МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2003

УДК 539.3

© 2003 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ

ДВИЖЕНИЕ С ВЫСОКОЙ СКОРОСТЬЮ ПРОТЯЖЕННОГО ТЕРМОСИЛОВОГО ИСТОЧНИКА В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В плоской и осесимметричной постановках рассматривается задача несвязанной термоупругости о движении с постоянной скоростью протяженного термосилового источника в безграничной упругой среде. В отличие от классического уравнения теплопроводности параболического типа используется уравнение теплопроводности с конечной скоростью распространения теплового потока, т.е. уравнение гиперболического типа. Предполагается, что скорость движения источника превосходит скорости звука в упругой среде и скорость распространения теплового потока. В замкнутом виде получены выражения для температуры и перемещений упругой среды.

1. Плоская задача, исходные уравнения. Будем использовать следующие уравнения динамической несвязанной термоупругости с гиперболическим уравнением теплопроводности [1]:

$$\left(\Delta-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = m\vartheta-\frac{1}{c_1^2}\Phi$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = -\frac{1}{c_2^2}\Psi$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vartheta = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)Q \tag{1.1}$$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \upsilon = \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$X = \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right),\quad Y = \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}},\quad c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}},\quad c_q = \sqrt{\frac{a}{\tau}}$$

Здесь x и y – декартовы координаты; t – время; G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность; $m = \alpha_*(1+\nu)/(1-\nu)$; α_* – температурный коэффициент линейного расширения; ϑ – приращение температуры среды; $a = \lambda/\rho c$; λ – коэффициент теплопроводности; c – удельная теплоемкость среды; τ – время релаксации теплового потока; Q – распределенные тепловые источники; u и υ – проекции вектора перемещения на оси x и y; X и Y – проекции массовых сил на оси x и y.

Уравнения, связывающие деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.2}$$

и температуру с напряжениями, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] - \beta_*\vartheta \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] - \beta_*\vartheta \\ \sigma_z &= \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \beta_*\vartheta, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{1.3}$$

где σ_x, σ_y и σ_z – нормальные напряжения, τ_{xy} – касательное напряжение, $\beta_* = 2G\alpha_*(1+\nu)/(1-2\nu)$.

2. Переход в подвижную систему координат. Пусть упругая среда заполняет всю плоскость (x, y). Предположим, что тепловые источники Q и массовые силы X, Y, не изменяя своей величины во времени, движутся с постоянной скоростью V в отрицательном направлении оси x. Тогда все величины, входящие в уравнения (1.1), можно представить в форме

$$f(x + Vt, y) \tag{2.1}$$

Заметим, что для реальных материалов $c_1 > c_2 > c_q$, и предположим, что $V > c_1$. Введем подвижную систему координат $x' = x + Vt$, $y' = y$. Штрихи далее опускаем. В новой системе координат первые три уравнения (1.1) примут вид

$$\left(-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{V}{a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vartheta = -\frac{1}{\lambda}\left(1 + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right)Q$$

$$\left(-\beta^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = m\vartheta - \frac{1}{c_1^2}\Phi \tag{2.2}$$

$$\left(-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi = -\frac{1}{c_2^2}\Psi$$

$$\alpha^2 = \frac{V^2}{c_q^2} - 1, \quad \beta^2 = \frac{V^2}{c_1^2} - 1, \quad \gamma^2 = \frac{V^2}{c_2^2} - 1, \quad \mu = \tau V$$

причем $\alpha > \gamma > \beta$.

Далее в уравнении теплопроводности (первом уравнении (2.2)) будем пренебрегать диффузионным членом

$$Va^{-1}\vartheta'_x \tag{2.3}$$

учитывая быстроту протекающего при движении процесса теплообмена.

3. Решение задачи для сосредоточенного термосилового источника. Положим, что

$$Q = -R\delta(x)\delta(y), \quad X = -P\delta(x)\delta(y), \quad Y \equiv 0 \tag{3.1}$$

где $\delta(x)$ и $\delta(y)$ – дельта-функции, и, принимая во внимание, что при $x < 0$ все характерные величины задачи должны обращаться в нуль, ибо $V > c_1$, будем искать все функции, входящие в уравнения поставленной задачи в виде

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy}ds \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_*(p,s)e^{px}dp \tag{3.2}$$

где $f_*(p, s)$ – трансформанта Фурье–Лапласа функции $f(x, y)$. Далее также учтем, что [2]:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px}dp, \quad \delta(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy}ds \tag{3.3}$$

Из выражений (1.1) для X и Y, записанных в трансформантах, на основании того, что $X_* = -P$ и $Y_* \equiv 0$, найдем

$$\Phi_* = -\frac{pP}{\rho(p^2-s^2)}, \quad \Psi_* = \frac{isP}{\rho(p^2-s^2)} \tag{3.4}$$

Уравнения (2.2) в трансформантах будут иметь вид

$$\begin{aligned} (-\alpha^2p^2-s^2)\vartheta_* &= (1+\mu p)R\lambda^{-1} \\ (-\beta^2p^2-s^2)\varphi_* &= m\vartheta_* - c_1^{-2}\Phi_* \\ (-\gamma^2p^2-s^2)\psi_* &= -c_2^{-2}\Psi_* \end{aligned} \tag{3.5}$$

где учтено, что $Q_* = -R$.

Решая систему (3.5) с учетом (3.4) относительно функций ϑ_*, φ_* и ψ_*, найдем

$$\begin{aligned} \vartheta_* &= -\frac{(1+\mu p)R}{\lambda(\alpha^2p^2+s^2)} \\ \varphi_* &= \frac{1}{\beta^2p^2+s^2}\left[\frac{(1+\mu p)Rm}{\lambda(\alpha^2p^2+s^2)} - \frac{pP}{\rho c_1^2(p^2-s^2)}\right] \\ \psi_* &= \frac{isP}{\rho c_2^2(\gamma^2p^2+s^2)(p^2-s^2)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Далее на основании формул (1.1) для u и v, записанных в трансформантах, будем иметь

$$\begin{aligned} u_* &= \frac{Rm(1+\mu p)}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)p}\left(\frac{1}{\alpha^2p^2+s^2} - \frac{1}{\beta^2p^2+s^2}\right) - \frac{P}{V^2\rho}\left(\frac{1}{\beta^2p^2+s^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2p^2+s^2}\right) \\ v_* &= \frac{iRm(1+\mu p)}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)s}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2p^2+s^2} - \frac{\beta^2}{\beta^2p^2+s^2}\right) - \frac{ipP}{V^2\rho s}\left(\frac{\beta^2}{\beta^2p^2+s^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2p^2+s^2}\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Подставляя найденные выражения (3.6) и (3.7) для ϑ_*, u_* и v_* в соотношения вида (3.2) и вычисляя интегралы по p [3] и по s [4] (см. 3.721(1) и 3.782(2)), получим

$$\vartheta = \frac{R}{2\lambda\alpha}\left\{\frac{1}{2}\left[\operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\alpha}\right) - \operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\alpha}\right)\right] - \frac{\mu}{\alpha}\left[\delta\left(y-\frac{x}{\alpha}\right) + \delta\left(y+\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right\}$$

$$u = \frac{Rm}{4\lambda(\beta^2-\alpha^2)}\left\{\left|y-\frac{x}{\alpha}\right| - \left|y-\frac{x}{\beta}\right| + \left|y+\frac{x}{\alpha}\right| - \left|y+\frac{x}{\beta}\right| - \frac{\mu}{\beta}\left[\operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\beta}\right) - \operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\beta}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu}{\alpha}\left[\operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\alpha}\right) - \operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right\} - \frac{P}{4V^2\rho}\left\{\frac{1}{\beta}\left[\operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\beta}\right) - \operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\beta}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \gamma\left[\operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\gamma}\right) - \operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\gamma}\right)\right]\right\} \qquad (3.8)$$

$$v = \frac{Rm}{4\lambda(\beta^2-\alpha^2)}\left\{\alpha\left(\left|y+\frac{x}{\alpha}\right| - \left|y-\frac{x}{\alpha}\right|\right) - \beta\left(\left|y+\frac{x}{\beta}\right| - \left|y-\frac{x}{\beta}\right|\right) - \right.$$

$$\left. - \mu\left[\operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\beta}\right) + \operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\beta}\right) - \operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\alpha}\right) - \operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{P}{4V^2\rho}\left[\operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\gamma}\right) + \operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\gamma}\right) - \operatorname{sign}\left(y-\frac{x}{\beta}\right) - \operatorname{sign}\left(y+\frac{x}{\beta}\right)\right]$$

Заметим, что при нахождении выражения для ϑ использован также второй интеграл (3.3).

4. Переход к протяженному термосиловому источнику. Формулы (3.8) можно несколько упростить, если учесть, что $x > 0$ и ось y является осью симметрии задачи. Значит, не нарушая общности, можно также считать, что $y > 0$. В упрощенных формулах (3.8) положим $x = x' - \xi$ (штрих далее опускаем) и $R = rd\xi$, $P = pd\xi$. Пусть r и p равномерно заполняют отрезок оси x от 0 до l. Тогда используя принцип суперпозиции и интегрируя по ξ от 0 до l на основании формул (3.8) найдем

$$\vartheta = \frac{r}{4\lambda\alpha}(\alpha|z_\alpha| - \alpha|\zeta_\alpha| - l - \mu\operatorname{sign} z_\alpha + \mu\operatorname{sign}\zeta_\alpha)$$

$$u = \frac{rm}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)}\left\{\frac{1}{8}\left[\alpha z_\alpha^2 \operatorname{sign} z_\alpha - \alpha\zeta_\alpha^2\operatorname{sign}\zeta_\alpha - \beta z_\beta^2\operatorname{sign} z_\beta + \right.\right.$$

$$\left. + \beta\zeta_\beta^2\operatorname{sign}\zeta_\beta - \frac{(x-l)^2}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha} + \frac{(x-l)^2}{\beta} - \frac{x^2}{\beta}\right] -$$

$$\left. - \frac{\mu}{4\beta}(l - \beta|z_\beta| + \beta|\zeta_\beta|) + \frac{\mu}{4\alpha}(l - \alpha|z_\alpha| + \alpha|\zeta_\alpha|)\right\} -$$

$$- \frac{p}{4V^2\rho}\left[\frac{1}{\beta}(l - \beta|z_\beta| + \beta|\zeta_\beta|) + \gamma(l - \gamma|z_\gamma| + \gamma|\zeta_\gamma|)\right] \qquad (4.1)$$

$$v = \frac{rm}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)}\left[\frac{\alpha}{4}\left(yl - \frac{\alpha}{2}z_\alpha^2\operatorname{sign} z_\alpha + \frac{\alpha}{2}\zeta_\alpha^2\operatorname{sign}\zeta_\alpha\right) - \right.$$

$$-\frac{\beta}{4}\left(yl-\frac{\beta}{2}z_\beta^2\operatorname{sign}z_\beta+\frac{\beta}{2}\zeta_\beta^2\operatorname{sign}\zeta_\beta\right)-\frac{\mu}{4}(\beta|z_\beta|-\beta|\zeta_\beta|-\alpha|z_\alpha|+\alpha|\zeta_\alpha|)\bigg]+$$

$$+\frac{p}{4V^2\rho}(\gamma|z_\gamma|-\gamma|\zeta_\gamma|-\beta|z_\beta|+\beta|\zeta_\beta|)$$

$$z_\alpha = y-\frac{x-l}{\alpha},\quad z_\beta = y-\frac{x-l}{\beta},\quad z_\gamma = y-\frac{x-l}{\gamma}$$

$$\zeta_\alpha = y-\frac{x}{\alpha},\quad \zeta_\beta = y-\frac{x}{\beta},\quad \zeta_\gamma = y-\frac{x}{\gamma}$$

Формулы (4.1) имеют место при $y > 0$, при $y < 0$ в силу симметрии нужно в них всюду заменить y на $-y$. При $x < 0$ величины ϑ, u и v равны нулю по построению.

Анализ формул (4.1) показывает, что есть шесть клинообразных фронтов, которые определяются формулами

$$\zeta_\alpha = \zeta_\beta = \zeta_\gamma = z_\alpha = z_\beta = z_\gamma = 0 \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться, что температура $\vartheta = 0$ при $\zeta_\alpha > 0$, а перемещения $u = v = 0$ при $\zeta_\beta > 0$. При переходе через фронты $\zeta_\alpha = 0$ и $z_\alpha = 0$ температура меняется скачком на конечную величину, а при переходе через фронты (4.2) перемещения u и v меняются непрерывно.

Используя выражения (4.1) для u и v, по формулам (1.2) и (1.3) можно найти деформации и напряжения. При переходе через фронты (4.2) деформации и напряжения меняются скачком на конечную величину.

5. Осесимметричная задача, исходные уравнения. Напомним, что векторное уравнение движения термоупругости имеет вид [1, 5]:

$$G\Delta\mathbf{u}+\frac{G}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mathbf{X} = \beta_*\operatorname{grad}\vartheta+\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{5.1}$$

причем в случае осевой симметрии

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r+w\mathbf{e}_z,\quad \mathbf{X} = X_r\mathbf{e}_r+X_z\mathbf{e}_z \tag{5.2}$$

где $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_z$ – единичные орты по осям r и z в цилиндрической системе координат.

Следуя [6] (гл. 1, § 7), можно показать, что общее решение уравнений (5.1) для осесимметричных задач дается формулами

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad W = \frac{\partial\varphi}{\partial z}-L\psi,\quad L = \frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r} \tag{5.3}$$

причем функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$L\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-m\vartheta+\frac{1}{c_1^2}\Phi = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}L\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{1}{c_2^2}\Psi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{5.4}$$

$$X_r = \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right),\quad X_z = \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-L\Psi\right)$$

Добавим к уравнениям (5.4) еще гиперболическое уравнение теплопроводности (1.1), которое для случая осевой симметрии будет иметь вид

$$L\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\frac{1}{c_q^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\tau\frac{\partial}{\partial t}\right)Q \tag{5.5}$$

Уравнения, связывающие деформации

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r},\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r} \tag{5.6}$$

и температуру с напряжениями, даются формулами

$$\begin{gathered}\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_r+\nu(\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)]-\beta_*\vartheta\\ \sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_\theta+\nu(\varepsilon_r+\varepsilon_z)]-\beta_*\vartheta\\ \sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu}[(1-\nu)\varepsilon_z+\nu(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)]-\beta_*\vartheta,\quad \tau_{rz} = G\gamma_{rz}\end{gathered} \tag{5.7}$$

где σ_r, σ_θ и σ_z – нормальные напряжения, τ_{rz} – касательное напряжение.

Пусть упругая среда занимает все пространство (r, z), а тепловые источники и массовые силы X_r, X_z, не изменяя своей величины во времени, движутся с постоянной скоростью V в отрицательном направлении оси z. Тогда в подвижной системе координат $z' = z + Vt$, $r' = r$ (штрихи далее опускаем) уравнение (5.5) и уравнения (5.4) примут вид

$$\begin{gathered}\left(-\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{V}{a}\frac{\partial}{\partial z}+L\frac{\partial}{\partial r}\right)\vartheta = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\mu\frac{\partial}{\partial z}\right)Q\\ \left(\beta^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+L\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi = m\vartheta-\frac{1}{c_1^2}\Phi\\ \left(-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial r}L\right)\psi = -\frac{1}{c_2^2}\Psi\end{gathered} \tag{5.8}$$

Далее в уравнении теплопроводности – первом уравнении (5.8) – будем, как и выше, пренебрегать диффузионным членом

$$Va^{-1}\vartheta'_z \tag{5.9}$$

6. Решение задачи для протяженного термосилового источника. Положим, что

$$\begin{gathered}Q = -r_*\delta(r)\pi(z),\quad X_r\equiv 0,\quad X_z = -p_*\delta(r)\pi(z)\\ \pi(z) = 1\quad (z\in[0,l]),\quad \pi(z) = 0\quad (z\notin[0,l])\end{gathered} \tag{6.1}$$

и будем искать функции u, ψ, X_r и Ψ в виде

$$f(r,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty uJ_1(ur)du\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_*(u,p)e^{pz}dp \tag{6.2}$$

а функции w, φ, X_z, Φ и Q в виде

$$g(r,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty uJ_0(ur)du\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g_*(u,p)e^{pz}dp \tag{6.3}$$

где $J_1(ur)$ и $J_0(ur)$ – функции Бесселя, $f_*(u,p)$ и $g_*(u,p)$ – трансформанты Ханкеля–Лапласа функций $f(r,z)$ и $g(r,z)$. Далее также учтем, что [3, 7]:

$$\pi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{1-e^{-lp}}{p}e^{pz}dp, \quad \delta(r) = \int_0^\infty uJ_0(ur)du \tag{6.4}$$

Из выражений (5.4) для X_r и X_z, записанных в трансформантах, на основании того, что $X_{r*}\equiv 0$ и $X_{z*} = -p_*(1-e^{-lp})p^{-1}$, найдем

$$\Phi_* = \frac{p_*(1-e^{-lp})}{\rho(u^2-p^2)}, \quad \Psi_* = \frac{p_*u(1-e^{-lp})}{\rho p(u^2-p^2)} \tag{6.5}$$

Уравнения (5.8) в трансформантах будут иметь вид

$$\begin{aligned}(-\alpha^2p^2-u^2)\vartheta_* &= r_*(1+\mu p)(1-e^{-lp})(\lambda p)^{-1}\\ (-\beta^2p^2-u^2)\varphi_* &= m\vartheta_* - c_1^{-2}\Phi_*\\ (-\gamma^2p^2-u^2)\psi_* &= -c_2^{-2}\Psi_*\end{aligned} \tag{6.6}$$

где учтено, что $Q_* = -r_*(1-e^{-lp})p^{-1}$.

Решая систему (6.6) относительно функций ϑ_*, φ_* и ψ_*, найдем

$$\begin{aligned}\vartheta_* &= -\frac{r_*(1+\mu p)(1-e^{-lp})}{\lambda p(\alpha^2p^2+u^2)}\\ \varphi_* &= \frac{1-e^{-lp}}{\beta^2p^2+u^2}\left[\frac{r_*m(1+\mu p)}{\lambda p(\alpha^2p^2+u^2)} - \frac{p_*}{\rho c_1^2(p^2-u^2)}\right]\\ \psi_* &= -\frac{p_*u(1-e^{-lp})}{\rho c_2^2p(p^2-u^2)(\gamma^2p^2+u^2)}\end{aligned} \tag{6.7}$$

Далее на основании формул (5.3) для u и w, записанных в трансформантах, будем иметь

$$\begin{aligned}u_* &= \frac{r_*m(1+\mu p)(1-e^{-lp})}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)up}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2p^2+u^2} - \frac{\beta^2}{\beta^2p^2+u^2}\right) - \frac{p_*(1-e^{-lp})}{\rho V^2u}\left(\frac{\beta^2}{\beta^2p^2+u^2} - \frac{\gamma^2}{\gamma^2p^2+u^2}\right)\\ w_* &= \frac{r_*m(1+\mu p)(1-e^{-lp})}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)p^2}\left(\frac{1}{\alpha^2p^2+u^2} - \frac{1}{\beta^2p^2+u^2}\right) - \frac{p_*(1-e^{-lp})}{\rho V^2p}\left(\frac{1}{\beta^2p^2+u^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2p^2+u^2}\right)\end{aligned} \tag{6.8}$$

Далее понадобятся интегралы

$$\int_0^\infty J_0(ur)\left(\frac{uz}{\alpha} - \sin\frac{uz}{\alpha}\right)\frac{du}{u^2} = \delta_\alpha(z)\left(\frac{z}{\alpha}\ln\frac{z+\sqrt{z^2-\alpha^2r^2}}{\alpha r} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{z^2-\alpha^2r^2}\right)$$

$$\int_0^\infty J_0(ur)\left(1-\cos\frac{uz}{\alpha}\right)\frac{du}{u} = \delta_\alpha(z)\ln\frac{z+\sqrt{z^2-\alpha^2r^2}}{\alpha r}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(ur)\sin\frac{uz}{\alpha}du = \delta_\alpha(z)\frac{\alpha}{\sqrt{z^2-\alpha^2r^2}}\\
&\int_0^\infty J_1(ur)\left(1-\cos\frac{uz}{\alpha}\right)\frac{du}{u^2} = \frac{z^2}{2\alpha^2 r} - \delta_\alpha(z)\left(\frac{z\sqrt{z^2-\alpha^2r^2}}{2\alpha^2 r} - \frac{1}{2}r\ln\frac{z+\sqrt{z^2-\alpha^2r^2}}{\alpha r}\right)\\
&\int_0^\infty J_1(ur)\sin\frac{uz}{\alpha}\frac{du}{u} = \frac{z}{\alpha r} - \delta_\alpha(z)\left(\frac{z}{\alpha r} - \frac{\alpha r}{z+\sqrt{z^2-\alpha^2r^2}}\right)\\
&\delta_\alpha(z) = 0 \quad (0<z<\alpha r), \quad \delta_\alpha(z) = 1 \quad (0<\alpha r<z)
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Первые два интеграла (6.9) взяты из [8] (см. 2.12.16(9) и 2.12.16(5)), третий и пятый интегралы (6.9) взяты из [4] (см. 6.671(7) и 6.693(1)), четвертый интеграл получен на основании пятого интеграла.

Подставляя найденные выражения (6.7) и (6.8) для ϑ_*, u_* и w_* в соотношения вида (6.2), (6.3) и вычисляя интегралы по p [3] и по u с помощью формул (6.9), получим

$$
\vartheta = -\frac{r_*}{\lambda}\left[\delta_\alpha(z)\ln\frac{z+\Lambda_\alpha}{\alpha r} - \delta_\alpha(z-l)\ln\frac{z-l+L_\alpha}{\alpha r} + \mu\delta_\alpha(z)\frac{1}{\Lambda_\alpha} - \mu\delta_\alpha(z-l)\frac{1}{L_\alpha}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
u = {}& \frac{r_* m}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)}\Bigg\{-\delta_\alpha(z)\left(\frac{z\Lambda_\alpha}{2r} - \frac{1}{2}\alpha^2 r\ln\frac{z+\Lambda_\alpha}{\alpha r}\right) + \delta_\beta(z)\left(\frac{z\Lambda_\beta}{2r} - \frac{1}{2}\beta^2 r\ln\frac{z+\Lambda_\beta}{\beta r}\right) +\\
&+\delta_\alpha(z-l)\left[\frac{(z-l)L_\alpha}{2r} - \frac{1}{2}\alpha^2 r\ln\frac{z-l+L_\alpha}{\alpha r}\right] - \delta_\beta(z-l)\left[\frac{(z-l)L_\beta}{2r} - \frac{1}{2}\beta^2 r\ln\frac{z-l+L_\beta}{\beta r}\right] -\\
&-\mu\delta_\alpha(z)\left(\frac{z}{r} - \frac{\alpha^2 r}{z+\Lambda_\alpha}\right) + \mu\delta_\beta(z)\left(\frac{z}{r} - \frac{\beta^2 r}{z+\Lambda_\beta}\right) + \mu\delta_\alpha(z-l)\left(\frac{z-l}{r} - \frac{\alpha^2 r}{z-l+L_\alpha}\right) -\\
&-\mu\delta_\beta(z-l)\left(\frac{z-l}{r} - \frac{\beta^2 r}{z-l+L_\beta}\right)\Bigg\} + \frac{p_*}{\rho V^2}\left[\delta_\beta(z)\left(\frac{z}{r} - \frac{\beta^2 r}{z+\Lambda_\beta}\right) - \delta_\gamma(z)\left(\frac{z}{r} - \frac{\gamma^2 r}{z+\Lambda_\gamma}\right) -\right.\\
&\left.-\delta_\beta(z-l)\left(\frac{z-l}{r} - \frac{\beta^2 r}{z-l+L_\beta}\right) + \delta_\gamma(z-l)\left(\frac{z-l}{r} - \frac{\gamma^2 r}{z-l+L_\gamma}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w = {}& \frac{r_* m}{\lambda(\beta^2-\alpha^2)}\Bigg\{\delta_\alpha(z)\left(z\ln\frac{z+\Lambda_\alpha}{\alpha r} - \Lambda_\alpha\right) - \delta_\beta(z)\left(z\ln\frac{z+\Lambda_\beta}{\beta r} - \Lambda_\beta\right) -\\
&-\delta_\alpha(z-l)\left[(z-l)\ln\frac{z-l+L_\alpha}{\alpha r} - L_\alpha\right] + \delta_\beta(z-l)\left[(z-l)\ln\frac{z-l+L_\beta}{\beta r} - L_\beta\right] +\\
&+\mu\delta_\alpha(z)\ln\frac{z+\Lambda_\alpha}{\alpha r} - \mu\delta_\beta(z)\ln\frac{z+\Lambda_\beta}{\beta r} - \mu\delta_\alpha(z-l)\ln\frac{z-l+L_\alpha}{\alpha r} + \mu\delta_\beta(z-l)\ln\frac{z-l+L_\beta}{\beta r}\Bigg\} -\\
&-\frac{p_*}{\rho V^2}\left[\delta_\beta(z)\ln\frac{z+\Lambda_\beta}{\beta r} + \gamma^2\delta_\gamma(z)\ln\frac{z+\Lambda_\gamma}{\gamma r} - \delta_\beta(z-l)\ln\frac{z-l+L_\beta}{\beta r} - \gamma^2\delta_\gamma(z-l)\ln\frac{z-l+L_\gamma}{\gamma r}\right]\\
&\delta_\beta(z) = 0 \quad (0<z<\beta r), \quad \delta_\beta(z) = 1 \quad (0<\beta r<z)
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

$$\delta_\gamma(z) = 0 \quad (0 < z < \gamma r), \quad \delta_\gamma(z) = 1 \quad (0 < \gamma r < z)$$

$$\Lambda_\alpha = \sqrt{z^2 - \alpha^2 r^2}, \quad L_\alpha = \sqrt{(z-l)^2 - \alpha^2 r^2}$$

$$\Lambda_\beta = \sqrt{z^2 - \beta^2 r^2}, \quad L_\beta = \sqrt{(z-l)^2 - \beta^2 r^2}$$

$$\Lambda_\gamma = \sqrt{z^2 - \gamma^2 r^2}, \quad L_\gamma = \sqrt{(z-l)^2 - \gamma^2 r^2}$$

При $z < 0$ величины ϑ, u и w равны нулю по построению.

Анализ формул (6.10) показывает, что есть шесть конусообразных фронтов, которые определяются формулами

$$z_\alpha = r - \frac{z-l}{\alpha} = 0, \quad z_\beta = r - \frac{z-l}{\beta} = 0, \quad z_\gamma = r - \frac{z-l}{\gamma} = 0$$
$$\zeta_\alpha = r - \frac{z}{\alpha} = 0, \quad \zeta_\beta = r - \frac{z}{\beta} = 0, \quad \zeta_\gamma = r - \frac{z}{\gamma} = 0 \tag{6.11}$$

Нетрудно убедиться, что температура $\vartheta = 0$ при $\zeta_\alpha > 0$, а перемещения $u = w = 0$ при $\zeta_\beta > 0$. При переходе через фронты $\zeta_\alpha = 0$ и $z_\alpha = 0$ температура меняется скачком на бесконечную величину, а при переходе через фронты (6.11) перемещения u и w меняются непрерывно.

Используя выражения (6.10) для u и w, по формулам (5.6) и (5.7) можно найти деформации и напряжения. При переходе через фронты (6.11) деформации и напряжения меняются скачком на бесконечную величину.

Работа выполнена про финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-01-00346).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наук. думка, 1976. 310 с.
2. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.
3. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 466 с.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
5. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
6. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
7. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука. 1983. 750 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.01.2002