

УДК 531.4

© 2003 г. А.А. КИРЕЕНКОВ

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СИЛЫ ТРЕНИЯ И МОМЕНТА СИЛ ТРЕНИЯ В КОМБИНИРОВАННОЙ МОДЕЛИ СУХОГО ТРЕНИЯ ДЛЯ КРУГОВЫХ ПЛОЩАДОК КОНТАКТА

Предлагается метод построения аппроксимаций Паде силы трения и момента сил трения в комбинированной модели сухого трения. Приводятся простые явные формулы вычисления соответствующих коэффициентов. Данный метод дает возможность аналитически учитывать взаимосвязь трения скольжения и трения вращения в широком круге задач динамики упругих твердых тел.

1. Введение. Взаимосвязь трения скольжения и трения вращения в случае не точечного контакта движущихся тел была установлена Контенсу [1]. Используя теорию контактных напряжений Герца, Контенсу получил численную зависимость силы сухого трения от отношения скорости скольжения к скорости вращения в предположении, что обе соприкасающиеся поверхности локально сферические. При этом он ограничился вычислением только силы трения, не рассматривая момент сил трения.

Принципиально новое развитие теории Контенсу было дано Журавлевым [2]. Он получил точные аналитические выражения силы трения и момента сил трения в зависимости от отношения скорости скольжения к скорости вращения. Результаты были получены с помощью переноса центра координат в мгновенный центр скоростей. Журавлев показал, что наиболее удобной в использовании в задачах динамики твердых тел является аппроксимация Паде точных выражений силы трения и момента сил трения.

При построении своей теории Контенсу и Журавлев предполагали, что контактирующие тела являются локально сферическими, а распределение нормальных напряжений в площадке контакта дается формулой:

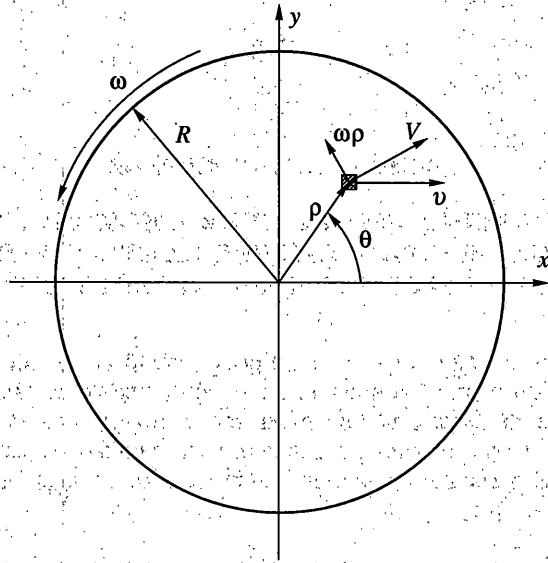
$$\sigma = \frac{3N}{2\pi R^2} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} \quad (1.1)$$

где N – приложенная нагрузка, R – радиус круга контакта, а ρ – расстояние от центра до произвольной точки круга контакта.

Автор применил теорию Контенсу–Журавлева к решению задачи о движении по плоскости однородного вращающегося диска [3]. Им были построены точные выражения и аппроксимация Паде силы трения и момента сил трения в предположении, что площадка контакта имеет форму круга, а распределение нормальных напряжений в ней дается формулой

$$\sigma = \frac{N}{2\pi R^2 \sqrt{1 - \rho^2/R^2}} \quad (1.2)$$

Отличительная черта задач, изученных в [2] и [3], состоит в том, что сначала строятся точные выражения для силы трения и момента сил трения, а уже на их основе ап-



аппроксимации Паде, которые и применяются при решении конкретных задач. Распределения контактных напряжений, выраженные формулами (1.1) и (1.2), широко используются при решении задач динамики твердых тел, но далеко не исчерпывают все возможные случаи, при изучении которых получение точных выражений для силы трения и момента сил трения невозможно. Решение данной проблемы состоит в прямом построении аппроксимаций Паде, минуя вычисления соответствующих интегралов, определяющих точные выражения для силы трения и момента сил трения. Данный подход оправдан тем фактом, что при решении конкретных задач удобно использовать именно аппроксимации Паде.

2. Постановка задачи и основные соотношения.

Предполагается, что контакт тела с поверхностью подчиняется теории контактных напряжений Герца, площадка контакта имеет форму круга, а относительное скольжение в произвольной точке контакта складывается из двух простых движений: прямолинейного скольжения со скоростью v , и чистого вращения с угловой скоростью ω . Скорость произвольной точки площадки контакта в проекциях на взаимно перпендикулярные оси x и y имеет составляющие V_x и V_y соответственно: $V_x = v - \omega\rho\sin(\theta)$, $V_y = \omega\rho\cos(\theta)$, где ρ и θ – полярные координаты с центром координат в центре круга контакта (фигура).

Тангенциальное напряжение, приходящееся на единицу площади контакта, противоположно вектору скорости V :

$$V = \sqrt{v^2 - 2v\omega\rho\sin(\theta) + \omega^2\rho^2}$$

и в проекциях на оси x и y имеет составляющие τ_1 и τ_2 , которые даются формулами

$$\tau_1(k) = \frac{f\sigma(\rho)(k - \rho\sin(\theta)/R)}{\sqrt{k^2 - 2k\rho\sin(\theta)/R + \rho^2/R^2}} \tag{2.1}$$

$$\tau_2(k) = \frac{f\sigma(\rho)\rho\cos(\theta)}{R\sqrt{k^2 - 2k\rho\sin(\theta)/R + \rho^2/R^2}} \tag{2.2}$$

где R – радиус круга контакта, f – коэффициент трения, $\sigma(\rho)$ – распределение нормальных контактных напряжений, в общем случае зависящее от радиус-вектора точки контакта ρ , а k – отношение скорости скольжения, к скорости вращения

$$k = v/(\omega R) \quad (2.3)$$

Интегрирование проекций τ_1 и τ_2 элементарной силы трения по всей площадке контакта дает величины силы трения скольжения вдоль осей x и y соответственно.

Из-за симметрии, интеграл от τ_2 по всему кругу контакта равен нулю для любого распределения нормальных контактных напряжений. Следовательно, сила трения F_{fr} противоположна вектору скорости и определяется по формуле

$$F_{fr} = \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} \tau_1(k) \rho d\rho d\theta \quad (2.4)$$

Подстановка выражения (2.1) в (2.4) дает

$$F_{fr} = \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} \frac{f\sigma(\rho)(k - \rho \sin(\theta)/R)}{\sqrt{k^2 - 2k\rho \sin(\theta)/R + \rho^2/R^2}} \rho d\rho d\theta \quad (2.5)$$

Момент сил трения M_{fr} перпендикулярен плоскости контакта и вычисляется по формуле

$$M_{fr}(k) = \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} (\tau_2(k) \cos(\theta) - \tau_1(k) \sin(\theta)) \rho^2 d\rho d\theta \quad (2.6)$$

Подстановка выражений (2.1) и (2.2) в формулу (2.6) приводит к следующему выражению для момента сил трения:

$$M_{fr}(k) = \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} \frac{f\sigma(\rho)(\sin(\theta)kR - \rho)}{R^2 \sqrt{k^2 R^2 - 2k\rho \sin(\theta)R + \rho^2}} d\rho d\theta \quad (2.7)$$

Интегралы (2.5) и (2.7) определяют зависимость силы трения и момента сил трения от отношения скорости скольжения к скорости вращения. Их вычисление, за исключением отдельных классических случаев, возможно только с помощью численных методов. Но как следует из исследований, проведенных в [2] и [3], при изучении конкретных задач с высокой степенью точности удобно использовать не сами точные выражения для силы трения и момента сил трения, а соответствующие аппроксимации Паде. Этот факт дает возможность отказаться от интегрирования выражений (2.5) и (2.7), с помощью прямого построения аппроксимаций Паде.

3. Построение аппроксимаций Паде. Для аппроксимации как силы трения, так и момента сил трения используются дробно-линейные аппроксимации Паде [4].

3.1. Сила трения. Общая форма дробно-линейной аппроксимации Паде силы трения дается формулой

$$F_{fr}(k) = \frac{a_1 k + a_2}{a_3 k + a_4} \quad (3.1)$$

Условия сохранения значений силы трения и ее первой производной в нуле и сохранения предела силы трения на бесконечности взаимнооднозначно определяет коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 в (3.1).

Подстановка значения $k = 0$ в выражения (2.5) и (3.1) дает

$$\frac{a_2}{a_4} = -f \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(\rho) \sin(\theta) \rho d\rho d\theta \quad (3.2)$$

Значение первой производной силы трения $F'_{fr}(0)$ в нуле определяется по формуле

$$F'_{fr}(0) = fR \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \int_0^R \sigma(\rho) d\rho d\theta \quad (3.3)$$

Соответствующее выражение для первой производной аппроксимации Паде имеет вид

$$F'_{fr}(0) = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{a_4^2} \quad (3.4)$$

Переход к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенстве (2.5) дает

$$F_{fr}(\infty) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(\rho) \rho d\rho d\theta \quad (3.5)$$

В большинстве случаев вычислять предел выражения (2.5) на бесконечности не требуется, так как с физической точки зрения стремление $k \rightarrow \infty$ соответствует точечному контакту и, следовательно, сила трения определяется по гипотезе сухого трения Кулона $F_{fr}(\infty) = fN$, где N – приложенная нагрузка.

Решение системы алгебраических уравнений (3.2) – (3.5) относительно $a_i, i = \overline{1, 4}$ дает выражение аппроксимации Паде силы трения в комбинированной модели сухого трения

$$F_{fr}(k) = \frac{F'_{fr}(0)F_{fr}(\infty)k}{F'_{fr}(0)k + F_{fr}(\infty)} \quad (3.6)$$

в которой коэффициенты $F'_{fr}(0), F_{fr}(\infty)$ – числа, определяемые по формулам (3.3) и (3.5).

3.2. Момент сил трения. Общая форма дробно-линейной аппроксимации Паде момента сил трения имеет вид:

$$M_{fr}(k) = \frac{b_1}{b_2 k + b_3} \quad (3.7)$$

Отсутствие в числителе формулы (3.7) линейного члена объясняется стремлением момента к нулю при $k \rightarrow \infty$, что соответствует точечному контакту. Коэффициенты b_1, b_2, b_3 находятся из условий сохранения значения момента в нуле и характера его убывания на бесконечности.

Значение момента в нуле дается подстановкой $k = 0$ в формулы (2.7) и (3.7):

$$M_{fr}(0) = f \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(\rho) \rho^2 d\rho d\theta = \frac{b_1}{b_3} \quad (3.8)$$

Для нахождения характера поведения момента на бесконечности удобно ввести новую переменную $\xi = 1/k$, которая стремится к нулю при стремлении k к бесконечности. В результате замены получаем

$$M_{fr}(\xi) = -\frac{f}{R^2} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\sqrt{R^2 - 2\rho \sin(\theta)\xi R + \rho^2\xi^2}} \sigma(\rho)(-\sin(\theta)R + \rho\xi)\rho^2 d\rho d\theta \quad (3.9)$$

Характер поведения момента (2.7) на бесконечности определяется поведением в нуле первой производной функции (3.9), которая вычисляется по формуле

$$M'_{fr}(\infty) = \frac{f}{R} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\sqrt{R^2 - 2\rho \sin(\theta)\xi R + \rho^2\xi^2}} \sigma(\rho)\rho^3 \cos(\theta)^2 d\rho d\theta = \frac{b_1}{b_2} \quad (3.10)$$

Решение системы алгебраических уравнений (3.8) и (3.10) относительно b_1, b_2, b_3 дает дробно-линейную аппроксимацию Паде момента сил трения

$$M_{fr} = \frac{M_{fr}(0)M'_{fr}(\infty)}{M_{fr}(0)k + M'_{fr}(\infty)} \quad (3.11)$$

где коэффициенты $M_{fr}(0)$ и $M'_{fr}(\infty)$ – числа, определяемые по формулам (3.8) и (3.10).

Формулы (3.6) и (3.11) с высокой степенью точности описывают силу трения и момент сил трения, возникающие в комбинированной модели сухого трения и могут использоваться при решении широкого круга задач динамики твердых тел.

4. Примеры построения аппроксимаций Паде.

1. Качение с сухим трением однородного тяжелого шара по плоскости. Эта задача была подробно исследована в [2]. Распределение контактных напряжений в этом случае дается формулой (1.1). Коэффициенты в (3.2), (3.5) и (3.8), (3.10) вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} F'_{fr}(0) &= \frac{3fN}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} \cos(\theta)^2}} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \cos(\theta)^2\right) d\rho d\theta = \frac{3}{8} \pi fN \\ F_{fr}(\infty) &= \frac{3fN}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}} \rho d\rho d\theta = fN \\ M_{fr}(0) &= \frac{3fN}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}} \rho^2 d\rho d\theta = \frac{3}{16} \pi fRN \\ M'_{fr}(\infty) &= \frac{3fN}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}} \rho^3 \cos(\theta)^2 d\rho d\theta = \frac{1}{5} fRN \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подстановка равенств (4.1) в (3.6) и (3.11) дает выражения для силы трения и момента сил трения, в точности совпадающие с результатами [2]:

$$F_{fr}(k) = fN \frac{3\pi k}{3\pi k + 8}, \quad M_{fr}(k) = \frac{3\pi fRN}{15\pi k + 16}$$

2. Движение по плоскости однородного вращающегося диска. Аппроксимации Паде силы трения и момента сил трения для этой задачи были построены в [3]. Распределение контактных напряжений в этом случае описывается зависимостью (1.2), подстановка которой в формулы (3.2), (3.5) и (3.8), (3.10) дает

$$F'_{fr}(0) = \frac{fN}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\cos(\theta)} \frac{\cos(\theta)^2}{\sqrt{1-\rho^2/R^2}} d\rho d\theta = \frac{1}{4}\pi fN$$

$$F_{fr}(\infty) = \frac{fN}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2/R^2}} d\rho d\theta = fN \tag{4.2}$$

$$M'_{fr}(0) = \frac{fN}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2/R^2}} d\rho d\theta = \frac{1}{4}\pi fRN$$

$$M'_{fr}(\infty) = \frac{fN}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} \frac{\rho^3 \cos(\theta)^2}{\sqrt{1-\rho^2/R^2}} d\rho d\theta = \frac{1}{3}fRN \tag{4.3}$$

Замена коэффициентов в формулах (3.6) и (3.11) выражениями (4.2) дает аппроксимации Паде силы и момента трения, возникающих при движении по плоскости вращающегося диска:

$$F_{fr}(k) = fN \frac{\pi k}{\pi k + 4}; \quad M_{fr}(k) = \frac{f\pi RN}{3\pi k + 4}$$

Таким образом, предложенный метод позволяет строить аппроксимации Паде силы трения и момента сил трения для широкого круга задач динамики твердых тел для различных распределений контактных напряжений и приложенной нагрузки, используя простые явные формулы (3.6) и (3.11). Для этого достаточно вычислить интегралы (3.2), (3.5), (3.8) и (3.10). В случае невозможности аналитического интегрирования их можно вычислить численно, что принципиально не усложняет задачу, так как интегралы (3.2), (3.5), (3.8) и (3.10) являются числовыми коэффициентами в формулах (3.6) и (3.11). Приведенные выше примеры 1, 2 иллюстрируют эффективность и простоту предложенной методики. С целью автоматизации, процесс построения аппроксимаций Паде силы и момента сил трения заалгоритмизован в виде простых процедур в системе символьных вычислений Maple 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
2. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПИММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
3. *Киреевков А.А.* О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // Изв. АН. МГТ. 2002. № 1. С. 60–67.
4. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.