

УДК 531.383

© 2003 г. Д.М. КЛИМОВ

### ОБ ОДНОМ ВИДЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Если на движущуюся ленту положить груз, движение которого стеснено пружиной, то при некоторых условиях возникают колебания с амплитудой определенной величины (автоколебания). Источником энергии автоколебаний является движение ленты с постоянной скоростью. Указанное явление изучается в ряде публикаций [1, 2].

В настоящей статье изучается более сложная схема взаимодействия элементов механической системы, когда развитие автоколебаний носит более сложный характер по сравнению с упомянутыми публикациями.

1. Будем изучать автоколебания в системе, изображенной на фиг. 1. На массу, расположенную на бесконечной и движущейся с постоянной скоростью  $v$  лентой, действуют силы сухого трения по закону, изображенному на фиг. 2.

Сила сухого трения в области нуля относительной скорости может быть аппроксимирована суммой двух составляющих: одна составляющая пропорциональна  $v_{rel}$ , другая записывается в виде  $k \operatorname{sign} v_{rel}$ . Коэффициент  $k$  зависит от силы давления между грузом и лентой и часто принимается постоянным. Будем считать, что  $k = k_1 - k_2 x^2$ , где постоянные коэффициенты  $k_1, k_2$  являются положительными. Физическое основание такого представления видно из фиг. 3. При отклонении груза от вертикали на величину  $x$  сила давления уменьшается пропорционально  $x^2$ . Так как  $k > 0$ , то

$$k_1 - k_2 x^2 \geq 0 \quad (1.1)$$

Масштабируя должным образом коэффициенты и переменные, запишем уравнение движения массы в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = 2h \left( \frac{dx}{dt} - 1 \right) - (k_1 - k_2 x^2) \operatorname{sign} \left( \frac{dx}{dt} - 1 \right) \quad (1.2)$$

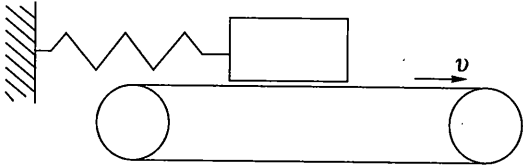
При этом скорость ленты принимается равной 1, а относительная скорость массы и ленты равной  $dx/dt - 1$ . Коэффициент  $h$ , как видно из фиг. 2, является положительным.

Выполним замену переменных по формулам

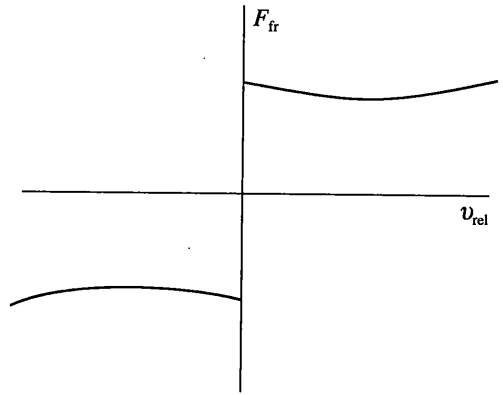
$$x = a \sin \varphi, \quad dx/dt = a \cos \varphi$$

Для новых переменных  $a$  и  $\varphi$  получим следующую систему дифференциальных уравнений:

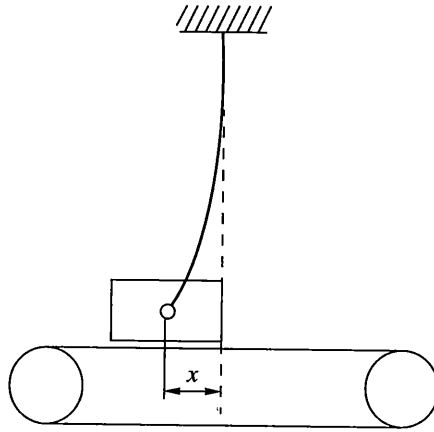
$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} \sin \varphi + a \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi &= a \cos \varphi \\ \frac{da}{dt} \cos \varphi - a \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi &= -a \sin \varphi + 2h(a \cos \varphi - 1) - \\ &- (k_1 - k_2 a^2 \sin^2 \varphi) \operatorname{sign}(a \cos \varphi - 1) \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Откуда следует

$$\frac{da}{dt} = 2h(a \cos \varphi - 1) \cos \varphi - (k_1 - k_2 a^2 \sin^2 \varphi) \text{sign}(a \cos \varphi - 1) \cos \varphi \quad (1.3)$$

Будем считать правую часть уравнения малой и осредним ее по быстрой переменной  $\varphi$ . Тогда вместо уравнения (1.3) получим приближенное уравнение

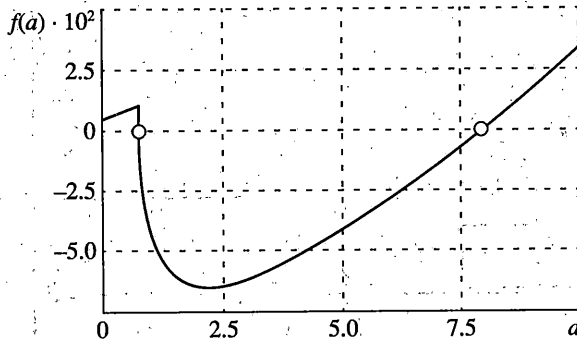
$$\frac{da}{dt} = ha - \frac{2(3k_1 + k_2 - k_2 a^2) \sqrt{a^2 - 1}}{3a\pi}$$

которое перепишем в более простом виде, включая множитель  $2/\pi$  в коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  и не изменяя их обозначений. В результате будем иметь уравнение

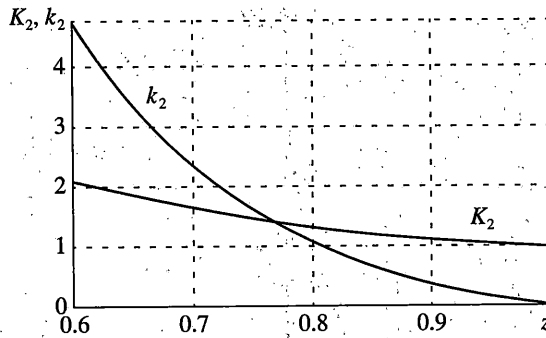
$$\frac{da}{dt} = ha - \frac{(3k_1 + k_2 - k_2 a^2) \sqrt{a^2 - 1}}{3a} = f(a) \quad (1.4)$$

2. Интегрируя уравнение (1.4), получим

$$\frac{a^2 h}{2} - \left[ \sqrt{a^2 - 1} + \arcsin\left(\frac{1}{a}\right) \right] \left( \frac{k_2}{3} + k_1 \right) + \frac{k_2 (a^2 - 1)^{3/2}}{9} = t + C$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Использование решения в таком виде достаточно сложно. Поэтому перейдем к нахождению положений равновесий уравнения (1.4), определяющих режимы автоколебаний исходной системы.

Типичный график правой части уравнения (1.4) представлен на фиг. 4 ( $h = 0.01, k_1 = 0.1, k_2 = 0.001$ ). Из этого рисунка видно, что уравнение (1.4) имеет два положения равновесия, отмеченные крестиком. Первое положение равновесия (для меньшего значения  $a$ ), которому соответствуют автоколебания, является устойчивым. Второе положение равновесия (для большего значения  $a$ ) неустойчиво. В ряде случаев второго положения равновесия вообще не существует, вследствие ограничения (1.1).

При изменении параметров кривая  $f(a)$  может смещаться вверх, и положения равновесия сближаются. Далее они сливаются в одно, а потом совсем исчезают. В последнем случае амплитуда колебаний нарастает, пока она не достигнет величины, определяемой формулой (1.1).

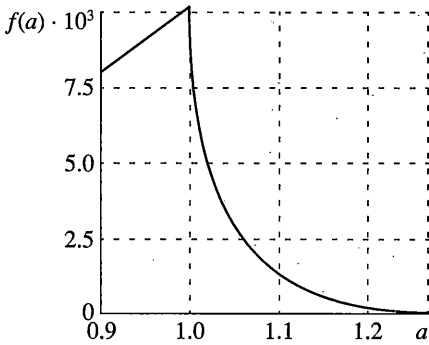
Найдем условия, при которых  $f(a) = 0$  и  $f'(a) = 0$ .

Функция  $f(a) = 0$ , если

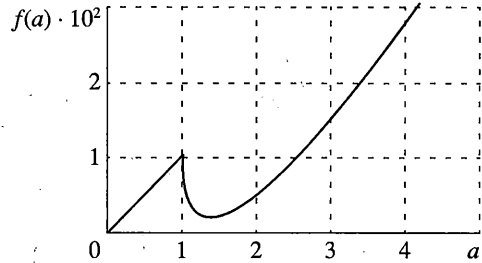
$$\sqrt{a^2 - 1}(k_2 a^2 - k_2 - k_1) + 3a^2 h = 0 \quad (2.1)$$

Ее производная  $f'(a) = 0$ , если

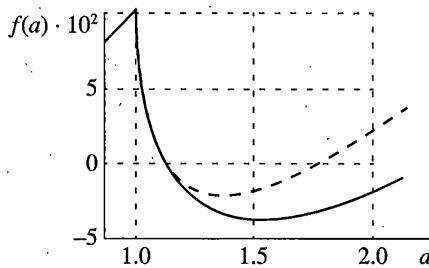
$$(2a^4 - a^2 - 1)k_2 - 3k_1 + 3a^2 h \sqrt{a^2 - 1} = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Выполняя в уравнениях (2.1) и (2.2) замену  $a^2 = z^2 + 1$ ,  $z \geq 0$ , получим

$$k_2 z^3 + 3hz^2 - 3k_1 z + 3h = 0 \tag{2.3}$$

$$2k_2 z^4 + 3hz^3 + 3k_2 z^2 + 3hz - 3k_1 = 0$$

Откуда получим

$$\frac{k_1}{h} = \frac{z^2 + 3}{2z}, \quad \frac{k_2}{h} = \frac{3(z^2 - 1)}{2z^3} \tag{2.4}$$

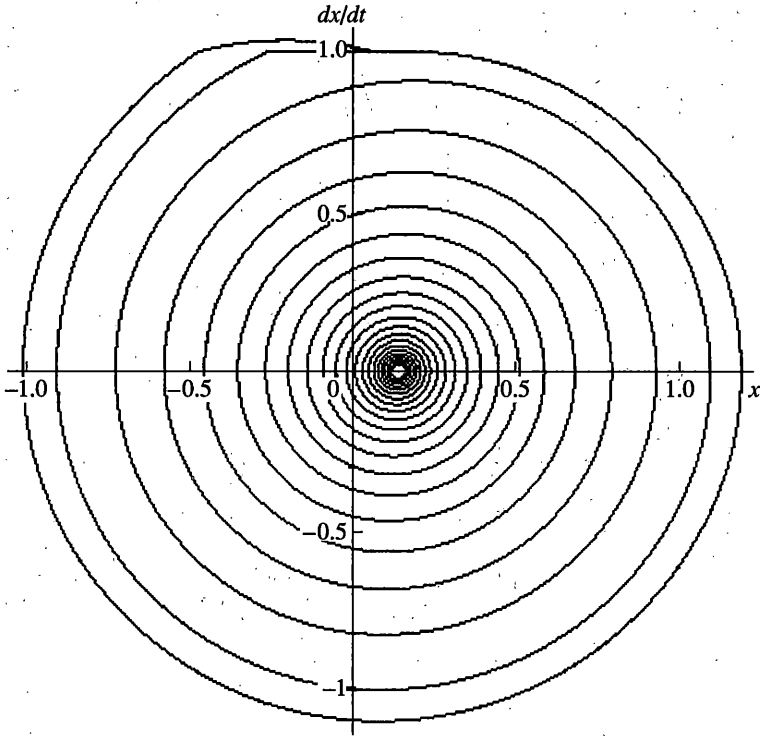
Если в уравнениях (2.3) положить  $k_2 = 0$ , то их решение принимает форму  $k_1/h = 2$ ,  $z = 1$ . Остальные решения не имеют физического смысла. Отсюда видно, что переход от устойчивых автоколебаний к неустойчивому движению происходит при  $k_1 = 2h$ , а единственное положение равновесия уравнения (1.4) находится в точке  $a = \sqrt{2}$ .

Коэффициент  $k_2$  не может принимать произвольные значения. Для определения области его изменения перепишем условие (1.1) следующим образом:

$$\frac{k_1}{h} \geq \frac{k_2}{h}(z^2 + 1) \tag{2.5}$$

Обозначая граничное значение  $k_2$  через  $K_2$  с учетом (2.4), находим

$$\frac{K_2}{h} = \frac{z^2 + 3}{2z(z^2 + 1)} \tag{2.6}$$



Фиг. 9

Из фиг. 5 видно, что кривые  $k_2(z)$  и  $K_2(z)$  пересекаются при  $z = 0.75414$ . Решая одновременно уравнения (2.3), (2.6) относительно  $k_1/h, k_2/h, z$ , находим

$$\frac{k_1}{h} = \frac{\sqrt{13\sqrt{57} + 81}}{4\sqrt{2}} = 2.36609$$

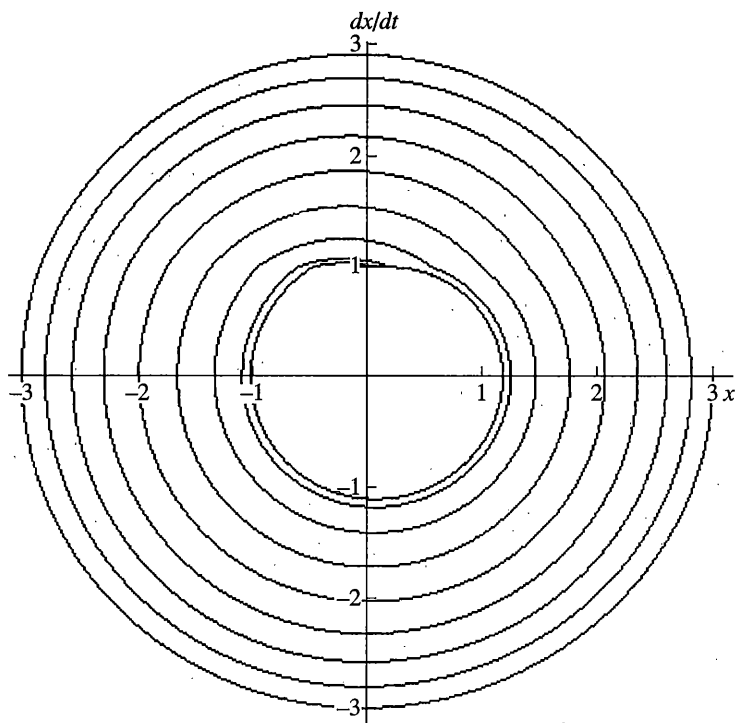
$$\frac{k_2}{h} = \frac{\sqrt{13\sqrt{3}\sqrt{19} + 81}(\sqrt{6}\sqrt{19} - 5\sqrt{2})}{32} = 1.50828$$

$$z = \frac{\sqrt{13\sqrt{13}\sqrt{19} + 81}(\sqrt{6}\sqrt{19} - 5\sqrt{2})}{64} = 0.75414$$

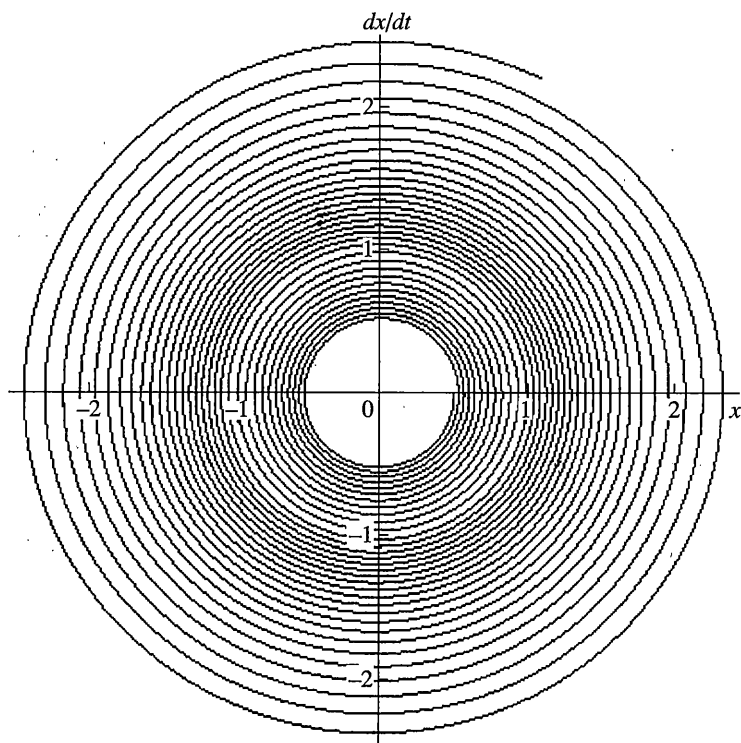
График  $f(a)$ , соответствующий этим значениям, приведен на фиг. 6. Случай, соответствующий неустойчивому движению, с параметрами  $h = 0.01, k_1 = 0.018, k_2 = 0.001$ , показан на фиг. 7.

Некоторое представление о влиянии параметров можно получить из фиг. 8, где для верхней кривой  $h = 0.1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.05$ , а для нижней —  $h = 0.1, k_1 = 0.25, k_2 = 0.001$ .

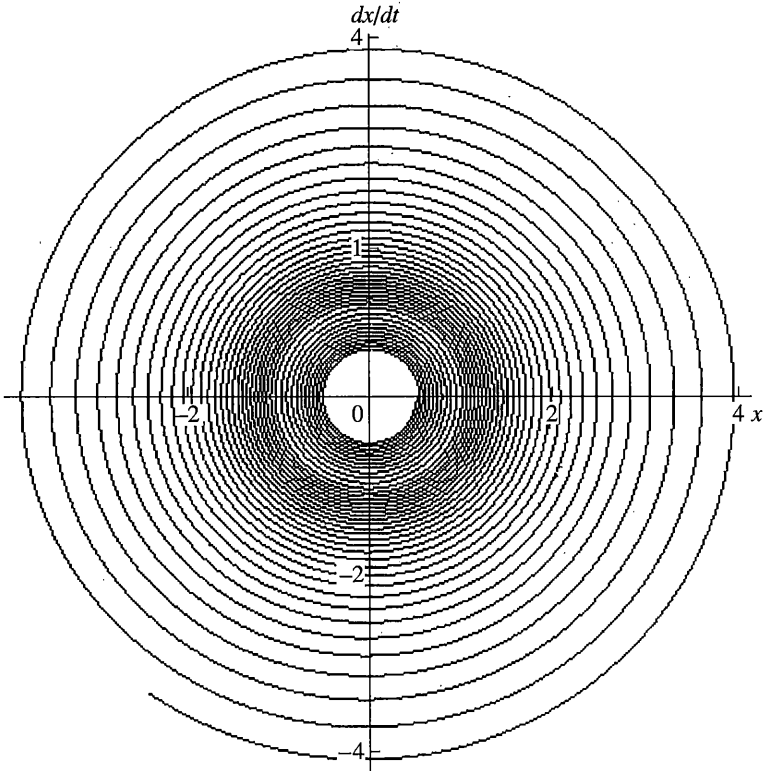
3. В заключение приведем результаты численного интегрирования уравнения (1.2) с учетом условия (1.1) для различного сочетания параметров системы. На фиг. 9 приведены результаты вычислений для  $h = 0.03, k_1 = 0.2, k_2 = 0.001, x(0) = 0.12, y(0) = 0$ . На фиг. 10 — для  $h = 0.03, k_1 = 0.2, k_2 = 0.001, x(0) = 3, y(0) = 0$ . При значениях параметров  $h = 0.01, k_1 = 0.0166, k_2 = 0.01, x(0) = 0.5, y(0) = 0$  (фиг. 11), имеем случай, близкий к



Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12

случаю  $f(a) = 0, f'(a) = 0$ . Параметрам  $h = 0.01, k_1 = 0.018, k_2 = 0.001, x(0) = 0.5, y(0) = 0$  (фиг. 12) соответствует неустойчивое движение.

Проведенное исследование показывает, что упругая податливость элементов конструкции может оказывать существенное влияние на автоколебания и развивающиеся колебания в этой конструкции. Учет таких явлений может оказаться важным при изучении явлений торможения самолетов и поездов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
2. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении // ЖТФ. 1944. Т. 14. Вып. 4-5. С. 276-282.

Москва

Поступила в редакцию  
10.01.2003