

УДК 531.8

© 2003 г. Д.В. БАЛАНДИН, Н.Н. БОЛОТНИК, В.А. ПАРФЕНОВ

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОТИВОУДАРНЫХ ИЗОЛЯТОРОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

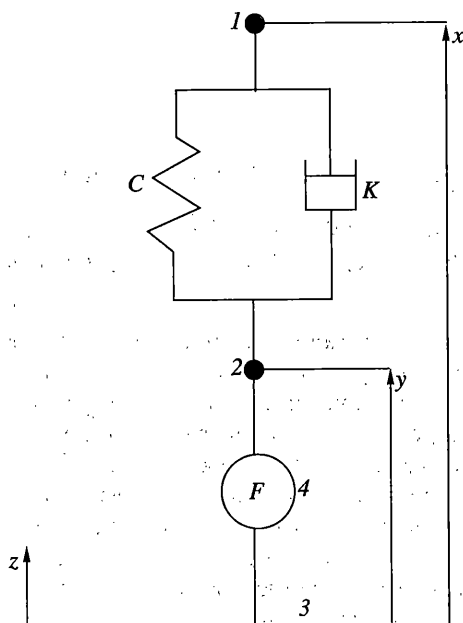
Обсуждается проблема оптимальной противоударной изоляции объектов, моделируемых системой двух тел, соединенных линейным вязкоупругим элементом. Даются общая постановка задачи оптимизации и ее важные частные случаи – задача о предельных возможностях противоударной изоляции и задача параметрического синтеза изоляторов. Определяются оптимальные параметры пассивных изоляторов, состоящих из пружины и демпфера с вязким или сухим трением. Минимизируется максимальное смещение тела, связанного с основанием, подверженным ударным воздействиям, посредством изолятора, при условии, что сила взаимодействия между телами объекта не превышает заданной максимально допустимой величины. Оптимальное значение минимизируемого критерия для каждого типа изолятора сравнивается с абсолютным минимумом, определенным в результате анализа предельных возможностей защиты от ударного воздействия заданного типа. Обсуждается связь рассматриваемых задач с проблемой оптимизации средств защиты от травм, причиняемых ударами, на транспорте, в промышленности, строительстве и спорте.

**1. Механическая модель и критерии качества противоударной изоляции.** Рассматривается механическая система (фиг. 1), состоящая из двух тел (материальных точек 1 и 2), соединенных пружиной и демпфером с линейными характеристиками. Тело 2 связано с подвижным основанием 3 при помощи противоударного изолятора 4. Противоударный изолятор представляет собой управляющее устройство, генерирующее силу взаимодействия основания с телом 2 с целью уменьшения механических нагрузок в системе при ударном внешнем воздействии на основание. Предполагается, что оба тела и основание могут двигаться прямолинейно вдоль одной и той же прямой. Движение системы описывается совокупностью дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1(\ddot{x} + \ddot{z}) + K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y) &= 0 \\ m_2(\ddot{y} + \ddot{z}) + K(\dot{y} - \dot{x}) + C(y - x) &= F \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы тел 1 и 2 соответственно,  $x$  и  $y$  – координаты тел 1 и 2 относительно основания,  $z$  – координата основания относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета,  $K$  – коэффициент демпфирования ( $K > 0$ ),  $C$  – коэффициент жесткости пружины ( $C > 0$ ),  $F$  – управляющая сила, приложенная к телу 2 со стороны изолятора. Начала отсчета координат  $x$  и  $y$  выбраны так, что при  $x = y$  пружина, расположенная между телами 1 и 2, недеформирована. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  тела 1 и 2 покоятся в положениях, отвечающих нулевым значениям координат  $x$  и  $y$ , т.е. уравнения (1.1) рассматриваются при начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Ускорение основания  $\ddot{z}$  считается заданной функцией времени. Функция  $\ddot{z}(t)$  характеризует внешнее воздействие, приложенное к основанию.

Описанную систему можно трактовать, например, как упрощенную линейную модель вязкоупругого тела на подвижном основании, подвергающемся интенсивным ударным нагрузкам, которые могут привести к разрушению или серьезным повреждениям тела. Изолятор служит для уменьшения этих нагрузок. За критерии качества противоударной защиты принимаются максимум модуля смещения тела 2 относительно основания

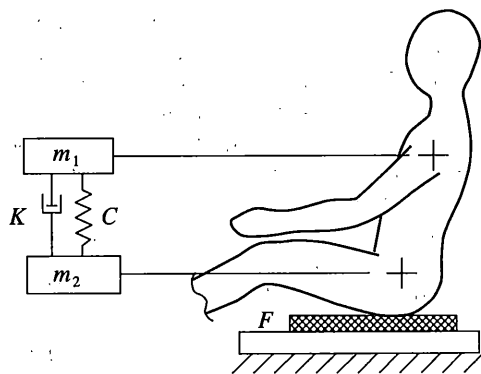
$$J_1(F) = \max_{t \in [0, \infty)} |y(t)| \quad (1.3)$$

и максимум модуля силы, действующей на тело 1

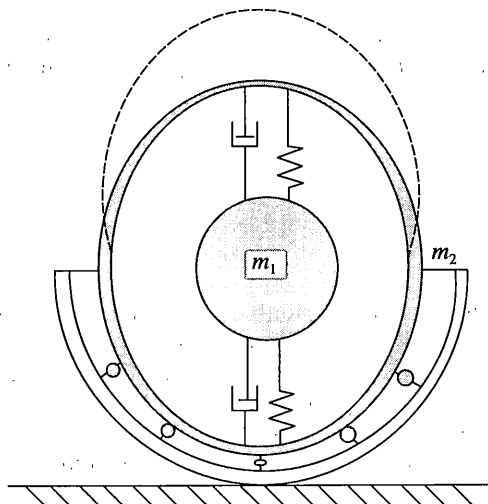
$$J_2(F) = \max_{t \in [0, \infty)} |m_1(\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t))| = \max_{t \in [0, \infty)} |K(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) + C(x(t) - y(t))| \quad (1.4)$$

Критерий  $J_1$  характеризует смещение тела, защищаемого от ударных нагрузок, относительно основания, а  $J_2$  – внутреннюю силу (напряжение), действующую между составляющими этого тела.

В последнее время системы, подобные рассмотренной выше, находят применение для анализа эффективности и оптимизации средств защиты от травм на транспорте, в промышленности, спорте и других сферах деятельности. Например, при моделировании активной системы защиты водителя и пассажиров транспортного средства от травм при столкновениях с другим транспортным средством или с неподвижным препятствием основание отождествляется с рамой или кузовом транспортного средства, тело 1 – с водителем или пассажиром, тело 2 моделирует сиденье, а вязкоупругий элемент – механические свойства сиденья и ремней безопасности. Изолятор генерирует



Фиг. 2



Фиг. 3

управляющую силу между кузовом (рамой) транспортного средства и сиденьем. В этом случае  $J_1$  – максимальная величина смещения сиденья относительно кузова, а  $J_2$  – максимальная величина силы, действующей на водителя или пассажира. Другой пример связан с противоударным устройством, защищающим пилота вертолета от травм позвоночника при аварийном приземлении с высокой вертикальной скоростью (фиг. 2). Здесь роль изолятора играет подушка сиденья, тела 1 и 2 отождествляются соответственно с верхней и нижней частью туловища пилота. Пружина и демпфер моделируют вязкоупругие свойства позвоночника. Основание отождествляется с основанием сиденья, которое соединено с рамой вертолета. Критерий  $J_1$  определяет максимальную деформацию подушки сиденья, а критерий  $J_2$  – максимальную силу, развиваемую в позвоночнике.

Приведем еще один пример, связанный со шлемом, используемым, в частности, в спорте или на строительных работах для предотвращения черепномозговых травм при ударах (фиг. 3). В этом случае основанием служит жесткая внешняя оболочка

шлема, тело 2 моделирует часть черепа, непосредственно воспринимающую удар через изолирующую подкладку шлема, а тело 1 – остальную часть черепа и мозг. Коэффициент жесткости пружины  $C$  моделирует, главным образом, упругие свойства черепа, а коэффициент демпфирования  $K$  – диссипативные свойства мозга. Роль изолятора играет подкладка шлема, отделяющая его оболочку от головы. Критерий  $J_1$  характеризует максимальное смещение оболочки шлема относительно головы в результате реакции на удар и, следовательно, толщину удароизолирующей подкладки. Критерий  $J_2$ , будучи разделенным на массу  $m_1$ , определяет максимальное ускорение тела 1. Это ускорение можно интерпретировать как ускорение всей головы, поскольку в моделях рассматриваемого типа масса  $m_1$  составляет около 90% массы головы. Более подробное описание динамических моделей и критериев качества противоударной изоляции применительно к системам травмобезопасности содержится в [1–7].

**2. Постановка задачи оптимизации.** Будем решать задачу оптимизации характеристики изолятора (управляющей силы  $F$ ) в следующей формулировке.

*Задача 1.* Для системы, описываемой дифференциальными уравнениями (1.1) с начальными условиями (1.2) при заданном внешнем воздействии  $\ddot{z}(t)$ , найти управляющую силу  $F$ , принадлежащую определенному классу  $\Phi$ , минимизирующую критерий (1.3) при условии, что критерий (1.4) не превышает заданной величины  $P$ . Иными словами, требуется найти функцию  $F_0 \in \Phi$  такую, что

$$J_1(F_0) = \min_{F \in \Phi} J_1(F) \quad (2.1)$$

при условии

$$J_2(F_0) \leq P \quad (2.2)$$

В ситуациях, приведенных в качестве примеров в предыдущем пункте, задача 1 отвечает минимизации смещения сиденья транспортного средства при условии, что сила, действующая на водителя (или пассажира), не превышает заданной максимально допустимой величины, минимизации деформации подушки сиденья при ограничении на максимальную нагрузку позвоночника пилота вертолета или минимизации деформации подкладки шлема при ограничении на максимально допустимое ускорение головы спортсмена или строительного рабочего.

В общем случае управляющая сила  $F$  может зависеть от координат  $(x, y)$ , скоростей  $(\dot{x}, \dot{y})$  и времени  $t$ , если указанные пять величин доступны точному измерению, т.е.  $F = F(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ . В задачах оптимальной противоударной изоляции предполагается, что функция  $F$  кусочно-непрерывна по совокупности переменных. Описанный класс функций включает практически все физически реализуемые законы управления. Назовем этот класс  $\Phi_0$ . В случае, когда никаких других ограничений на функцию  $F$  не налагается, задача 1 называется задачей о предельных возможностях противоударной изоляции, так как ее решение дает абсолютный (определенный в максимально широком классе управляющих функций) минимум оптимизируемого критерия  $J_1$ . Отметим, что для определения этого абсолютного минимума достаточно решить задачу 1 в гораздо более узком классе функций, а именно, в классе функций, зависящих только от времени  $t$ . Это связано с тем, что функция  $\hat{F}(t) = F(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), t)$ , вычисляемая вдоль решения соответствующей задачи (1.1), (1.2), есть функция  $t$ . Отметим также, что в общем случае минимум функционала  $J_1(F)$  при ограничении (2.2) не достигается в классе функций  $\Phi_0$  и задачу о предельных возможностях противоударной изоляции следует ставить как задачу определения точной нижней грани оптимизируемого функционала; подробнее см. [8].

При проектировании противоударных изоляторов, как правило, задачу 1 решают в некотором подклассе класса  $\Phi_0$ . Укажем два наиболее важных подкласса. Первый подкласс есть множество функций из  $\Phi_0$ , не зависящих явно от времени. Этому требованию удовлетворяют пассивные противоударные изоляторы. Другой подкласс есть параметрическое семейство функций  $F = F_\alpha(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ , где  $F_\alpha$  – заданная функция аргументов  $x, y, \dot{x}, \dot{y}, t$  и совокупности параметров  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ . Предполагается, что  $F_\alpha \in \Phi_0$  при любом допустимом  $\alpha$ . В последнем случае задача 1 сводится к минимизации функции многих переменных  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  при наличии ограничений, т.е. к задаче математического программирования. Примером функции  $F_\alpha$  могут служить характеристики широко распространенных пассивных упругодемпфированных противоударных изоляторов – линейного ( $F_\alpha = \alpha_1 \dot{x} + \alpha_2 x$ ) и линейно-квадратичного ( $F_\alpha = \alpha_1 \dot{x}^2 + \alpha_2 x$ ). Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно.

Задача 1 обобщает задачу оптимальной противоударной изоляции системы с одной степенью свободы и сводится к последней при замене упругодемпфированного элемента, соединяющего тела 1 и 2 (фиг. 1), абсолютно жесткой связью между этими телами. Впервые задача оптимальной противоударной изоляции для систем с одной степенью свободы была, по-видимому, сформулирована независимо в [9] и в [10]. К настоящему времени эта задача исследована с достаточной полнотой. Результаты этих исследований изложены в [7, 10, 11–13]. Наиболее полный библиографический список работ по этой проблеме приведен в [7, 14].

**3. Задача о предельных возможностях противоударной изоляции.** Анализу предельных возможностей противоударной изоляции системы, описываемой уравнениями (1.1) с начальными условиями (1.2), посвящена статья [8]. Изложим кратко некоторые результаты этой статьи, которые будут использованы в дальнейшем. Наряду с задачей 1 рассматривается аналогичная задача для “жесткой” системы, в которой тела 1 и 2 жестко соединены друг с другом ( $x \equiv y$ ). Жесткая система имеет одну степень свободы и описывается уравнением с начальными условиями

$$(m_1 + m_2)(\ddot{y} + \ddot{z}) = F, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad (3.1)$$

Сила, действующая на тело 1, равна  $m_1 F / (m_1 + m_2)$ . Соответственно критерий (1.4) заменяется на

$$\tilde{J}_2(F) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \max_{t \in [0, \infty)} |F(t)| \quad (3.2)$$

и задача о предельных возможностях противоударной изоляции ставится следующим образом.

**Задача 2.** Для системы, описываемой уравнением (3.1) при заданном  $\ddot{z}$ , найти кусочно-непрерывную функцию  $\tilde{F}_0(t)$  такую, что

$$\tilde{J}_1(\tilde{F}_0) = \min_F \tilde{J}_1(F), \quad \tilde{J}_2(\tilde{F}_0) \leq P \quad (3.3)$$

где  $\tilde{J}_1(F) = \max_t |y(t)|$  – максимум модуля смещения системы относительно основания (см. (1.3)). Здесь и в дальнейшем тильда указывает, что соответствующая величина относится к задаче для жесткой системы.

Установлено, что решения задач 1 и 2 связаны неравенством

$$\frac{|J_1(F_0) - \tilde{J}_1(\tilde{F}_0)|}{\tilde{J}_1(\tilde{F}_0)} \leq \frac{P}{C\tilde{J}_1(\tilde{F}_0)} \quad (3.4)$$

где  $C$  – коэффициент жесткости пружины, фигурирующий в уравнениях (1.1). Это неравенство дает оценку аппроксимации исходной системы жесткой моделью по минимизируемому критерию. Правая часть (3.4) есть отношение статического растяжения пружины, связывающей тела 1 и 2, силой  $P$  к предельно возможному минимуму максимального отклонения жесткой системы при реакции на внешнее возмущение. Чем меньше это отклонение, тем точнее аппроксимация. Задача о предельных возможностях противоударной изоляции жесткой системы значительно проще соответствующей задачи для упругой системы. Во многих практически важных случаях величина  $\tilde{J}_1(\tilde{F}_0)$  эффективно вычисляется (аналитически или численно).

Отметим, что аппроксимация по минимизируемому критерию не влечет аппроксимацию по управлению. Оптимальные значения функционалов  $J_1(F_0)$  и  $\tilde{J}_1(\tilde{F}_0)$  могут быть близки, а соответствующие оптимальные управления  $F_0(t)$  и  $\tilde{F}_0(t)$  значительно отличаться в качественном и количественном отношениях (см. [8]).

Рассмотрим числовой пример, связанный с практической проблемой проектирования устройства, предохраняющего правую ногу водителя автомобиля от перелома в случае лобового столкновения автомобиля с препятствием на небольших скоростях ( $\sim 30-40$  км/ч). Как правило, в момент столкновения правая нога водителя нажимает на педаль тормоза и подвергается большой осевой ударной нагрузке, что и приводит к перелому. Для уменьшения опасных последствий удара предлагается узел, содержащий тормозную педаль, сделать податливым с целью изоляции ноги от сильных ударных нагрузок. Иными словами, автомобиль предлагается оборудовать специальным противоударным изолятором.

Механические свойства ноги человека при ударных воздействиях, характерных для столкновения автомобиля с препятствием, достаточно хорошо моделируются простой системой, состоящей из массы (материальной точки) и вязкоупругого элемента Фойгта [15]. Эта модель отвечает части механической системы, изображенной на фиг. 1, включающей массу  $m_1$  и вязкоупругий элемент. Масса  $m_1$ , коэффициент демпфирования  $K$  и коэффициент жесткости  $C$  этой модели, полученные на основе идентификации по экспериментальным данным, имеют следующие значения:

$$m_1 = 10 \text{ кг}, \quad K = 1.5 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}}{\text{м}}, \quad C = 1000 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \quad (3.5)$$

Эффективная масса  $m_1$  учитывает как массу бедра, так и массу голени, в то время как коэффициенты  $K$  и  $C$  учитывают только вязкоупругие характеристики голени, которая наиболее уязвима при лобовых столкновениях на небольших скоростях. Максимальная продольная сила, которую может выдержать голень при ударных нагрузках, оценивается величиной  $P = 4$  кН.

Масса  $m_2$  модели, изображенной на фиг. 1, в данной ситуации отвечает массе подвижного узла, к которому прилагается управляющая сила  $F$ . Эта масса является параметром проектируемой системы и может варьироваться в довольно широких пределах. Отметим, что абсолютный минимум критерия  $J_1$ , который находится в результате решения задачи о предельных возможностях противоударной изоляции рассматриваемой системы, не зависит от  $m_2$ .

Рассмотрим случай, когда автомобиль совершает наезд на неподвижное препятствие со скоростью  $v_0 = 10$  м/с (36 км/ч). Удар считается мгновенным и абсолютно неупругим, т.е. автомобиль мгновенно останавливается в момент наезда. В этом случае имеем

$$\ddot{z}(t) = -v_0\delta(t) \quad (3.6)$$

где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака.

Решая задачу 2 для жесткой системы, получаем

$$\tilde{J}_1(\tilde{F}_0) = \frac{m_1 v_0^2}{2P} = 0.125 \text{ м} \quad (3.7)$$

В соответствии с (3.4) имеем

$$\frac{|J_1(F_0) - \tilde{J}_1(\tilde{F}_0)|}{\tilde{J}_1(\tilde{F}_0)} \leq 0.032$$

т.е. относительная погрешность (по оптимальному значению минимизируемого критерия) аппроксимации упругой системы жесткой моделью не превышает 3.2%. Абсолютная погрешность при этом не превышает 0.4 см.

**4. Оптимизация параметров пассивных упругодемпфированных изоляторов в случае мгновенного удара.** Пусть основание подвергается мгновенному удару  $\dot{z}(t) = -v_0\delta(t)$ , где  $v_0$  – величина, имеющая размерность скорости, а  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака (см. (3.6)). Без ограничения общности величина  $v_0$  считается положительной. Соответствующей ситуации всегда можно добиться подходящим выбором ориентации оси, вдоль которой происходит движение.

Рассматриваемый случай удобно трактовать следующим образом. До удара (при  $t < 0$ ) система, изображенная на фиг. 1, движется в инерциальной системе отсчета как единое целое со скоростью  $v_0$  в положительном направлении координатной оси; при этом координаты тел 1 и 2 относительно основания равны нулю ( $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0, t < 0$ ). В момент времени  $t = 0$  основание в результате удара (например, при столкновении с неподвижным препятствием) мгновенно останавливается. В момент остановки основания тела 1 и 2 продолжают двигаться с абсолютными скоростями  $v_0$ , которые совпадают со скоростями относительно основания, так как последнее теперь неподвижно. Таким образом, в случае, когда  $\dot{z}(t)$  имеет вид (3.6), уравнение (1.1) с начальными условиями (1.2) можно представить в виде

$$m_1 \ddot{x} + K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y) = 0 \quad (4.1)$$

$$m_2 \ddot{y} + K(y - \dot{x}) + C(y - \dot{x}) = F$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \quad (4.2)$$

Ограничимся изоляторами пассивного типа с характеристиками вида

$$F = -\alpha_1 |y|^r \text{sign} \dot{y} - \alpha_2 y \quad (r = 0, 1, 2) \quad (4.3)$$

Такие изоляторы состоят из параллельно соединенных пружины с коэффициентом жесткости  $\alpha_2$  и (нелинейного) демпфера с коэффициентом демпфирования  $\alpha_1$ . Случай  $r = 0$  отвечает сухому трению,  $r = 1$  – линейному вязкому трению, а  $r = 2$  – квадратичному вязкому трению.

Будем решать задачу 1, сформулированную в разделе 2, в классе управлений (4.3) при фиксированном  $r$ . В этом случае задача сводится к отысканию оптимальных параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

4.1. *Изолятор с характеристикой типа сухого трения.* Рассмотрим изолятор, состоящий только из демпфера с характеристикой вида

$$\begin{aligned} F &= -\alpha_1 \operatorname{sign} \dot{y}, & \text{если } \dot{y} \neq 0 \\ F &= -K(\dot{x} - \dot{y}) - C(x - y), & \text{если } \dot{y} = 0 \text{ и } |K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y)| \leq \alpha_1 \\ F &= -\alpha_1 \operatorname{sign}(K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y)), & \text{если } \dot{y} = 0 \text{ и } |K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y)| > \alpha_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Такая характеристика отвечает кулоновой модели сухого трения между основанием и телом 2. Величина  $\alpha_1$  здесь есть максимальная сила трения покоя, действующая между трущимися поверхностями. При  $\dot{y} \neq 0$  характеристика (4.4) совпадает с (4.3) в частном случае  $\alpha_2 = 0, r = 0$ . В рассматриваемом случае оптимизации подлежит только один параметр  $\alpha_1$ .

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам:

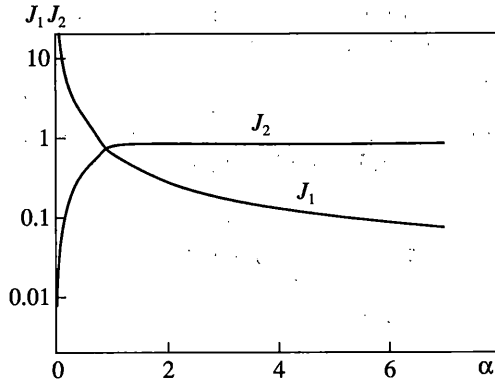
$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{v_0 \sqrt{m_1}}, & y' &= \frac{y}{v_0 \sqrt{m_1}}, & t' &= t \sqrt{\frac{C}{m_1}} \\ K' &= \frac{K}{\sqrt{Cm_1}}, & m_2' &= \frac{m_2}{m_1}, & P' &= \frac{P}{v_0 \sqrt{Cm_1}} \\ \alpha_1' &= \frac{\alpha_1}{v_0 \sqrt{Cm_1}}, & F' &= \frac{F}{v_0 \sqrt{Cm_1}}, & J_1' &= \frac{J_1}{v_0 \sqrt{m_1}}, & J_2' &= \frac{J_2}{v_0 \sqrt{Cm_1}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя выражения (4.5) в соотношения (4.1), (4.2) и (4.4) и опуская штрихи для удобства записи, получим аналогичные соотношения, в которых  $C = 1, m_1 = 1, v_0 = 1$ .

Из (4.4) вытекает, что управляющая сила  $F$  равна или  $\pm 1$  или  $-K(\dot{x} - \dot{y}) - (x - y)$ , в зависимости от величины скорости тела 2 относительно основания и модуля силы взаимодействия между телами 1 и 2. В каждом из этих случаев система (4.1) линейна и легко интегрируется (аналитически или численно). "Сшивая" решения в моменты перехода между различными участками линейности по координатам  $(x, y)$  и скоростям  $(\dot{x}, \dot{y})$ , получим функции  $x(t), y(t)$ , описывающие движение системы на всем интервале времени. Моментами смена участков линейности могут быть моменты обращения в нуль скорости  $\dot{y}$  или моменты, в которые выполняется равенство  $|K(\dot{x} - \dot{y}) + x - y| = \alpha_1$  при  $\dot{y} = 0$ . Это следует из выражения (4.4) для  $F$ . Вычисляя затем максимумы в правых частях равенств (1.3) и (1.4), получим значения функционалов  $J_1$  и  $J_2$ , которые в данном случае являются функциями параметров  $m_2, \alpha_1$  и  $K$ .

Чтобы избежать вычисления максимумов (1.3) и (1.4) на бесконечном интервале времени (что практически невозможно), можно воспользоваться следующим алгоритмом. Пусть  $t_i$  — момент ( $i$ -го) обращения в нуль скорости  $\dot{y}$ . Найдем максимум модуля силы, действующей на тело 1, на интервале времени  $[t_i, \infty)$ , считая, что тело 2 находится в положении  $y(t_i)$ . Этот максимум можно эффективно вычислить исходя из решения задачи Коши для одного уравнения второго порядка  $\ddot{x} + K\dot{x} + x = y(t_i)$ , считая начальными данными значения переменных  $x$  и  $\dot{x}$  в момент времени  $t_i$ . Обозначим эту вели-





Фиг. 4

чину через  $\sigma_i$ . Если  $\sigma_i \leq \alpha_1$ , то в соответствии с законом сухого трения (4.4), тело 2 будет оставаться неподвижным в положении  $y(t_i)$  при  $t > t_i$  и, следовательно

$$\begin{aligned}
 J_1(F) &= \max_{t \in [0, t_i]} |y(t)| \\
 J_2(F) &= \max_{t \in [0, t_i]} \{ \max |K(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) + x(t) - y(t)|, \sigma_i \}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Если  $\sigma_i > \alpha_1$ , то в некоторый момент времени  $\tilde{t}$ , когда выполнится равенство  $|K\dot{x}(\tilde{t}) + x(\tilde{t}) - y(t_i)| = \alpha_1$ , тело 2 возобновит движение относительно основания. В этом случае нужно интегрировать систему (4.1), (4.2) до следующего момента  $(t_{i+1})$  обращения в нуль скорости  $\dot{y}$  и повторить описанную процедуру. Существование (конечного) момента времени, начиная с которого тело 2 будет оставаться неподвижным, вытекает из полной диссипативности системы и закона Кулона для сухого трения.

На фиг. 4 изображены зависимости величин  $J_1$  и  $J_2$  от величины  $\alpha_1$  при фиксированных  $K = 1.5/\sqrt{10} \approx 0.4743$  и  $m_2 = 1$ . Приведенное (безразмерное) значение  $K$  отвечает размерным параметрам (3.5). Единичное значение безразмерного параметра  $m_2$  отвечает равенству масс тел 1 и 2. Качественное поведение представленных зависимостей сохраняется и при других значениях  $m_2$ . Ось абсцисс на фиг. 4 градуирована в линейном масштабе, а ось ординат – в логарифмическом.

С ростом  $\alpha_1$  величина  $J_1(\alpha_1)$  монотонно убывает, стремясь к нулю, а  $J_2(\alpha_1)$  монотонно возрастает, стремясь к постоянному значению  $J_2^*$ , отвечающему жесткому креплению тела 2 к основанию. Поэтому оптимальное значение параметра  $\alpha_1$ , минимизирующее величину  $J_1$  при ограничении  $J_2 \leq P$ , определяется как абсцисса точки пересечения прямой  $J_2 = P$  с графиком функции  $J_2(\alpha_1)$ , если  $P < J_2^*$ . Если  $P \geq J_2^*$ , то можно жестко связать тело 2 с основанием (формально это отвечает бесконечно большому значению параметра  $\alpha_1$ ); при этом  $J_1 = 0$ .

Найдем оптимальное значение коэффициента демпфирования  $\alpha_1$  и соответствующее значение критерия  $J_1$  для  $P = 4$  кН. Безразмерное значение  $P$ , отвечающее данному размерному значению в силу (4.5), равно 0.126. Пересекая прямой  $P = 0.126$  график

функции  $J_2(\alpha_1)$ , находим (безразмерное) значение оптимального коэффициента демпфирования  $\alpha_1 = 0.113$ , а затем по графику функции  $J_1(\alpha_1)$  определяем (безразмерное) минимальное смещение тела 2:  $J_1(0.116) = 6.210$ . В исходных размерных переменных оптимальные значения  $\alpha_1$  и  $J_1$  суть  $\alpha_1 = 3.67$  кН,  $J_1 = 0.196$  м. Таким образом, при  $m_1 = m_2 = 10$  кг минимальное смещение тела 2, достижимое изолятором с характеристикой типа сухого трения, в 1.57 раза превышает предельно возможное значение (0.125 м).

4.2. *Изолятор с линейной пружиной и линейным или квадратичным демпфером.* Этот случай отвечает характеристике (4.3) при  $r = 1$  или  $r = 2$ , т.е.

$$F = -\alpha_1 |\dot{y}|^r \text{sign} \dot{y} - \alpha_2 y \quad (r = 1, 2) \quad (4.7)$$

Оптимизации подлежат коэффициент демпфирования  $\alpha_1$  и коэффициент жесткости  $\alpha_2$ . Перейдем к безразмерным переменным и параметрам

$$\begin{aligned} t' &= \frac{P}{m_1 v_0} t, & x' &= \frac{P}{m_1 v_0^2} x, & y' &= \frac{P}{m_1 v_0} y \\ K' &= \frac{v_0}{P} K, & C' &= \frac{m_1 v_0^2}{P^2} C, & m_2' &= \frac{m_2}{m_1} \\ \alpha_1' &= \frac{v_0^r}{P} \alpha_1, & \alpha_2' &= m_1 \frac{v_0^2}{P^2} \alpha_2, & J_1' &= \frac{P}{m_1 v_0^2} J_1, & J_2' &= \frac{J_2}{P} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подстановка выражений (4.8) в соотношения (4.1), (4.2), (4.4), (2.1), (2.2) преобразует последние в аналогичные соотношения, в которых  $m_1 = 1$ ,  $v_0 = 1$ ,  $P = 1$ .

Задача 1 для изолятора с характеристикой (4.7) решалась численно. Для вычисления критериев  $J_1(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $J_2(\alpha_1, \alpha_2)$  при фиксированных значениях аргументов решалась (методом Рунге–Кутты) задача Коши (4.1), (4.2), где  $F = -\alpha_1 |\dot{y}|^r \text{sign} \dot{y} - \alpha_2 y$ , и вычислялись максимумы (1.3) и (1.4). При вычислении указанных максимумов интегрирование уравнений движения прекращалось в момент времени

$$\tau = \max(\tau_1, \tau_2) \quad (4.9)$$

где  $\tau_1$  и  $\tau_2$  моменты времени, определяемые из условий

$$\max_{t \in [0, \tau_1]} |y(t)| = \sqrt{\frac{2E(\tau_1)}{\lambda_{\min}^S}} \quad (4.10)$$

$$\max_{t \in [0, \tau_2]} |K(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) + C(x(t) - y(t))| = 2\sqrt{E(\tau_2)} \left( \frac{K}{\sqrt{\lambda_{\min}^M}} + \frac{C}{\sqrt{\lambda_{\min}^S}} \right) \quad (4.11)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} [\dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2 + C(x - y)^2 + \alpha_2 y^2] \quad (4.12)$$

$$\lambda_{\min}^M = \min(1, m_2), \quad \lambda_{\min}^S = \frac{1}{2} [(2C + \alpha_2) - \sqrt{4C^2 + \alpha_2^2}] \quad (4.13)$$

Величина  $E$  есть полная механическая энергия системы (4.1), (4.3).

Покажем, что максимумы по времени в выражениях (1.3) и (1.4) достигаются на интервалах времени  $[0, \tau_1]$  и  $[0, \tau_2]$  соответственно. Система уравнений (4.1), (4.7) может быть представлена в виде

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Sq = 0$$

$$q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$D = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K + \alpha_1 |\dot{q}_2|^{r-1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C + \alpha_2 \end{pmatrix}$$

При  $m_2 \neq 0$ ,  $K \neq 0$ ,  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$  матрицы  $M$ ,  $D$  и  $S$  – положительно-определенные, и уравнение (4.14) описывает колебательную систему, в которой действуют линейные потенциальные силы (потенциальная энергия которых выражается положительно-определенной квадратичной формой вектора  $q$ ) и диссипативные силы с полной диссипацией. В таких системах полная механическая энергия

$$E = \frac{1}{2}(M\dot{q}, \dot{q}) + \frac{1}{2}(Sq, q) \quad (4.15)$$

неотрицательна и монотонно убывает вдоль траектории движения, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Через  $(M\dot{q}, \dot{q})$  и  $(Sq, q)$  обозначены скалярные произведения соответствующих векторов.

Из линейной алгебры известно, что для положительно-определенной матрицы  $A$  размера  $n \times n$  справедливо неравенство [16]:

$$(Aq, q) \geq \lambda_{\min}^A \|q\|^2, \quad \|q\| = \sqrt{q_1^2 + \dots + q_n^2} \quad (4.16)$$

где  $\lambda_{\min}^A$  – минимальное собственное значение матрицы  $A$ , а  $\|q\|$  – евклидова норма  $n$ -вектора  $q$ .

Так как  $M$  и  $S$  – положительно-определенные матрицы, из (4.15) имеем

$$(Sq, q) \leq 2E, \quad (M\dot{q}, \dot{q}) \leq 2E \quad (4.17)$$

Из (4.16) и (4.17) вытекают неравенства

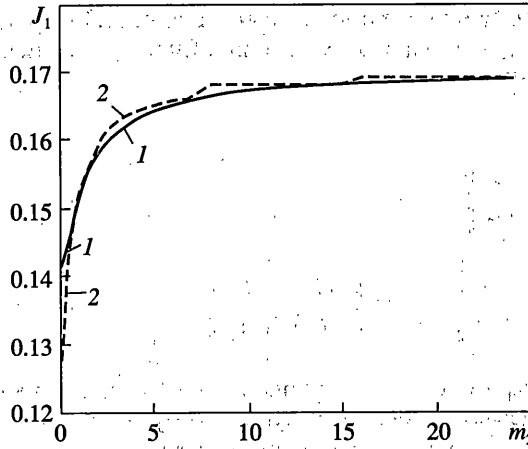
$$\lambda_{\min}^S \|q\|^2 \leq 2E, \quad \lambda_{\min}^M \|\dot{q}\|^2 \leq 2E \quad (4.18)$$

Непосредственными вычислениями показывается, что минимальные собственные значения матриц  $M$  и  $S$  определяются выражениями (4.13).

Момент времени  $\tau_1$ , определяемый равенством (4.10), существует, так как функция  $\max_{\xi \in [0, t]} |y(\xi)|$  непрерывна по  $t$ , равна нулю при  $t = 0$ , положительна при  $t > 0$  и не убывает с ростом  $t$ , а функция  $E(t)$  непрерывна, отлична от нуля при  $t = 0$  и монотонно убывает, стремясь к нулю с возрастанием  $t$ . Соотношения (4.10) и (4.18) вместе с неравенством  $|y| \leq \|q\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  и свойством монотонного убывания энергии  $E(t)$  влекут цепочку неравенств

$$|y(t)| \leq \|q\| \leq \sqrt{2E(t)/\lambda_{\min}^S} \leq \sqrt{2E(\tau_1)/\lambda_{\min}^S} = \max_{t \in [0, \tau_1]} |y(t)|, \quad t > \tau_1$$

откуда вытекает, что максимум функции  $|y(t)|$  достигается на отрезке  $[0, \tau_1]$ .



Фиг. 5

Аналогично, с учетом цепочки неравенств

$$|K(\dot{x} - \dot{y}) + C(x - y)| \leq K|\dot{x} - \dot{y}| + C|x - y| \leq \sqrt{2}(K\|\dot{q}\| + C\|q\|) \leq 2\sqrt{E(t)} \left( \frac{K}{\sqrt{\lambda_{\min}^M}} + \frac{C}{\sqrt{\lambda_{\min}^S}} \right)$$

показывается, что максимум функции  $|K(\dot{x}(t) - \dot{y}(t)) + C(x(t) - y(t))|$  достигается на отрезке  $[0, \tau_2]$ .

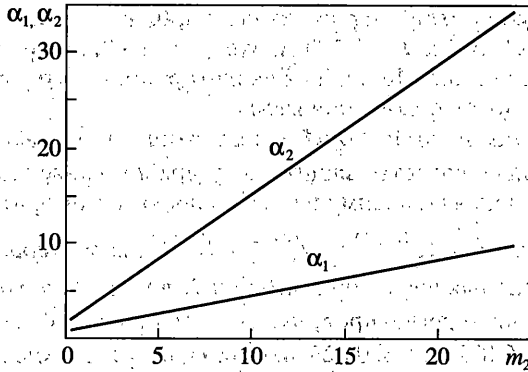
На фиг. 5 представлены зависимости минимальных (по параметрам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ) значений критерия  $J_1$  (в метрах) от безразмерного параметра  $m_2$  на интервале  $0.1 \leq m_2 \leq 24$  при фиксированных  $K = 3.75$  и  $C = 62.5$ . Указанные безразмерные значения  $K$  и  $C$  отвечают размерным параметрам (3.5). Кривая 1 на фиг. 5 отвечает линейному изолятору ( $r = 1$ ), а кривая 2 – изолятору с квадратичным демпфированием ( $r = 2$ ). Обе кривые выражают тенденцию к росту оптимальной величины  $J_1$  с увеличением массы  $m_2$ . По мере роста  $m_2$  зависимость минимума  $J_1$  от этого параметра становится слабее, и обе кривые приближаются к горизонтальным асимптотам со значениями  $J_1$  весьма близкими для обоих типов изоляторов.

На фиг. 6 и 7 изображены зависимости безразмерных оптимальных значений коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  от параметра  $m_2$ . Кривые на фиг. 6 отвечают линейному изолятору, а кривые на фиг. 7 – изолятору с квадратичным демпфированием. Эти кривые выражают тенденцию к росту оптимальных значений коэффициентов демпфирования и жесткости с ростом  $m_2$ . Указанные кривые имеют наклонные асимптоты при  $m_2 \rightarrow \infty$ , которые в безразмерных переменных выражаются уравнениями  $\alpha_1 = \alpha_1^* (1 + m_2)$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2^* (1 + m_2)$ , где  $\alpha_1^* = 0.389$ ,  $\alpha_2^* = 1.340$  для линейного изолятора и  $\alpha_1^* = 0.480$ ,  $\alpha_2^* = 1.400$  для изолятора с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием.

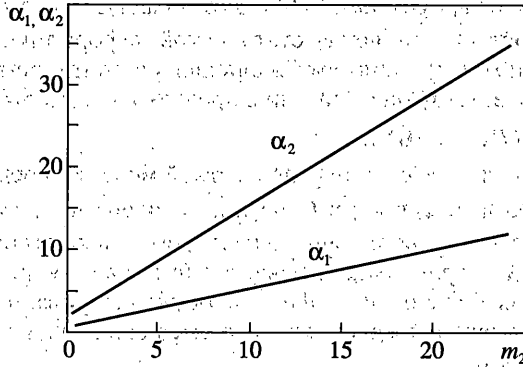
Наличие асимптот легко объясняется. Сложив уравнения (4.1) и разделив полученное равенство на  $m_1 + m_2$ , получим, с учетом (4.3):

$$\frac{m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{y}}{m_1 + m_2} + \alpha_1^* |y|^r \text{sign } \dot{y} + \alpha_2^* y = 0 \tag{4.19}$$

$$\alpha_1^* = \frac{\alpha_1}{m_1 + m_2}, \quad \alpha_2^* = \frac{\alpha_2}{m_1 + m_2} \tag{4.20}$$



Фиг. 6



Фиг. 7

При  $m_2 \rightarrow \infty$  имеем  $(m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{y}) / (m_1 + m_2) \rightarrow \ddot{y}$  и, следовательно, при достаточно больших  $m_2$  уравнение (4.19) можно приближенно заменить уравнением

$$\ddot{y} + \alpha_1^* |y|^r \operatorname{sign} y + \alpha_2^* y = 0 \quad (4.21)$$

Таким образом, движение системы при больших  $m_2$  определяется первым уравнением (4.1) и уравнением (4.21), в которые параметр  $m_2$  явно не входит. Задача оптимизации при этом сводится к определению коэффициентов  $\alpha_1^*$  и  $\alpha_2^*$ . Оптимальные значения этих коэффициентов и соответствующий минимум критерия  $J_1$  от  $m_2$  не зависят. Следовательно, при увеличении  $m_2$  оптимальное значение  $J_1$  должно стремиться к постоянной величине. Поскольку параметры  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$  связаны с коэффициентами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  соотношениями (4.20), зависимости оптимальных значений коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  от  $m_2$  стремятся к линейным функциям  $\alpha_1 = \alpha_1^* (m_1 + m_2)$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2^* (m_1 + m_2)$  при  $m_2 \rightarrow \infty$ , что подтверждается вычислениями. (Напомним, что в безразмерных переменных, отвечающих (4.8),  $m_1 = 1$ .)

Кривые на фиг. 5 показывают, что при малых  $m_2$  изолятор с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием, коэффициенты которого выбраны оптимальным

образом, дает качество противоударной изоляции, близкое к предельно возможному. Например, при  $m_2 = 0.1$  имеем  $J_1 \approx 0.128$  м, что всего на 2.4% превышает абсолютный минимум  $J_1 \approx 0.125$  м; см. (3.7). Линейный изолятор при  $m_2 = 0.1$  дает  $J_1 \approx 0.142$  м, что почти на 12% больше абсолютного минимума.

При относительно малых  $m_2$  изолятор с квадратичным демпфированием обеспечивает существенно лучшее качество защиты от удара по сравнению с линейным изолятором. По мере увеличения  $m_2$  преимущество изолятора с квадратичным демпфированием падает. Параметр  $\Delta = (J_1^{(r=1)} - J_1^{(r=2)})/J_1^{(r=1)}$ , характеризующий относительную разность оптимальных значений критерия  $J_1$  для линейного изолятора ( $r = 1$ ) и изолятора с квадратичным демпфированием ( $r = 2$ ), при  $m_2 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  равен соответственно 0.112, 0.072, 0.043, 0.025, 0.0014. При  $m_2 > 0.5$  имеем  $|\Delta| < 0.0014$ .

Исследуем теперь вопрос о применимости к рассматриваемой системе двух тел, соединенных вязкоупругим элементом, изолятора с оптимальными параметрами, рассчитанными в соответствии с жесткой моделью. Это исследование представляет интерес, поскольку система с параметрами (3.5) имеет большую жесткость и при  $v_0 = 10$  м/с характеризуется малостью отношения статической деформации вязкоупругого элемента силой  $P$  к абсолютному минимуму смещения, рассчитанному для жесткой модели путем решения соответствующей задачи о предельных возможностях противоударной изоляции ( $P/[C\bar{J}_1(\bar{F}_0)] = 0.032$ ).

Оптимальные параметры изолятора для жесткой модели определяются в результате решения задачи 2 раздела 3 при  $\dot{z}$  и  $F$ , заданных равенствами (3.6) и (4.7) соответственно. Решение этой задачи для линейного изолятора и изолятора с линейной пружиной и квадратичным демпфированием известно (см., например, [7, 12]). В исходных размерных переменных значения коэффициентов демпфирования и жесткости, а также соответствующие значения максимального смещения защищаемого объекта, определяются выражениями

$$\bar{\alpha}_1 = 0.931 \frac{(m_1 + m_2)P}{m_1 v_0}, \quad \bar{\alpha}_2 = 1.330 \frac{(m_1 + m_2)P^2}{m_1^2 v_0^2} \quad (4.22)$$

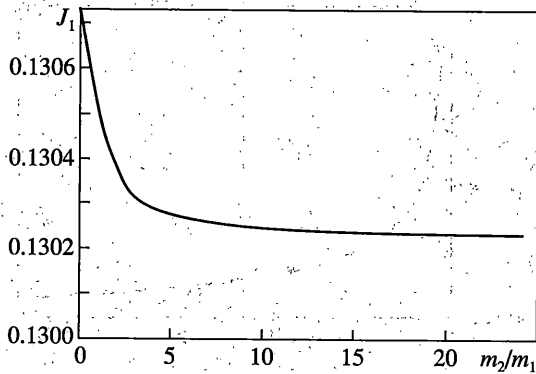
$$\bar{J}_1 = 0.521 \frac{m_1 v_0^2}{P}, \quad \bar{J}_2 = P$$

для линейного изолятора ( $r = 1$  в (4.7)) и

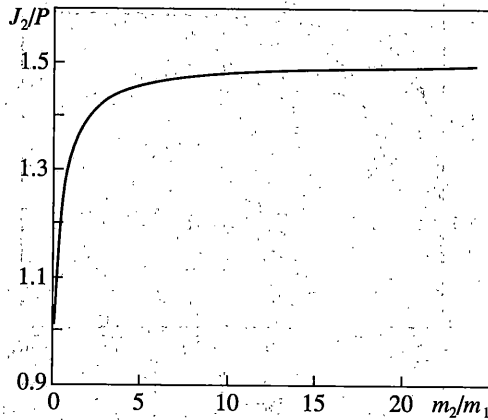
$$\bar{\alpha}_1 = \frac{(m_1 + m_2)P}{m_1 v_0^2}, \quad \bar{\alpha}_2 = 2 \frac{(m_1 + m_2)P^2}{m_1^2 v_0^2}, \quad \bar{J}_1 = 0.5 \frac{m_1 v_0^2}{P}, \quad \bar{J}_2 = P \quad (4.23)$$

для изолятора с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием ( $r = 2$ ). Тильда в (4.22) и (4.23) означает, что соответствующие величины относятся к жесткой модели. Для представления решения в безразмерных переменных (4.8) необходимо в указанных формулах положить  $m_1 = 1$ ,  $v_0 = 1$ ,  $P = 1$ . Отметим, что для жесткой модели изолятор с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием реализует предельные возможности противоударной изоляции, а линейный изолятор обеспечивает максимальное смещение защищаемого тела, всего на 4% превышающее абсолютный минимум этой величины [7, 12].

Вычислим величины  $J_1(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$  и  $J_2(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$  при  $r = 1$  и  $r = 2$  для  $m_1, K, C$ , заданных равенствами (3.5), и различных  $m_2$ . Результаты этих вычислений приведены на фиг. 8–11.



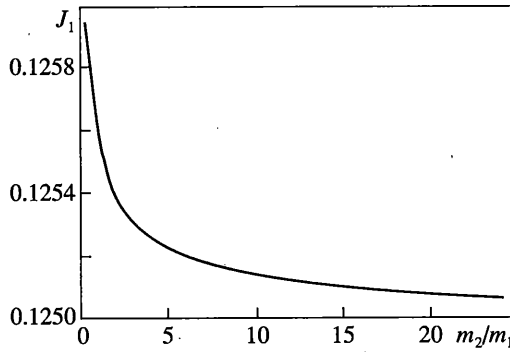
Фиг. 8



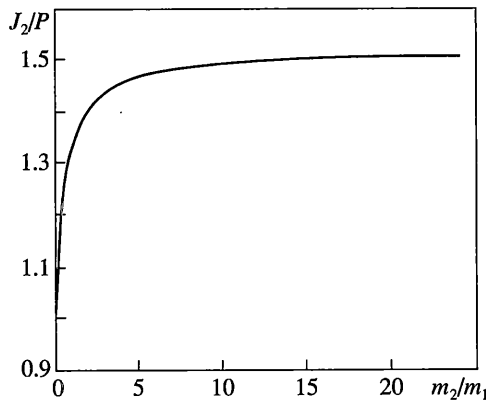
Фиг. 9

На фиг. 8 и 9 представлены зависимости величин  $J_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$  [м] и  $J_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)/P$  от отношения масс  $m_2/m_1$  для  $r = 1$ , а на фиг. 10 и 11 – для  $r = 2$ . Из приведенных графиков видно, что с ростом  $m_2$  максимальное смещение тела 2 относительно основания (критерий  $J_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ ) монотонно убывает, стремясь к величине  $\tilde{J}_1$ . Эта зависимость очень слабая, изменения наблюдаются только в четвертой значащей цифре. Что касается максимальной силы взаимодействия между телами 1 и 2 (критерий  $J_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ ), то эта величина, будучи весьма близкой к  $P$  при малых  $m_2$ , интенсивно возрастает с увеличением массы тела 2, асимптотически приближаясь к значению, почти в полтора раза превышающему максимально допустимое. Следовательно, параметры, рассчитанные по формулам (4.22) и (4.23), нельзя использовать для противоударного изолятора рассматриваемой системы.

Этот результат представляется поучительным. Он показывает, что к аппроксимации системы тел, соединенных упругими или вязкоупругими элементами большой жесткости, абсолютно жесткой моделью нужно подходить с осторожностью. Предельное поведение характеристики упругой системы при стремлении жесткости к беско-



Фиг. 10



Фиг. 11

нечности может не совпадать с поведением соответствующей характеристики для жесткой модели этой системы. Проиллюстрируем сказанное простым примером. Рассмотрим материальную точку (частицу) массой  $m$ , соединенную пружиной (жесткости  $c$ ) с основанием, которое движется с постоянным ускорением  $w$  вдоль оси пружины. Движение такой системы описывается уравнением

$$m\ddot{x} + cx = -mw \quad (4.24)$$

где  $x$  – смещение частицы относительно положения, отвечающего недеформированной пружине. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  координата частицы и ее скорость относительно основания равны нулю, т.е.

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.25)$$

Будем интересоваться максимальной величиной смещения частицы относительно основания и максимальной величиной приложенной к ней силы. Решение уравнения (4.24) при начальных условиях (4.25) дает

$$x(t) = \frac{mw}{c} \left( \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t - 1 \right)$$



Сила, действующая на частицу (со стороны пружины), определяется выражением

$$-cx(t) = mw \left( 1 - \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t \right)$$

Соответственно имеем

$$\max_{t \in [0, \infty)} |x(t)| = 2 \frac{mw}{c}, \quad \max_{t \in [0, \infty)} |cx(t)| = 2mw \quad (4.26)$$

Жесткая модель для рассматриваемой системы представляется частицей, жестко связанной с основанием и движущейся вместе с ним с абсолютным ускорением  $w$ . В этом случае смещение частицы относительно основания равно нулю, а сила, действующая на эту частицу, постоянна и равна  $mw$ . Сравнение этих данных с выражениями (4.26) показывает, что при  $c \rightarrow \infty$  максимальное смещение частицы в упругой модели стремится к нулю (что согласуется с жесткой моделью), в то время как максимальная сила, рассчитанная по упругой модели при любом  $c$  в два раза превышает максимальную силу, рассчитанную по жесткой модели.

**5. Заключение.** В случае, когда жесткость упругого элемента, соединяющего тела двухмассовой системы, велика, так что ее статическое растяжение силой, равной максимально допустимой силе взаимодействия между телами, много меньше оптимального послеударного смещения системы, рассчитанного для жесткой модели, жесткой моделью можно пользоваться для приближенного определения оптимального смещения деформируемой системы. При этом оптимальное управление изолятором или оптимальные параметры последнего для жесткой и деформируемой систем в общем случае существенно различаются. Использование оптимальных параметров изолятора, рассчитанных по жесткой модели, может привести к существенному превышению допустимой силы взаимодействия между телами деформируемой системы. Таким образом, при расчете оптимальной характеристики противоударного изолятора, необходимо учитывать упругие и вязкостные характеристики взаимодействия тел деформируемой системы.

Если отношение массы тела системы, к которому приложена управляющая сила изолятора, к массе другого тела мало, то оптимальные пассивные изоляторы с линейной упругой характеристикой и линейным или квадратичным демпфированием обеспечивают качество защиты от мгновенного удара, близкое к предельно возможному, причем лучшие показатели дает изолятор с квадратичным демпфированием. С ростом отношения масс минимальное послеударное смещение первого тела относительно основания возрастает. Следовательно, при использовании пассивных изоляторов данного типа желательно по возможности уменьшать массу тела, которое соединено с изолятором.

Работа выполнена в рамках гранта поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-1627.2003.1) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00591 и 02-01-00157).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lobdell T.E., Kroell C.K., Schneider D.C., Hering W.E., Nahum A.M. Impact response of the human thorax // Symp. on Human Impact Response. GMRL. 1972. P. 201–245.
2. Neathery R.F., Lobdell T.E. Mechanical simulation of human thorax under impact // SAE Paper. 1972. № 730982.
3. Stalnaker R.L., Low T.C., Lin A.C. Translational energy criteria and its correlation with head injury in the sub-human primates // Proc. Intern. Research Council on the Biomech. Impact. 1987. Bron, France. P. 223–238.

4. Cheng Z.Q., Pilkey W.D., Crandall J.R., Bass C.R., Darvish K. Limiting performance of helmets for the prevention of head injury // Shock and Vibration. 1999. V. 6. № 5–6. P. 299–320.
5. Crandall J.R., Cheng Z.Q., Pilkey W.D. Limiting performance of seat belt systems for the prevention of thoracic injuries // Proc. Instn. Mech. Engrs. 2000. V. 214, Pt D. № 2. P. 127–139.
6. Cheng Z.Q., Pilkey W.D., Balandin D.V., Bolotnik N.N., Crandall J.R., Shaw C.G. Optimal control of helicopter seat cushions for the reduction of spinal injuries // Intern. J. Crashworthiness. 2001. V. 6. № 3. P. 321–338.
7. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal Protection from Impact, Shock, and Vibration. Amsterdam: Gordon and Breach, 2001. 436 p.
8. Баландин Д.В., Болотник Н.Н. Предельные возможности противоударной изоляции системы с двумя степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 6. С. 52–62.
9. Гурецкий В.В. Об одной задаче оптимального управления // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 1. С. 159–162.
10. Sevin E., Pilkey W.D. Optimum Shock and Vibration Isolation. Washington: Government Print Office, 1971. 162 p.
11. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.
12. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
13. Вибрации в технике: Справочник. Т. 6. Защита от вибрации и ударов. М.: Машиностроение, 1995. 460 с.
14. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Optimal protection from impact and shock. Theory and methods // Appl. Mech. Revs. 2000. V. 53. № 9. P. 237–264.
15. Crandall J.R., Kuppa S.M., Klopp G.S., Hall G.W., Hurwitz S.R., Pilkey W.D. Injury mechanisms and criteria for the human foot and ankle under axial impacts to the foot // Intern. J. Crashworthiness. 1998. V. 3. № 2. P. 147–161.
16. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

Н. Новгород, Москва

Поступила в редакцию  
15.04.2002