МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2003

УДК 531.383

© 2003 г. С.Е. ПЕРЕЛЯЕВ

ТРЕХМЕРНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СИСТЕМАХ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Описаны и охарактеризованы основные методы введения локальной (трехмерной) параметризации пространства $SO(3)$ конфигураций абсолютно твердого тела с одной неподвижной точкой. Данные методы трехмерной параметризации могут быть использованы в ряде прикладных задач кинематики твердого тела. Кроме широкоизвестных методов локальной параметризации с применением трех углов Эйлера и Эйлера–Крылова, рассматривается метод экспоненциальной параметризации. Обсуждаются и исследуются преимущества вещественной дробно-линейной параметризации Кэли при решении задачи локальной параметризации группы $SO(3)$. Показано, что трехмерная параметризация Кэли приводит к кинематическому уравнению вращения вида Риккати, имеющему невырождающуюся структуру. Рассматриваются примеры локальных координат на основе векторов Родрига и Гиббса и кинематические уравнения, записанные в этих трехмерных переменных.

1. Постановка задачи исследования локальных способов параметризации трехмерной группы вращений твердого тела. Для постановки задачи локальной параметризации в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ свяжем с твердым телом правый ортогональный трехгранник $Oxyz$. Ориентация тела определяется как положение одного трехгранника (триэдра) $Oxyz$ относительно другого $O\xi\eta\zeta$, принимаемого за неподвижный. При вращении происходит поворот подвижного триэдра относительно неподвижного.

Множество всех поворотов твердого тела образует группу. Группа трехмерных вращений является основной математической моделью множества всех поворотов твердого тела. Она представляет собой конфигурационное многообразие положений твердого тела с одной неподвижной точкой [1–3].

В качестве примера рассмотрим группу вращений пространства $\mathbf{R}^3$ вокруг начала координат. Вращения $\mathbf{R}^3$, описываемые множеством ортогональных матриц 3×3 с определителем $+1$, образуют группу, которая условно обозначается $SO(3)$ [1, 3]. Группа $SO(3)$ – конфигурационное пространство твердого тела, закрепленного в неподвижной точке. В качестве локальных координат на этой неособой поверхности можно взять известные параметры, например, классические углы Эйлера. Здесь введем другие трехмерные вещественные параметры ориентации s_1, s_2, s_3, в которых и будем выполнять все дальнейшие исследования. В соответствии с теоремой Эйлера [1, 3–8] любые вращения можно задать вектором $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^T$, направленным вдоль оси Эйлера и равным по величине углу поворота. Проекции этого вектора (s_1, s_2, s_3) на координатные оси и будут служить нам параметрами.

Всякое вращение можно рассматривать как вращение против часовой стрелки вокруг оси Эйлера, выходящей из начала координат, на угол не превышающий π. Тогда все вращения заполнят замкнутый шар $\bar{\mathbf{B}}^3 \subset \mathbf{R}^3$ радиуса π. Различные внутренние точки шара $\bar{\mathbf{B}}^3$ описывают разные вращения, а две диаметрально противоположные точки на поверхности замкнутого шара $\bar{\mathbf{B}}^3$ (сферы $\mathbf{S}^2$) описывают одно и то же вращение на угол π.

Взяв данную сферу $\mathbf{S}^2$ и отождествив концы любого из ее диаметров, можно установить взаимно однозначное соответствие между локальными параметрами s_1, s_2, s_3 шара $\bar{\mathbf{B}}^3$ и элементами группы $SO(3)$ [9].

Постановку задачи локальной параметризации сформулируем следующим образом: в каких трех вещественных параметрах ориентации кинематические дифференциальные уравнения вращения имеют наиболее простое аналитическое выражение и невырождающуюся структуру?

Для аналитического исследования способов трехмерной параметризации группы $SO(3)$ и вывода кинематических дифференциальных уравнений, следуя [1, 2], введем условное обозначение ортогональной матрицы $X(3 \times 3)$:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{Vmatrix} \tag{1.1}$$

где x_i $(i = \overline{1, 9})$ – искомые переменные (параметры) ориентации твердого тела в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$.

2. Метод параметризации с помощью классических углов Эйлера и Эйлера–Крылова. Этот метод трехмерной параметризации группы $SO(3)$ базируется на использовании классических углов Эйлера или их модификаций: углов Эйлера–Крылова, кардановых углов (Крылова–Булгакова). Как известно углы Эйлера и их модификации задаются многими известными способами [1–12], которые зависят от конкретной решаемой задачи.

Для описания углового движения твердого тела введем в рассмотрение следующие системы координат: $O_iX_iY_iZ_i$ – неподвижный (инерциальный) триэдр, $O_0X_0Y_0Z_0$ – опорный (навигационный) триэдр, O_Bxyz – приборный (подвижный) трехгранник, связанный с объектом. Здесь основное внимание уделяется представлению ориентации объекта, поэтому возможны следующие допущения. Центры двух триэдров совпадают ($O_0 = O_B$) – расстояния между центрами указанных триэдров $\mathbf{p}_X = \mathbf{p}_Y = \mathbf{p}_Z = 0$, где p_i $(i = x, y, z)$.

Наиболее часто для задания ориентации твердого тела используют классические углы Эйлера (φ, ψ, θ). Действительно, положение свободного тела, имеющего одну неподвижную точку, обычно задают при помощи трех классических углов Эйлера: собственного вращения φ, прецессии ψ и нутации θ. Параметры φ, ψ, θ задают угловое положение объекта в $\mathbf{R}^3$.

Весьма удобными в задачах определения ориентации и управления движением не только летательных аппаратов, но и многих других технических систем являются известные углы Эйлера–Крылова (ψ, ϑ, γ). Эти три параметра (угловые координаты) называют соответственно углами рысканья (ψ), тангажа (ϑ) и крена (γ) твердого тела [1, 3, 7, 8]. Углы ψ, ϑ, γ позволяют представить ортогональную матрицу X, как последовательное произведение трех вращений вокруг вертикальной, поперечной и продольной осей движущегося в пространстве объекта

$$X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

На основании (2.1) имеем следующее аналитическое выражение для матрицы поворота общего вида:

$$X = \left\| \begin{array}{c|c|c} c\psi c\vartheta & s\psi c\vartheta & -s\vartheta \\ \hline c\psi s\vartheta s\gamma - s\psi c\gamma & s\psi s\vartheta s\gamma + c\psi c\gamma & c\vartheta s\gamma \\ \hline c\psi c\gamma s\vartheta + s\psi s\gamma & s\psi c\gamma s\vartheta - c\psi s\gamma & c\vartheta c\gamma \end{array} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{array} \right\| \tag{2.2}$$

Используя (2.2) и обозначая $\chi^2 = x_1^2 + x_4^2$ (для $\chi \geq 0$) определим углы Эйлера–Крылова такими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\cos\psi = x_1/\chi, \quad \sin\vartheta = -x_7, \quad \sin\gamma = x_8/\chi \\ &\sin\psi = x_4/\chi, \quad \cos\vartheta = \chi, \quad \cos\gamma = x_9/\chi \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для углов Эйлера–Крылова известно следующее кинематическое дифференциальное уравнение вращения:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\cos\vartheta \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\cos\vartheta \end{array} \right\| \frac{d}{dt} \left\| \begin{array}{c} \gamma \\ \vartheta \\ \psi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{array} \right\| \tag{2.4}$$

Так как в уравнении (2.4) определитель первой матрицы равен $\cos\vartheta$, то эта матрица ориентации имеет обратную матрицу (необходима для определения производной каждого из углов) только при значениях $\vartheta \neq \pm\pi/2$. В противном случае, при главных значениях $\vartheta = \pm\pi/2$, обратная матрица вырождается и производные углов ψ, γ принимают бесконечно большие величины.

Если заранее известно, что определенные ориентации тела недопустимы, тогда можно выбрать расположение базовой системы координат таким образом, чтобы эти ориентации соответствовали сингулярным точкам.

Например, для объекта, который стартует с поверхности Земли строго вертикально вверх ($\vartheta = 90°$), значение угла ϑ отлично от нуля и существует, так называемая, "ракетная" система углов, которая не вырождается при углах $\vartheta = \pm\pi/2$. В этом случае меняется только последовательность поворотов с традиционно принятой схемы (3–1–2): $\psi \to \vartheta \to \gamma$ на (1–3–2): $\vartheta_P \to \psi_P \to \gamma_P$, которая задает другую ортогональную матрицу поворота общего вида [1, 13].

В рассмотренных выше случаях углы Эйлера–Крылова являются удовлетворительным методом представления группы вращений $SO(3)$.

Таким образом, при использовании для определения ориентации твердого тела трех углов конечного вращения первого или второго рода [1] существуют плоскости [14], в которых нарушается единственность представления положения объекта. Уравнения (2.4), моделирующие движение подвижного триэдра по отношению к инерциальному пространству, называются кинематическими уравнениями Эйлера, записанными в углах Эйлера–Крылова (ψ, ϑ, γ) [1, 3, 7, 8]. Они нелинейные, несимметричные, содержат тригонометрические функции углов, что затрудняет их точное интегрирование.

Несмотря на это, углы Эйлера–Крылова являются наиболее распространенными в механике кинематическими параметрами. Их число равно трем, что соответствует трем степеням свободы вращательного движения твердого тела. Каждый параметр является углом плоского вращения, выполняемого вокруг одной из осей координатного базиса. Именно благодаря наглядности и ясности физического содержания эти параметры нашли столь широкое применение в аналитических и прикладных исследованиях.

Кроме того, эти угловые координаты (как и классические углы Эйлера) не требуют дополнительных уравнений связи.

Вырождаемость кинематических уравнений соответствует неопределенности двух параметров ψ и ϑ при условии, что $\vartheta \neq \pm\pi/2 + k\pi$, где ($k = 0, \infty$). Последнее геометрически эквивалентно эффекту "складывания" рам крена и курса обычного трехрамного карданова подвеса. В результате система теряет одну степень свободы. Именно это обстоятельство привело к введению дополнительной – четвертой следящей (внешней) креновой рамы во всех современных гироскопических устройствах и системах ориентации.

3. Метод экспоненциальной параметризации. Этот метод трехмерной параметризации группы вращений $SO(3)$ основан на следующих известных фактах. Для любой кососимметрической матрицы $S(S^T = -S)$ существует экспоненциальная матрица $\exp(S)$, которая является ортогональной ($\det\{\exp(S)\} = \pm 1$, $[\exp(S)]^T = [\exp(S)]^{-1}$). Кроме того, всякая ортогональная матрица X вращения является экспонентой некоторой кососимметрической матрицы S [2, 15–17]. Пусть кососимметрическая матрица S имеет размерность 3×3 и угол поворота подвижной системы координат относительно неподвижной вокруг оси Эйлера $\sigma \geq 0$, и квадрат этого угла равен:

$$\sigma^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}S^2 \tag{3.1}$$

где tr – след матрицы S^2. В рассматриваемом здесь случае трех вещественных параметров ориентации s_1, s_2, s_3 имеем

$$\sigma^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \tag{3.2}$$

Тогда характеристический многочлен матрицы S равен

$$\det(S - \lambda E) = -\lambda^3 - \sigma^2\lambda = 0 \tag{3.3}$$

поэтому можем записать, что

$$S^3 = -\sigma^2 S \tag{3.4}$$

Из характеристического многочлена (3.3) в соответствии с теоремой Гамильтона–Кэли [17] следуют известные тождества для целых степеней кососимметрической матрицы S

$$S^{2n} = (-1)^{n-1}\sigma^{2n-2}S^2, \quad S^{2n+1} = (-1)^n\sigma^{2n}S \tag{3.5}$$

Степенной ряд для матрицы $X = \exp S$ можно последовательно упрощать, используя тождества (3.5). Объединяя подобные члены, получаем выражение

$$X = E + \frac{\sin\sigma}{\sigma}S + \frac{1-\cos\sigma}{\sigma^2}S^2 \tag{3.6}$$

Корни характеристического уравнения X равны 1 и ($\cos\sigma \pm i\sin\sigma$). Здесь следуя [2] можно показать, что тождество $\exp(S_1) = \exp(S_2)$ справедливо тогда и только тогда, когда $S_2 = 0$ и $\sigma_1^2 = 2k\pi$, или $S_1 = S_2 + (2k\pi/\sigma)S_2$ для некоторого целого k, где $\sigma_i^2 =$ $= -1/2\mathrm{tr}S_i^2$ для $i = 1, 2$. В частности, если ограничиться только теми матрицами S, для которых угол поворота вокруг оси Эйлера $\sigma \leq \pi$, то тождество $\exp(S_1) = \exp(S_2)$ справедливо только при $S_1 = \pm S_2$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \pi$.

Можно сделать обратное утверждение. Пусть ортогональная матрица поворота $X \in SO(3)$, тогда характеристический многочлен матрицы X равен

$$X^3 - \alpha_0 X^2 + \alpha_0 X - E = 0; \quad \alpha_0 = \operatorname{tr} X \tag{3.7}$$

для всех коэффициентов $-1 \le \alpha_0 \le 3$ или $-1 \le (\alpha_0 - 1)/2 \le 1$.

Следовательно, существует такой угол плоского поворота $\sigma(0 \le \sigma < \pi)$ и $\cos\sigma = (\alpha_0 - 1)/2$, для которых в соответствии с [2], при всех $\alpha_0 \ne -1, 3$, имеем соотношение

$$S = -\frac{\sigma(1 + 2\cos\sigma)}{\sin\sigma}E + \frac{\sigma(1 + \cos\sigma)}{2\sin\sigma}X - \frac{\sigma}{2\sin\sigma}X^2 \tag{3.8}$$

Пусть $\alpha_0 = 3$ и кососимметрическая матрица $S = 0$. При этом справедливо обратное выражение $\exp(S) = X$, где (3×3)-матрица S. Если $\alpha_0 = -1$, то уравнение $S^2 = (\pi^2/2)(X - E)$ имеет два решения $\pm S$ и $\exp(S) = \exp(-S) = X$.

Используя приведенные выше соотношения, можно параметризовать группу вращений $SO(3)$ множеством кососимметрических матриц S, для которых $\sigma \le \pi$. Здесь каждая ортогональная матрица X соответствует, по крайней мере, одной кососимметрической матрице S и всем инволютивным вращениям (матрица X инволютивная, если $X^2 = E$).

В рассматриваемом здесь векторном пространстве $\mathbf{R}^3$ (3×3)-матрице:

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.9}$$

всегда можно сопоставить трехмерный вектор $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^{\mathrm{T}}$, где угол поворота $\sigma = |\mathbf{s}| = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2}$. При этом с любой точкой трехмерной группы вращений $SO(3)$ может быть сопоставлена точка из замкнутого шара $\overline{\mathbf{B}}^3$ радиусом π, равным модулю вектора $|\mathbf{s}| = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^{1/2} \le \pi$. Поверхность такого шара (сфера $\mathbf{S}^2$) имеет структуру двумерного аналитического связанного замкнутого ориентируемого многообразия – подмногообразия $\mathbf{R}^3$ [15].

Для метода трехмерной экспоненциальной параметризации исходное линейное кинематическое дифференциальное уравнение Пуассона ($\dot{X} = \Omega X$) преобразуется в нелинейное матричное уравнение следующего вида:

$$\frac{d}{dt}S = \Omega - \frac{1}{2}(\Omega S - S\Omega) + \frac{2 - \sigma\sin\sigma}{1 - \cos\sigma}(S^2\Omega + \Omega S^2 - 2S\Omega S) \tag{3.10}$$

Полный вывод данного уравнения вращения требует довольно трудоемких и сложных преобразований, которые здесь опущены. Очевидно, что структура преобразованного уравнения (3.10) значительно сложнее исходного линейного уравнения. Кроме того, преобразованное уравнение имеет особые точки (полюса) при углах Эйлера кратных π. Последнего можно было ожидать, так как сам вектор ориентации Эйлера трехмерный.

Следует отметить, что первым в открытой печати опубликовал без вывода это дифференциальное уравнение в универсальной матричной форме записи (3.10). Дж. Стьюльпнагель в 1964 г. [2], но тогда его публикация осталась практически незамеченной. Позднее, в 1971 г. Дж. Бортц [16], со ссылкой только на закрытый отчет

Министерства обороны США 1949 г. Дж. Лэнинга [16], представил полный вывод векторного дифференциального уравнения вращения, которое в некоторых отечественных [15] и зарубежных источниках называется уравнением Эйлера–Бортца.

Можно показать, что обе формы записи кинематического дифференциального уравнения (и в матричном, и векторном виде) эквивалентны.

Анализ уравнения (3.10) показал, что по сравнению с исходным линейным уравнением вращения представленное матричное уравнение имеет минимально допустимое число параметров ориентации – три. Но преобразованное дифференциальное уравнение (3.10) значительно сложнее исходного матричного и имеет особые точки. Однако с его помощью довольно просто обрабатывается информация о квазикоординатах, поступающая непосредственно с выходов инерциальных датчиков. К ним относятся, например, интегрирующие кольцевые лазерные и волновые твердотельные гироскопы [18].

Таким образом, при условии $\sigma \le \pi$, интегрируя уравнение (3.10) и непрерывно определяя составляющие s_1, s_2, s_3 вектора $\mathbf{s}$, по выражениям (3.9) и (3.6) относительно просто вычисляется искомая ортогональная матрица X произвольного поворота твердого тела в векторном пространстве $\mathbf{R}^3$.

4. Метод вещественной дробно-линейной параметризации Кэли. Этот метод параметризации группы трехмерных вращений $SO(3)$ более известен как способ трехмерной параметризации Кэли [2]. При такой параметризации повороту тела в $\mathbf{R}^3$ соответствует вещественное дробно-линейное преобразование Кэли, а для представления вращения используется кососимметрическая матрица K, подобная матрице S.

Основным свойством поворота в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ является то, что он оставляет неподвижной одну ось в пространстве. Этот результат составляет содержание фундаментальной теоремы Эйлера [1, 3, 4–8, 19] – произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, эквивалентно плоскому повороту вокруг некоторой фиксированной оси.

В соответствии с этой теоремой любое ортогональное преобразование можно представить эквивалентным плоским поворотом: охарактеризовать вектором вращения $\mathbf{e}(|\mathbf{e}| = 1)$ и углом поворота $\theta_E(0 \le \theta_E \le \pi)$.

Заметим, что все параметры, которые синтезированы в настоящее время или будут получены в последующем, на основании теоремы Эйлера, так или иначе связаны с вектором Эйлера и углом плоского поворота.

В [2] весьма кратко рассмотрена трехмерная параметризация Кэли, которую не следует путать с комплексными параметрами Кэли–Клейна [1, 4, 7], введенными в аналитическую механику немецким математиком Ф. Клейном.

Для представления всех произвольных поворотов (вращений) твердого тела в данном методе трехмерной параметризации используется специальная кососимметрическая матрица $K = \int \Gamma(\tau)d\tau$, где Γ – "гироскопическая" 3×3-матрица угловых скоростей объекта. При этом матрица K такая, что $\theta_E^2 = -(1/2)\mathrm{tr}K^2$ и $\theta_E = \theta_K$, где θ_K – угол плоского поворота Эйлера–Кэли.

Данный способ трехмерной параметризации группы вращения $SO(3)$ основан на основных формулах Кэли [17]. Однако прежде чем представить сами аналитические соотношения, введем линейный оператор K, которому в пространстве $\mathbf{R}^3$ соответствует кососимметрическая (3×3)-матрица

$$K = \begin{Vmatrix} 0 & k_3 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & -k_1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad K^T = -K \tag{4.1}$$

Такой матрице K в пространстве $\mathbf{R}^3$ дуален вектор ориентации $\mathbf{k} \in \mathbf{R}^3$, который имеет три составляющие k_1, k_2, k_3 параметров ориентации Кэли.

Норма самого вектора $\mathbf{k}$ известна и равна $|\mathbf{k}| = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}$.

Здесь введем в рассмотрение ортогональный оператор $X(3 \times 3)$ такой, что $X^T = X^{-1}$. На основании формулы Кэли, устанавливающей дробно-линейную зависимость между ортогональными X и кососимметрическими K операторами в пространстве $\mathbf{R}^3$, имеем следующее соотношение [2, 17]:

$$X = (E - K)(E + K)^{-1} \tag{4.2}$$

где E – единичная (3×3)-матрица; K – кососимметричная матрица.

Уравнение (4.2) можно обратить и получить следующее:

$$K = (E - X)(E + X)^{-1} \tag{4.3}$$

Формулы Кэли (4.2) и (4.3) устанавливают взаимно однозначное соответствие между кососимметрическими операторами и теми ортогональными операторами, у которых среди характеристических чисел нет равных –1.

Учитывая, что квадрат плоского угла поворота равен $\theta^2 = -(1/2)\mathrm{tr}K^2$, а сам $\mathrm{tr}K^2 = -2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$, следуя известному подходу [2], можно преобразовать формулу (4.2) к виду, удобному для некоторых прикладных задач

$$X = E - \frac{2}{1 + \theta_K^2}K + \frac{2}{1 + \theta_K^2}K^2 \tag{4.4}$$

Здесь θ_K – угол плоского поворота, $0 \le \theta_K < \pi$, и ограничения, которые накладываются на угол θ_K, не противоречат фундаментальной теореме Эйлера.

Можно показать, что матрица X, вычисляемая на основании формулы (4.4) – ортогональная (3×3)-матрица. Характеристическое уравнение такой матрицы X имеет известный вид [1, 2, 17]

$$\lambda^3 - \lambda^2(\mathrm{tr}X) + \lambda(\mathrm{tr}X) - 1 = 0, \quad \mathrm{tr}X = x_{11} + x_{22} + x_{33} = x_1 + x_5 + x_9 \tag{4.5}$$

Уравнение (4.5) имеет один очевидный корень $\lambda_1 = 1$. Два других корня равны

$$\lambda_{2,3} = [1 \pm 2i\theta_0 - \theta_K^2]/(1 + \theta_K^2)$$

где i – комплексная единица. Так как норма $|\lambda| = 1$, то тригонометрическая форма записи корней имеет следующее представление: $\lambda_{2,3} = \cos\theta \pm i\sin\theta$.

Следовательно, $\cos(\theta_K) = [\mathrm{tr}X - 1]/2$. Очевидно, что эти корни – вещественные числа. Заметим, что если угол $\theta_K = 0$, тогда все корни равны +1.

Поэтому, используя метод трехмерной параметризации Кэли, с помощью кососимметрической (3×3)-матрицы K невозможно получить ортогональную (3×3)-матрицу X поворота твердого тела, которая имеет характеристические числа, равные –1. Геометрическая интерпретация вышесказанного следующая. Основная формула Кэли (4.2) и соответствующая ей трехмерная параметризация Эйлера–Кэли позволяет вычислять ортогональную матрицу X вращения твердого тела, среди характеристических чисел которых нет равных –1. Таким образом, недопустимы повороты твердого тела на угол равный и больше π.

Вместо соотношений (4.2) и (4.3) можно взять дополнительные формулы

$$K = (E + X)(E - X)^{-1} \tag{4.6}$$

$$X = -(E - K)(E + K)^{-1} \tag{4.7}$$

которые позволяют обойти указанное выше ограничение. Однако теперь роль особой точки будет играть характеристическое число, равное +1. В этом случае существует запрет на поворот объекта на угол $\theta = 0$ (жесткое условие отсутствия вращения).

Следует отметить, что для прикладных задач, в которых заранее известно, что угол поворота не превысит значений $0 \le \theta_K < \pi$, предпочтительнее основные формулы Кэли (4.2) и (4.3). Таким образом, если $X \in SO(3)$ и $\alpha_0 = \mathrm{tr}X$, то для всех значений $\alpha_0 \ne -1$ справедлива формула (4.3), которая может быть представлена в следующем, удобном для приложений виде [2]:

$$K = \frac{1}{(1+\alpha_0)}[\alpha_0 E - (1+\alpha_0)X + X^2] \tag{4.8}$$

Очевидно, что выражение (4.8) является обратным по отношению к соотношениям (4.2) и (4.4). Дифференцируя (4.8) по времени t и подставляя результат в исходное кинематическое уравнение Пуассона [1], Стьюльпнагель в [2] представил без вывода матричное дифференциальное уравнение вращения вида Риккати

$$\frac{d}{dt}K = \frac{1}{2}(K\Omega K - K\Omega + \Omega K - \Omega) \tag{4.9}$$

5. Вывод кинематического уравнения вида Риккати. Представим вывод кинематического дифференциального уравнения вращения вида Риккати, основанный на лемме о коммутации матриц в основной формуле Кэли.

Лемма. Пусть A, B: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – линейные операторы. Допустим, что

$$A = (E-K), \quad B = (E+K)^{-1}$$

Если A, B коммутируют, то справедливо тождество

$$(E-K)(E+K)^{-1} = (E+K)^{-1}(E-K) \tag{5.1}$$

Доказательство. Умножая одновременно левую и правую части тождества (5.1) слева и справа на $(E+K) \ne 0$, имеем

$$(E+K)(E-K)(E+K)^{-1}(E+K) = (E+K)(E-K) \tag{5.2}$$

$$(E+K)(E+K)^{-1}(E-K)(E+K) = (E-K)(E+K) \tag{5.3}$$

Раскрывая в правых частях (5.2) и (5.3) скобки, имеем

$$(E+K)(E-K) = (E-K+K-K^2) \tag{5.4}$$

$$(E-K)(E+K) = (E-K+K-K^2) \tag{5.5}$$

Лемма доказана.

Используя доказанную лемму, приведем довольно простой вывод кинематического дифференциального уравнения вращения (4.9) вида Риккати.

Умножая основную формулу Кэли (4.2), справа на матрицу $(E+K) \ne 0$, получим

$$X(E+K) = E-K \tag{5.6}$$

Теперь продифференцируем уравнение (5.6) по времени t и после приведения подобных членов имеем

$$\frac{d}{dt}X(E+K) = -(E+X)\frac{d}{dt}K \tag{5.7}$$

Подставляя основную формулу Кэли (4.2) для матрицы X в правую часть соотношения (5.7) и, учитывая в его левой части исходное линейное уравнение в форме Пуассона ($\dot{X} = \Omega X$) получим уравнение

$$\Omega X(E+K) = -[E+(E-K)(E+K)^{-1}]\frac{d}{dt}K \tag{5.8}$$

Применяя в левой части уравнения (5.8) для ортогональной матрицы X непосредственную подстановку основной формулы Кэли (4.2) получим

$$\Omega(E-K)(E+K)^{-1}(E+K) = -[E+(E-K)(E+K)^{-1}]\frac{d}{dt}K \tag{5.9}$$

Используя доказанную выше вспомогательную лемму о коммутации матриц (в основной формуле Кэли), заменяем в правой части уравнения (5.9) произведение матриц $(E-K)(E+K)^{-1}$ соответственно на $(E+K)^{-1}(E-K)$ и имеем

$$\Omega(E-K) = -[E+(E+K)^{-1}(E-K)]\frac{d}{dt}K \tag{5.10}$$

Умножая обе части уравнения (5.10) слева на матрицу $(E+K)$, получим

$$(E+K)\Omega(E-K) = -[(E+K)E+(E+K)(E+K)^{-1}(E-K)]\frac{d}{dt}K \tag{5.11}$$

Сделав преобразования и упрощения в правой части выражения (5.11), имеем

$$(E+K)\Omega(E-K) = -[E+KE+E-K]\frac{d}{dt}K \tag{5.12}$$

Выполнив прямое перемножение матриц, и сокращая в правой части подобные члены, перепишем формулу (5.12) в следующем виде:

$$(E\Omega+K\Omega)(E-K) = -2E\frac{d}{dt}K \tag{5.13}$$

На основании (5.13) после перемножения левых матриц окончательно имеем

$$(E\Omega E-E\Omega K+K\Omega E-K\Omega K) = -2E\frac{d}{dt}K \tag{5.14}$$

Последнее уравнение имеет эквивалентную форму записи матричного дифференциального уравнения вращения

$$(\Omega-\Omega K+K\Omega-K\Omega K) = -2\frac{d}{dt}K \tag{5.15}$$

Откуда получим дифференциальное уравнение вращения (4.9) вида Риккати

$$\frac{d}{dt}K = \frac{1}{2}[K\Omega K-K\Omega+\Omega K-\Omega] \tag{5.16}$$

Уравнение (5.16) имеет невырождающуюся структуру и наиболее простое аналитическое выражение для всех известных методов трехмерной параметризации. По этой причине уравнение вращения вида Риккати можно вполне успешно использовать при решении многих прикладных задач кинематики твердого тела, в которых угол поворота $\theta_K < 180°$. Таким образом поставленная выше задача решена.

6. Некоторые прикладные аспекты трехмерной параметризации Кэли. В случаях, когда заранее известно, что след матрицы X никогда не будет равным –1, представленная выше трехмерная параметризация Кэли является весьма удобным методом определения ориентации твердого тела по выходным данным трех инерциальных измерителей. В частности при обработке сигналов интегрирующих кольцевых лазерных гироскопов (КЛГ), волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) и разнесенных одноосных акселерометров, применяемых в современных системах ориентации и навигации [18].

Кинематическое уравнение (5.18) не имеет сингулярных точек, но и не определяет искомую матрицу поворота X, для которой $\mathrm{tr}X = -1$.

В [20] показано, что использование трех параметров ориентации Кэли в качестве промежуточных переменных для обработки сигналов одноосных датчиков, более эффективно, чем применение известных трехмерных параметров Эйлера–Бортца [12, 15, 16]. Последние параметры получают при решении векторного кинематического дифференциального уравнения Бортца, имеющего следующую форму записи [16]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\right)\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}) \tag{6.1}$$

где $\varphi = |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ – угол плоского поворота Эйлера.

Можно показать, что векторному дифференциальному уравнению вращения (6.1) соответствует матричное

$$\frac{d}{dt}K = \Omega - \frac{1}{2}(\Omega K - K\Omega) + \frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\right)(K^2\Omega + \Omega K^2 - 2K\Omega K) \tag{6.2}$$

Доказательство основывается на том, что простому векторному произведению $(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega})$ соответствует коммутатор $(\Omega K - K\Omega)$, а двойному векторному произведению $(\mathbf{x}\times(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\omega}))$ – двойной коммутатор $(K^2\Omega + \Omega^2 K - 2K\Omega K)$.

Следует отметить, что оба кинематических уравнения (6.1) и (6.2) имеют особые точки $\varphi = \theta_E = 0$, а также включают в себя трансцендентные функции. Поэтому в современных бортовых алгоритмах ориентации [21] для аппроксимации переменного коэффициента перед двойным векторным произведением в уравнении (6.1) применяют постоянное отношение. Действительно, при условии, что угол поворота не превосходит $\theta_E \le 0.1$, для этого переменного коэффициента имеем следующее постоянное значение:

$$\frac{1}{\varphi^2}\left(1 - \frac{\varphi\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\right) \approx \frac{1}{12} \tag{6.3}$$

что естественно снижает точность определения трех локальных параметров.

Сравнительный анализ кинематических уравнений (5.16) и (6.2) показывает, что применение в прикладных задачах и исследованиях дифференциального уравнения вращения вида Риккати более эффективно. Так уравнение (5.16) является хорошо определенным и не имеет особых точек, в которых производная искомой кососимметрической матрицы $K \to \infty$.

Однако решения этого уравнения не позволяют непосредственно получать ортогональную матрицу поворота X со следом равным –1. Поэтому при методе трехмерной дробно-линейной параметризации Кэли недопустим поворот твердого тела на плоский угол $\theta = 180°$.

Кроме рассмотренных преимуществ, полезность метода трехмерной дробно-линейной параметризации Кэли, по сравнению с классическим методом экспоненциальной ($X = \exp(S)$) параметризации становится очевидной, если представить развернутое аналитическое выражение искомой ортогональной матрицы X.

Элементы матрицы поворота X, выраженные через рассмотренные выше вещественные параметры ориентации Эйлера–Кэли, представим в виде

$$X = \left\| \begin{matrix} 1-f(k_2^2+k_3^2) & f(k_1k_2-k_3) & f(k_1k_3+k_2) \\ f(k_1k_2+k_3) & 1-f(k_1^2+k_3^2) & f(k_2k_3-k_1) \\ f(k_1k_3-k_2) & f(k_2k_3+k_1) & 1-f(k_1^2+k_2^2) \end{matrix} \right\| \qquad (6.4)$$

где $f = 2/(1+\theta_K^2)$, $\theta_K = |K| = (k_1^2+k_2^2+k_3^2)^{1/2}$ – угол поворота Эйлера–Кэли.

Аналитическое выражение матрицы X через параметры вектора Эйлера–Лэнинга–Бортца имеет более сложный вид

$$X = \left\| \begin{matrix} 1-f_2(\varphi_2^2+\varphi_3^2) & f_1\varphi_3+f_2(\varphi_1\varphi_2) & f_2(\varphi_1\varphi_3)-f_1\varphi_2 \\ f_2(\varphi_1\varphi_2)-f_1\varphi_3 & 1-f_2(\varphi_1^2+\varphi_3^2) & f_1\varphi_1+f_2(\varphi_2\varphi_3) \\ f_2\varphi_2+f_2(\varphi_1\varphi_3) & f_2(\varphi_2\varphi_3)-f_1\varphi_1 & 1-f_2(\varphi_1^2+\varphi_2^2) \end{matrix} \right\| \qquad (6.5)$$

Здесь $f_1 = \sin\varphi/\varphi$; $f_2 = (1-\cos\varphi)/\varphi^2$; $\varphi = (\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)^{1/2}$.

Очевидно, что переменные коэффициенты f_i ($i = 1, 2$) развернутого выражения матрицы поворота общего вида содержат трансцендентные функции. Как известно, такие функции намного сложнее реализовать в бортовых вычислительных процедурах любых алгоритмов ориентации.

Все это позволяет сделать заключение о несомненном преимуществе применения трех вещественных параметров Кэли в задачах определения ориентации любых подвижных объектов.

7. Некоторые прикладные аспекты трехмерной параметризации на основе вектора конечного поворота Родрига и Гиббса. Вместо двух параметров Эйлера (одна неподвижная ось **e** и один единственный угол поворота θ_E) иногда удобно использовать "вектор конечного поворота" Родрига или Гиббса [10, 12–14].

Вектор Родрига совпадает по направлению с ортом **e** оси Эйлера и равен по величине удвоенному тангенсу половины угла поворота θ_E. Кинематическое дифференциальное уравнение в переменных этого вектора для вращающегося твердого тела сравнительно легко выводится из уравнения Родрига. Не останавливаясь подробно на его выводе, с точностью до обозначений можем непосредственно записать [10, 14]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_R = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}_R + \frac{1}{4}\mathbf{p}_R(\boldsymbol{\omega}\mathbf{p}_R) \qquad (7.1)$$

где $\mathbf{p}_R = 2\,\mathrm{tg}(\theta_E/2)\mathbf{e}$ – трехмерный вектор Родрига.

Несмотря на ряд очевидных преимуществ использования вектора конечного поворота Родрига, кинематическое дифференциальное уравнение (7.1) нелинейное по переменной $\mathbf{p}_R$ и, согласно данному выше определению вектора, допускает вырождение при углах поворота $\theta_E = (2k+1)\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Все это снижает реальную возможность применения вектора конечного поворота (Родрига) в прикладных задачах кинематики твердого тела – алгоритмах ориентации современных маневренных объектов.

Дж. Гиббсом введен вектор "конечного поворота" – вектор Гиббса [22]. Вектор совпадает по направлению с ортом **e** оси Эйлера и равен по величине тангенсу половины угла θ_E. Кинематическое дифференциальное уравнение для вращающегося твердого тела также сравнительно просто выводится и для вектора Гиббса. Не останавливаясь на его подробном выводе, с точностью до обозначений, получаем следующее уравнение [23]:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_G = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_G) + \mathbf{p}_G(\boldsymbol{\omega}\mathbf{p}_G)) \tag{7.2}$$

где $\mathbf{p}_G = \mathrm{tg}(\theta_E/2)\mathbf{e}$ – трехмерный вектор Гиббса.

Несмотря на ряд очевидных преимуществ использования вектора Гиббса, кинематическое дифференциальное уравнение вращения нелинейное по переменной $\mathbf{p}_G$ и, согласно данному выше определению самого вектора, допускает вырождение при углах ориентации $\theta_E = (2k + 1)\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Приведенная выше система дифференциальных уравнений (7.2) определяет составляющие $\mathbf{p}_G$ вектора Гиббса, когда заданы проекции ω_i вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси подвижного трехгранника, связанного с вращающимся телом. Вектор Гиббса, как и вектор Родрига подобно углам Эйлера и Эйлера–Крылова не нуждается в дополнительных тождествах связи и не требует нормировки параметров. Его применение в процедурах определения ориентации объекта уменьшает объем вычислений (по сравнению с кватернионами и параметрами Родрига–Гамильтона) почти на 30%, поскольку при этом вычисляются не четыре параметра, а всего лишь три проекции вектора конечного поворота на измерительные оси приборного триэдра [10].

Но нелинейности по $\mathbf{p}_G$ и наличие сингулярных точек не позволяют вектору Родрига (также как и вектору Гиббса) стать универсальным кинематическим параметром и снижают возможности его реального применения в задачах определения ориентации маневренного объекта.

Однако следует отметить [14], что модифицированный вектор Родрига–Гиббса ($\mathbf{p}_M = \mathrm{tg}(\theta_E/4)\mathbf{e}$) не имеет указанных особенностей при угле поворота $0 \le \theta_E < 2\pi$ и в настоящее время весьма успешно используется при решении многих прикладных задач по определению ориентации подвижных объектов.

Анализ трехмерной параметризации позволяет сделать следующие выводы.

1. Минимальное по размерности трехмерное семейство параметров (угловых координат) позволяет однозначно определять ориентацию твердого тела только при известных ограничениях;

2. Параметризация Кэли ведет к хорошо определенному дифференциальному уравнению вращения, которое имеет невырождающуюся структуру, но, в то же время, такая параметризация не представляет матрицы X со следом, равным –1;

3. В прикладных задачах определения ориентации объектов (робототехники и прецизионного станкостроения), когда заранее известно, что $\mathrm{tr}X \neq -1$, трехмерная параметризация Кэли служит для простого представления всех допустимых положений твердого тела в пространстве;

4. Трехмерная параметризация Кэли может быть успешно использована для определения положения в пространстве маломаневренных объектов;

5. Прямая реализация метода трехмерной параметризации Кэли в системах ориентации высокоманевренных объектов не допустима и требует новых способов интеграции (см., например, [20]) с известными методами глобальной параметризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.
2. *Stuelpnagel J.* On the parametrization of the three – dimensional rotation group // SIAM REVIEW. 1964. V. 6. № 4. P. 422–429.
3. *Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.* Математические аспекты кинематики твердого тела: Учебное пособие. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 252 с.
4. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.
5. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
6. *Синг Д.Л.* Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963. 448 с.
7. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 760 с.
8. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
9. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 1. М.: Физматлит, 1958. 328 с.
10. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Киев: Наук. думка, 1983. 208 с.
11. *Липтон А.* Выставка инерциальных систем на подвижном основании. М.: Наука, 1971. 168 с.
12. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 278 с.
13. *Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В.* Механика полета. (Общие сведения. Уравнения движения). Инженерный справочник. М.: Машиностроение, 1969. 420 с.
14. *Marcelo H.J., Vassilios D.T.* Singularities of Euler and Roii–Pitch–Yaw Representations // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1987. V. 19. No. 1. P. 59–69.
15. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 290 с.
16. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigaton // IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems // 1971. AES-7. № 1. P. 61–66.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
18. Litton Space Operations. Technology and Product Overview. May 1996. 86 с.
19. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство – время. М.: Мир, 1987. 528 с.
20. *Переляев С.Е.* Новый комбинированный алгоритм определения ориентации твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 3–19.
21. *Savage P.G.* Strapdown system algorithms. ACARD, Advances In Strapdown Inertial Systems, 1984. P. 3.1–3.28.
22. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.
23. *Троило Т.* Некоторые теоремы о прецессионных движениях и о регулярной прецессии // Механика. Периодический сборник переводов. М.: Мир, 5*141, 1973. С. 43–47.

Москва

Поступила в редакцию
20.03.2001