МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2003

УДК 531.381

© 2003 г. А.П. МАРКЕЕВ

О ТОЖДЕСТВЕННОМ РЕЗОНАНСЕ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается движение тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой. Предполагается, что геометрия масс тела и начальные условия его движения соответствуют случаю интегрируемости Горячева–Чаплыгина [1, 2]. В этом случае существуют семейства периодических движений, отвечающие колебаниям или вращениям тела вокруг главной оси инерции, занимающей неизменное горизонтальное положение. В работе предполагается, что такой осью является экваториальная ось эллипсоида инерции и изучается орбитальная устойчивость упомянутых периодических движений. Установлено, что изучаемая задача всегда является резонансной: при любой амплитуде колебаний (или любой угловой скорости вращения) тела в невозмущенном движении его возмущенное движение таково, что имеет место параметрический резонанс (все мультипликаторы равны единице). Показано, что изучаемые периодические движения тела орбитально неустойчивы в первом приближении.

1. Введение. Пусть твердое тело имеет одну закрепленную точку O и движется в однородном поле тяжести. Вес тела mg, расстояние от неподвижной точки до центра тяжести равно l. Пусть $OXYZ$ – неподвижная система координат, ось OZ которой направлена вертикально вверх. Другая система координат $Oxyz$ жестко связана с движущимся телом, ее оси Ox, Oy и Oz направлены вдоль главных осей инерции тела для точки O, соответствующие главные моменты инерции равны A, B и C. Через x_*, y_*, z_* обозначим координаты центра тяжести в системе $Oxyz$. Предположим, что геометрия масс тела отвечает случаю Горячева–Чаплыгина [1–6]. Тогда, считая, что $A = C = 4B$, $y_* = 0$, можно без ограничения общности положить $x_* = l$, $z_* = 0$.

Ориентацию тела зададим при помощи углов Эйлера, которые вводятся обычным образом. Уравнения движения имеют вид [7]:

$$
\begin{aligned}
&4\frac{dp}{dt} + 3qr = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 4\mu^2\gamma_3, \quad 4\frac{dr}{dt} - 3pq = -4\mu^2\gamma_2\\
&\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2\\
&p = \frac{d\psi}{dt}\gamma_1 + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi, \quad q = \frac{d\psi}{dt}\gamma_2 - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi, \quad r = \frac{d\psi}{dt}\gamma_3 + \frac{d\varphi}{dt}\\
&\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

В (1.1) введено обозначение $\mu^2 = mgl/(4B)$.

В случае интегрируемости Горячева–Чаплыгина имеется ограничение на начальные условия движения. Они должны быть такими, чтобы постоянная интеграла площадей была равна нулю, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$4(p\gamma_1 + r\gamma_3) + q\gamma_2 = 0 \tag{1.2}$$

При условии (1.2) уравнения движения (1.1), помимо интеграла энергии и интеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, имеют еще и дополнительный интеграл

$$q(p^2 + r^2) - 4\mu^2 p\gamma_2 = \text{const} \tag{1.3}$$

Наличие дополнительного интеграла (1.3) позволяет свести интегрирование уравнений движения к квадратурам. Аналитическим свойствам решений уравнений (1.1) и качественному анализу движения тела в случае Горячева–Чаплыгина посвящено довольно много исследований (см. монографии [3–6] и приведенную в них библиографию).

При выполнении условия (1.2) уравнения (1.1) имеют решения, соответствующие плоским движениям тела, для которых $\psi = \text{const}$, $\theta = \pi/2$, $p = q = 0$, $r = d\varphi/dt$, $\gamma_1 = \sin\varphi$, $\gamma_2 = \cos\varphi$, $\gamma_3 = 0$. Для этих решений экваториальная ось эллипсоида инерции тела неподвижна и занимает горизонтальное положение, а движение тела вокруг этой оси описывается дифференциальным уравнением физического маятника $d^2\varphi/dt^2 + \mu^2\cos\varphi = 0$. Исключая из рассмотрения движения, асимптотические к неустойчивому положению равновесия маятника $\varphi = \pi/2$, будем исследовать орбитальную устойчивость колебаний произвольной амплитуды в окрестности устойчивого положения равновесия $\varphi = 3\pi/2$ или вращений с произвольной угловой скоростью. Основной результат статьи состоит в установлении резонансного характера задачи об устойчивости колебаний и вращений и в доказательстве их орбитальной неустойчивости в первом приближении.

2. Функция Гамильтона. Если геометрия масс тела отвечает случаю Горячева–Чаплыгина, то функция Лагранжа задается равенствами

$$L = T - \Pi, \quad T = \frac{1}{2}B(4p^2 + q^2 + 4r^2), \quad \Pi = mgl\gamma_1$$

Функция Гамильтона вычисляется по формуле $H = T + \Pi$, в которой проекции p, q, r угловой скорости тела выражены через обобщенные импульсы p_ψ, p_θ, p_φ, определяемые соотношениями

$$p_\psi = \partial L/\partial\dot\psi, \quad p_\theta = \partial L/\partial\dot\theta, \quad p_\varphi = \partial L/\partial\dot\varphi$$

Величина p_ψ является проекцией кинетического момента тела на вертикаль. При условии Горячева–Чаплыгина (1.2) она равна нулю. Учтя это и введя безразмерные переменные q_1, q_2, p_1, p_2 по формулам

$$\varphi = 3\pi/2 + q_1, \quad \theta = \pi/2 + q_2, \quad p_\varphi = 4B\mu p_1, \quad p_\theta = 4B\mu p_2$$

и безразмерное время $\tau = \mu t$, получим следующее выражение для функции Гамильтона задачи Горячева–Чаплыгина:

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2}[1 + (1 + 3\sin^2 q_1)\operatorname{tg}^2 q_2]p_1^2 + 3\sin q_1 \cos q_1 \operatorname{tg} q_2 p_1 p_2 + \\ & + \frac{1}{2}(1 + 3\cos^2 q_1)p_2^2 - \cos q_1 \cos q_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Дополнительный интеграл (1.3) задачи Горячева–Чаплыгина в переменных q_i, p_i ($i = 1, 2$) записывается в виде

$$\begin{aligned} & (p_1 \sin q_1 \operatorname{tg} q_2 + \cos q_1 p_2)[p_1^2 + (p_1 \cos q_1 \operatorname{tg} q_2 - \sin q_1 p_2)^2] + \\ & + (p_1 \cos q_1 \operatorname{tg} q_2 - \sin q_1 p_2)\sin q_1 \cos q_2 = \text{const} \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. Линеаризованные уравнения возмущенного движения и их первый интеграл. Плоским колебаниям и вращениям тела вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции отвечают решения, для которых $q_2 = p_2 = 0$, а q_1, p_1 описываются каноническими уравнениями с гамильтонианом $H^{(0)} = 1/2\,p_1^2 - \cos q_1$. Эти уравнения имеют интеграл $H^{(0)} = h = \text{const}$. При $-1 < h < 1$ тело совершает колебания в окрестности устойчивого положения равновесия, для которого центр тяжести тела лежит на вертикали OZ ниже закрепленной точки O. При $h > 1$ осуществляется режим плоских вращений тела вокруг главной оси инерции Oz.

Для дальнейшего возмущенное движение целесообразно записать в переменных действие – угол I, w, как это сделано в [8] при исследовании плоских движений волчка Ковалевской. В случае колебаний положим $k_1 = \sin(\beta/2)$, где β – амплитуда колебаний ($0 < \beta < \pi$). Тогда

$$q_1 = 2\arcsin[k_1 \operatorname{sn}(u, k_1)], \quad p_2 = 2k_1 \operatorname{cn}(u, k_1), \quad u = 2K(k_1)w/\pi \tag{3.1}$$

$$w = \omega_1\tau + w(0), \quad \omega_1 = \pi/(2K(k_1)) \tag{3.2}$$

где $k_1 = k_1(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = \frac{8}{\pi}[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)] \tag{3.3}$$

В случае вращений положим $k_2^2 = 2(1 + h)^{-1}$. Тогда

$$q_1 = 2\operatorname{am}(u, k_2), \quad p_2 = \frac{2}{k_2}\operatorname{dn}(u, k_2), \quad u = \frac{K(k_2)w}{\pi} \tag{3.4}$$

$$w = \omega_2\tau + w(0), \quad \omega_2 = \pi/(k_2 K(k_2)) \tag{3.5}$$

где $k_2 = k_2(I)$ – функция, обратная к функции

$$I = 4E(k_2)/(\pi k_2) \tag{3.6}$$

В (3.1)–(3.6) используются общепринятые обозначения для эллиптических функций и интегралов [9].

В невозмущенном движении имеем $q_2 = p_2 = 0$, $I = I_0 = \text{const}$, а переменные q_1, p_1 при заданном значении I_0 определяются формулами (3.1)–(3.3) в случае колебаний и формулами (3.4)–(3.6) в случае вращений.

Положим $r_1 = I - I_0$. Задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений тела эквивалентна задаче об их устойчивости по отношению к переменным q^2, p^2, r_1.

Квадратичная относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ часть H_2 гамильтониана возмущенного движения имеет вид

$$H_2 = \omega r_1 + F_2(q_2, p_2, w) \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} F_2 = f_{20}q_2^2 + f_{11}q_2p_2 + f_{02}p_2^2 \\ f_{20} = \frac{1}{2}[\cos q_1 + (1 + 3\sin^2 q_1)p_1^2], \quad f_{11} = 3p_1\sin q_1\cos q_1, \quad f_{02} = \frac{1}{2}(1 + 3\cos^2 q_1) \end{gathered} \tag{3.8}$$

В (3.7), (3.8) величины ω и q_1, p_1 соответствуют невозмущенному движению и определяются при $I = I_0$ по формулам (3.1)–(3.3) в случае колебаний и по формулам (3.4) – (3.6) в случае вращений.

В линеаризованных уравнениях возмущенного движения $r_1 = \mathrm{const}$, а изменение переменных q_2 и p_2, если за независимую переменную принять величину w, описывается уравнениями

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{\partial h_2}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{\partial h_2}{\partial q_2}, \quad h_2 = \frac{F_2}{\omega} \tag{3.9}$$

Интеграл (2.2) для уравнений возмущенного движения можно представить в виде ряда по степеням величин q_2, p_2, r_1:

$$g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n + \ldots = \mathrm{const} \tag{3.10}$$

где g_n – форма степени n относительно $q_2, p_2, |r_1|^{1/2}$ с коэффициентами, зависящими от q_1, p_1, которые соответствуют невозмущенному движению. При этом

$$g_1 = p_1 \sin q_1 (p_1^2 + \cos q_1) q_2 + p_1^2 \cos(q_1 - \sin^2 q_1) p_2 \tag{3.11}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция (3.11) является первым интегралом линейных уравнений (3.9).

4. Резонанс. Пусть $\mathbf{X}(w)$ – матрица фундаментальных решений системы (3.9), нормированная условием $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица второго порядка. Элементы $x_{ij}(w)$ матрицы $\mathbf{X}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_{1j}}{dw} = \frac{1}{\omega}(f_{11}x_{1j} + 2f_{02}x_{2j}), \quad \frac{dx_{2j}}{dw} = -\frac{1}{\omega}(2f_{20}x_{1j} + f_{11}x_{2j}) \quad (j = 1, 2) \tag{4.1}$$

и начальным условиям

$$x_{11}(0) = x_{22}(0) = 1, \quad x_{12}(0) = x_{21}(0) = 0 \tag{4.2}$$

Величины f_{ij} в уравнениях (4.1) – функции w, они вычисляются по формулам (3.8); $\omega = \omega_1$ в случае колебаний и $\omega = \omega_2$ в случае вращений. Правые части уравнений (4.1) имеют период T_* относительно w, причем $T_* = \pi$ в случае колебаний и $T_* = 2\pi$ в случае вращений. В силу гамильтоновости системы (4.1) при любом w имеет место тождество

$$x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} = 1 \tag{4.3}$$

В соответствии с (3.9),(3.11) и (4.2) решения уравнений (4.1) при любом w удовлетворяют равенствам

$$\begin{gathered} x_{1j}p_1 \sin q_1 (p_1^2 + \cos q_1) + x_{2j}(p_1^2 \cos q_1 - \sin^2 q_1) = c_j = \mathrm{const} \quad (j = 1, 2) \\ c_1 = p_1(0) \sin q_1(0)(p_1^2(0) + \cos q_1(0)), \quad c_2 = p_1^2(0) \cos q_1(0) - \sin^2 q_1(0) \end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь $q_1(0), p_1(0)$ – значения функций q_1, p_1 при $w = 0$, вычисляемые по формулам (3.1) в случае колебаний и по формулам (3.4) в случае вращений. Положив в равенствах (4.4) $w = T_*$ и учтя тождество (4.3), получим

$$x_{11}(T_*) = x_{22}(T_*) = 1, \quad x_{21}(T_*) = 0 \tag{4.5}$$

Следовательно, при $w = T_*$ матрица $\mathbf{X}(w)$ будет иметь такой вид

$$\mathbf{X}(T_*) = \begin{Vmatrix} 1 & x_{12}(T_*) \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

Оба корня ρ_1 и ρ_2 характеристического уравнения этой матрицы (мультипликаторы) вещественны и равны единице. Это означает, что в исследуемой задаче возмущенное движение отвечает границе области параметрического резонанса. При этом резонанс является тождественным, так как $\rho_1 = \rho_2 = 1$ при любой амплитуде колебаний или при любой угловой скорости вращения тела в невозмущенном движении.

Пусть $\pm i\lambda$ – характеристические показатели линейной системы (4.1). Из условия $\rho_1 = \rho_2 = 1$ и свойства непрерывности характеристических показателей следует, что λ – постоянное целое число, не зависящее от амплитуды колебаний или частоты вращений тела в невозмущенном движении. Рассмотрение предельных случаев колебаний бесконечно малой амплитуды ($k_1 \to 0$) и бесконечно больших угловых скоростей вращений ($k_2 \to 0$) показало, что в случае колебаний $\lambda = 2$, а в случае вращений $\lambda = 0$.

5. Об орбитальной неустойчивости плоских движений в первом приближении. Решение вопроса об орбитальной устойчивости в первом приближении исследуемых плоских движений твердого тела зависит [10] от величины элемента $x_{12}(T_*)$ матрицы (4.6). Если $x_{12}(T_*) = 0$, то матрица имеет диагональную форму, и невозмущенные плоские движения тела орбитально устойчивы в первом приближении. Если же $x_{12}(T_*) \neq 0$, то матрица (4.6) не приводится к диагональной форме и соответствующее движение твердого тела орбитально неустойчиво в первом приближении.

При нахождении величины $x_{12}(T_*)$ недостаточно рассмотрения интеграла (3.11) уравнений (3.9), как это было при получении равенств (4.5). Величина $x_{12}(T_*)$ вычислялась при помощи численного интегрирования системы уравнений (4.1) с начальными условиями (4.2). Оказалось, что в случае колебаний при $k_1 \neq 0$ (или при $k_2 \neq 0$ в случае вращений) величина $x_{12}(T_*)$ является положительной монотонно возрастающей функцией от k_1 (или от k_2 в случае вращений). При $k_1 \to 0$ (или при $k_2 \to 0$ в случае вращений) величина $x_{12}(T_*)$ стремится к нулю.

Таким образом, исследуемые плоские колебания и вращения твердого тела орбитально неустойчивы в первом приближении.

6. Замечание об исследовании орбитальной устойчивости в строгой нелинейной постановке задачи. Как следует из предыдущего, задача об орбитальной устойчивости плоских колебаний и вращений твердого тела вокруг экваториальной оси эллипсоида инерции в случае Горячева–Чаплыгина относится к критическому случаю двукратного мультипликатора с непростыми элементарными делителями. Поэтому из установленной выше неустойчивости в первом приближении не следует, что рассматриваемые движения тела действительно орбитально неустойчивы. Строгое решение задачи требует анализа нелинейных уравнений возмущенного движения.

Упомянутый критический случай теории устойчивости исследовался ранее в [11], где получены достаточные условия орбитальной устойчивости и неустойчивости, выраженные через коэффициенты разложения гамильтониана возмущенного движения в ряд по степеням q_2, p_2, $|r_1|^{1/2}$ до четвертой степени включительно. Однако вычисления по алгоритму из [11] показали, что в изучаемой конкретной задаче недостаточно и членов до четвертой степени. Поэтому требуется учет членов еще более высокой степени. Но, по-видимому, предпочтительнее применение второго метода Ляпунова с использованием дополнительного интеграла (2.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831) и гранта поддержки ведущих научных школ (00-15-96088).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Мат. сб. Кружка любителей мат. наук. 1900. Т. 21. Вып. 3. С. 431–438.
2. *Чаплыгин С.А.* Новый случай вращения тяжелого твердого тела, подпертого в одной точке // Тр. Отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10. Вып. 2. С. 32–34.

3. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
4. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. 256 с.
5. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. Киев: Наук. думка. 1992. 168 с.
6. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 384 с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 592 с.
8. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
9. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
10. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
11. *Маркеев А.П.* Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критической случае // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 833–847.

Москва

Поступила в редакцию
25.11.2002