выражения [3]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma + \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, \quad \tau_{xy} = 2kn_1n_2 \\
\sigma_y &= \sigma + \frac{2}{3}k + 2kn_2^2, \quad \tau_{yz} = 2kn_2n_3 \\
\sigma_z &= \sigma + \frac{2}{3}k + 2kn_3^2, \quad \tau_{xz} = 2kn_3n_1 \\
n_1^2 &+ n_2^2 + n_3^2 = 1
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где n_1, n_2, n_3 – направляющие косинусы третьего главного напряжения σ_3 в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Из (2.13) следуют три условия пластичности, определяющие статическую определимость соотношений

$$\left(\sigma_x - \sigma - \frac{2}{3}k\right)\left(\sigma_y - \sigma - \frac{2}{3}k\right) = \tau_{xy}^2 \quad (xyz) \tag{2.14}$$

или

$$\left(\sigma_x - \sigma - \frac{2}{3}k\right)\tau_{yz} = \tau_{xy}\tau_{xz} \quad (xyz) \tag{2.15}$$

В общем случае соотношения статически определимой задачи теории идеальной пластичности можно представить в виде [5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \nu + \varphi_1(\sigma, n_1n_2n_3), \quad \tau_{xy} = \varphi_4(\sigma, n_1n_2n_3) \\
\sigma_y &= \nu + \varphi_2(\sigma, n_1n_2n_3), \quad \tau_{yz} = \varphi_5(\sigma, n_1n_2n_3) \\
\sigma_z &= \nu + \varphi_3(\sigma, n_1n_2n_3), \quad \tau_{xz} = \varphi_6(\sigma, n_1n_2n_3) \\
\sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Соотношения (2.16) определяют в общем случае статически определимое состояние анизотропного идеальнопластического тела.

Исследование свойств статически определимой системы уравнений теории идеальной пластичности (2.6), (2.16) дано в случае трех независимых функций φ_i [5] при

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = N_1^2, \quad \varphi_2 = N_2^2, \quad \varphi_3 = N_3^2 \\ &\varphi_4 = N_1N_2, \quad \varphi_5 = N_2N_3, \quad \varphi_6 = N_1N_3 \end{aligned} \tag{2.17}$$

или

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = N^2\cos^2\theta_1, \quad \varphi_2 = N^2\cos^2\theta_2, \quad \varphi_3 = N^2\cos^2\theta_3 \\ &\varphi_4 = N^2\cos\theta_1\cos\theta_2, \quad \varphi_5 = N^2\cos\theta_2\cos\theta_3, \quad \varphi_6 = N^2\cos\theta_1\cos\theta_3 \\ &N^2 = N_1^2+N_2^2+N_3^2 = \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3, \quad \cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3 = 1 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Статически определимая система уравнений (2.6), (2.16), (2.18) принадлежит к гиперболическому типу [5].

Отметим, что соотношения (2.16), (2.17), (2.18) определяют равенство двух главных напряжений.

При нагружении идеальное упругопластическое тело проходит стадии упругого, упругопластического деформирования и, наконец, достигает состояние потери несущей способности и разрушения.

В упругом теле имеет место статическая неопределимость, изменение напряжений происходит в связи с изменением деформированного состояния, уравнения, описывающие процесс деформирования, принадлежат к эллиптическому типу.

При состояниях, характеризуемых удовлетворением условий пластичности (2.7), (2.8), статическая неопределимость сохраняется, уравнения упругопластического состояния принадлежат к эллиптическому типу [6, 7], изменение напряжений происходит в связи с изменением деформации.

Потеря несущей способности и разрушение идеального упругопластического тела происходит при достижении статически определимого состояния и приобретения кинематической свободы течения при фиксированном напряженном состоянии, определяемом предельной нагрузкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прагер В., Ходж Ф.* Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр., лит., 1956. 398 с.
2. *Ивлев Д.Д., Мартынова Т.Н.* О свойствах общих уравнений теории идеальной пластичности // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 4. С. 764–767.
3. *Ивлев Д.Д., Ишлинский А.Ю.* Полная пластичность в теории идеально-пластического тела // Докл. АН СССР. 1999. Т. 368. № 3. С. С. 333–334.
4. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
5. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т. 2. М.: Физматлит, 2002. 448 с.
6. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.
7. *Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.01.2003