

УДК 533.6.013.42

© 2003 г. А.Г. ГОРШКОВ, О.В. ЕГОРОВА, А.Л. МЕДВЕДСКИЙ, Л.Н. РАБИНСКИЙ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ ПРЕПЯТСТВИИ

Исследуется плоская задача дифракции акустических волн на тонких упругих криволинейных цилиндрических оболочках, заключенных в абсолютно жесткий экран. Основное внимание уделяется проблеме определения гидродинамического давления, действующего на оболочки [1, 2]. На основании теории тонкого слоя получены выражения для переходной функции.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая выпуклая цилиндрическая упругая оболочка толщиной h , помещенная в абсолютно жесткий экран, контактирующий с акустической средой с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . Материал оболочки характеризуется параметрами Ламе λ и μ , а также плотностью ρ . Регулярная спрямляемая кривая Γ является направляющей цилиндрической оболочки и определяется параметрически в декартовой прямоугольной системе координат Ox^1x^2 :

$$\Gamma: x_0^i = x_0^i(\xi^1), \quad \xi^1 \in \Omega \subseteq \mathbf{R} \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где Ω – связное множество в \mathbf{R} .

В начальный момент времени $t = 0$ плоская падающая волна давления в акустической среде с давлением на фронте $p_* = f(x^i, t)$ касается оболочки в точке A . Исследуется задача о нахождении полей давления в отраженной и излученной волнах, а далее возможно определение напряженно-деформированного состояния в оболочке. В начальном состоянии оболочка и среда находятся в невозмущенном состоянии (фиг. 1).

Акустическая среда в потенциалах описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \varphi, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = \text{grad} \varphi \quad (1.2)$$

$$\varphi|_{t=0} = \dot{\varphi}|_{t=0} = 0 \quad (1.3)$$

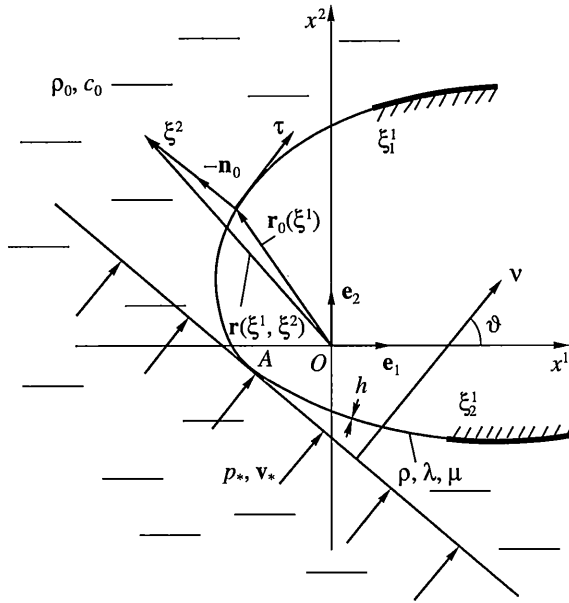
где φ – потенциал скорости, p – давление в отраженной и излученной волнах.

Упругая цилиндрическая оболочка описывается линейными уравнениями теории тонких оболочек в перемещениях с однородными начальными условиями

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = L_{ij}(u_j) + (p_* + p)\delta_{i2}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.4)$$

$$u_i|_{t=0} = \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (1.5)$$

Здесь u_i обобщенные перемещения срединной поверхности оболочки, L_{ij} – известные дифференциальные операторы, определяемые геометрией оболочки, δ_{ij} – симво-



Фиг. 1

лы Кронекера. К дифференциальным уравнениям (1.4) необходимо добавить граничные условия, зависящие от формы оболочки и ее закрепления в пространстве

$$N^{(m)}(u_i)|_{\xi^1 = \xi_k^1} = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (1.6)$$

где $N^{(m)}$ – некоторые дифференциальные операторы порядка m на граничных линиях оболочки $\xi^1 = \xi_k^1$.

Из условий совместного движения оболочки и прилегающих к ней частиц акустической среды следуют условия непротекания

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_*}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \quad (1.7)$$

где φ_* – потенциал скорости падающей на оболочку волны, $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к оболочке.

Решение для акустической среды должно быть ограниченным на бесконечности:

$$\varphi(r, t) = O(1) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad r^2 = x^i x^i \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к совместному решению уравнений (1.2) и (1.4) с однородными начальными условиями (1.3) и (1.5), граничными условиями (1.6) и условиями непротекания (1.7).

Давления p_1 и p_2 в отраженной и излученной волнах могут быть найдены с помощью переходной функции $G(x^i, t)$ (звездочкой обозначена операция свертки по времени t)

$$p_1(\xi^1, t) = \frac{\partial \varphi_*(\xi^1, 0, t)}{\partial n} * G_p(\xi^1, t) \quad (1.9)$$

$$p_2(\xi^1, t) = \frac{\partial u_1}{\partial t}(\xi^1, t) * G_p(\xi^1, t) \quad (1.10)$$

$$p = p_1 + p_2, \quad G_p(\xi^1, p) = -\rho_0 \frac{\partial G(x^i, t)}{\partial t} \Big|_{\Gamma} \quad (1.11)$$

При этом функция влияния $G(x^i, t)$ удовлетворяет следующей начально-краевой задаче:

$$\partial^2 G / \partial t^2 = c_0^2 \Delta G \quad (1.12)$$

$$G|_{t=0} = \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \delta(t), \quad G(r, t) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Основная трудность в исследовании дифракции акустической волны давления на тонкой упругой оболочке связана с определением переходной функции влияния $G(\xi^i, t)$ и построением достаточно эффективных методов интегрирования системы уравнений движения оболочки с произвольной геометрией.

2. Теория тонкого слоя для выпуклого криволинейного препятствия. Введем криволинейную систему координат (ξ^1, ξ^2) , связанную с кривой Γ . Пусть $\mathbf{r}_0(\xi^1)$ радиус-вектор кривой Γ , а $\mathbf{n}_0(\xi^1)$ – вектор единичной нормали (фиг. 1). Тогда криволинейная система координат (ξ^1, ξ^2) определяется следующим образом [3] (дифференцирование обозначено нижним индексом):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\xi^1, \xi^1) &= \mathbf{r}_0(\xi^1) - \xi^2 \mathbf{n}_0(\xi^1) \\ \mathbf{r} &= x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}_0 = x_0^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{n}_0 = n_0^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{n}_0^2 = 1, \quad \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{0, \xi^1 \xi^1} > 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \mathbf{e}_i – базис декартовой прямоугольной системы координат Ox^1x^2 .

Ковариантный базис $\tilde{\mathbf{e}}_i$ и ковариантные компоненты метрического тензора g_{ij} определяются известными соотношениями [3]:

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{r}_{\xi^1} = \boldsymbol{\tau} - \xi^2 \mathbf{n}_{0, \xi^1}, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{r}_{\xi^2} = \mathbf{n}_0, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_{0, \xi^1} = x_{0, \xi^1}^i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

$$g_{11} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_1) = \boldsymbol{\tau}^2 - 2\xi^2 \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{0, \xi^1} + (\xi^2)^2 \mathbf{n}_{0, \xi^1}^2 \quad (2.3)$$

$$g_{12} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2) = \xi^2 \mathbf{n}_{0, \xi^1} \cdot \mathbf{n}_0, \quad g_{22} = (\tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_2) = \mathbf{n}_0^2 = 1$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – касательный вектор к кривой Γ .

Воспользуемся формулами Френе [3] для плоской кривой

$$\mathbf{n}_{\xi^1} = -k\boldsymbol{\tau}, \quad k = \frac{|\mathbf{r}_{0, \xi^1} \times \mathbf{r}_{0, \xi^1 \xi^1}|}{|\mathbf{r}_{0, \xi^1}|^3} \quad (2.4)$$

где $k = k(\xi^1)$ – кривизна кривой Γ .

В результате компоненты метрического тензора g_{ij} (2.3) примут вид

$$g_{11} = H_1^2 = \boldsymbol{\tau}^2 (1 + 2\xi^2 k + (\xi^2 k)^2), \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = H_2^2 = 1 \quad (2.5)$$

и, следовательно, введенная система координат является ортогональной.

Для нахождения функции влияния $G(\xi^i, t)$ в построенной системе координат (ξ^1, ξ^2) согласно (1.12)–(1.14) имеем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial G}{\partial \xi^1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(H_1 \frac{\partial G}{\partial \xi^2} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$G|_{t=0} = \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi^2=0} = \delta(t), \quad G(r, t) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad r^2 = \xi^i \xi^i \quad (2.8)$$

Будем считать, что основной вклад в гидродинамическую нагрузку дает движение среды по нормали к поверхности [1]. Таким образом, движением среды вдоль поверхности Γ можно пренебречь. Поэтому производные по координате ξ^1 в (2.16) можно положить тождественно равными нулю, а оператор Лапласа вычислить на поверхности цилиндра $\xi^2 = 0$. Тогда уравнение (2.6) представляется в виде

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \frac{c_0^2}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(H_1 \frac{\partial G}{\partial \xi^2} \right) \right] \Big|_{\xi^2=0} \quad (2.9)$$

Вычисляя правую часть уравнения (2.9) с учетом (2.5), для функции $G(\xi^i, t)$ получаем следующую начально-краевую задачу:

$$c_0^{-2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = G_{\xi^2 \xi^2} + k G_{\xi^2} \quad (2.10)$$

$$G|_{t=0} = \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi^2=0} = \delta(t), \quad G(r, t) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad r^2 = \xi^i \xi^i \quad (2.12)$$

Применим к задаче (2.10)–(2.12) преобразование Лапласа по времени t . Тогда в пространстве изображений получим следующую краевую задачу (s – параметр преобразования, значком L обозначена трансформанта по Лапласу):

$$G_{\xi^2 \xi^2}^L + k(\xi^1) G_{\xi^2}^L - c_0^{-2} s^2 G^L = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial G^L}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi^2=0} = 1, \quad G^L(r, s) = O(1) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad r^2 = \xi^i \xi^i \quad (2.14)$$

Общее решение уравнения (2.13) имеет вид:

$$G^L(\xi^i, s) = C_1 e^{-v_1 \xi^2} + C_2 e^{v_2 \xi^2} \quad (2.15)$$

$$v_j = v_j(\xi^1, s) = \frac{1}{2} [(-1)^{j+1} k(\xi^1) + \sqrt{k^2(\xi^1) + 4s^2 c_0^{-2}}] \quad (j = 1, 2) \quad (2.16)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.14) получим следующее выражение для функций влияния $G_0^L(\xi^1, s) = G^L(\xi^1, 0, s)$:

$$G_0^L(\xi^1, s) = \frac{2}{k(\xi^1) + \sqrt{k^2(\xi^1) + 4s^2 c_0^{-2}}} \quad (2.17)$$

Оригинал функции (2.17) может быть вычислен аналитически в замкнутом виде [4]:

$$G_0(\xi^1, t) = -\frac{H(t)}{c_0} \left\{ J_0(\gamma t) - \gamma t [1 + J_1(\gamma t)] + \right. \\ \left. + (\gamma t)^2 \left[J_0(\gamma t) - \frac{\pi}{2} [J_0(\gamma t) \mathbf{H}_1(\gamma t) + J_1(\gamma t) \mathbf{H}_0(\gamma t)] \right] \right\}, \quad \gamma = \frac{k(\xi^1)}{2c_0} \quad (2.18)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, $\mathbf{H}_\nu(z)$ – функции Струве порядка ν , $J_n(z)$ – функции Бесселя первого рода порядка n .

Следовательно, для давления в отраженной и излученной волны из (1.9)–(1.11) и (2.18) получим

$$p_1(\xi^1, t) = -\rho_0 \int_0^t \frac{\partial \Phi_*(\xi^1, 0, t - \tau)}{\partial \xi^2} \dot{G}_0(\xi^1, \tau) d\tau \quad (2.19)$$

$$p_2(\xi^1, t) = -\rho_0 \int_0^t \frac{\partial u_1(\xi^1, t - \tau)}{\partial t} \dot{G}_0(\xi^1, \tau) d\tau \quad (2.20)$$

$$\dot{G}_0(\xi^1, t) = -\frac{1}{c_0} \left\{ \delta(t) + \gamma H(t) \left\{ 1 + J_1(\gamma t) - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma t \left[J_0(\gamma t) - \frac{\pi}{2} [J_0(\gamma t) \mathbf{H}_1(\gamma t) + J_1(\gamma t) \mathbf{H}_0(\gamma t)] \right] \right\} \right\} \quad (2.21)$$

Полученные соотношения (2.18) для функции влияния $G_0(\xi^1, t)$ содержат только один параметр кривой Γ – кривизну k . Кривизна k является инвариантом кривой Γ , поэтому выражение для переходной функции $G_0(\xi^1, t)$ (2.18) также является инвариантным относительно параметризации (1.1). Формулы (2.19), (2.20) дают возможность приближенно определить давление на поверхности деформируемой преграды при дифракции на ней акустических волн.

3. Дифракция плоской косой волны на неподвижном криволинейном препятствии.

В качестве примера рассмотрим задачу о дифракции ступенчатой плоской косой волны давления на жестком неподвижном криволинейном препятствии. Косая плоская акустическая волна с фронтом, составляющим угол ϑ с осью Ox^1 , в начальный момент времени $t = 0$ касается поверхности цилиндра с направляющей Γ в точке А (фиг. 1). Давление за фронтом волны в системе координат $Ox^1 x^2$ задается следующим соотношением:

$$p_*(x^j, t) = p_0 H(t - f(x^j, \vartheta)) \quad (3.1)$$

$$f(x^j, \vartheta) = x^1 \cos \vartheta + x^2 \sin \vartheta + C \quad (3.2)$$

где константа C определяет положение фронта волны в начальный момент времени $t = 0$. Давлению (3.1) соответствует потенциал скорости падающей волны $\varphi_*(x^i, t)$:

$$\varphi_*(x^i, t) = -p_0(t - f(x^i, \vartheta))H(t - f(x^i, \vartheta)) \quad (3.3)$$

Давление p_1 в отраженной волне определяется соотношением (2.19) с соответствующей переходной функцией $\dot{G}_0(\xi^1, t)$ (2.21). При этом в силу неподвижности препятствия ($u_2 \equiv 0$) из (1.7) следуют граничные условия данной задачи:

$$\left. \frac{\partial \varphi(\xi^j, t)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi^2=0} = -v_{*n}(\xi^1, t) \quad (3.4)$$

где $v_{*n}(\xi^1, t)$ – нормальная компонента вектора скорости в падающей волне на поверхности цилиндра:

$$v_{*n}(\xi^1, t) = -(\mathbf{v}_*, \mathbf{n}) \Big|_{\xi^2=0} = \left. \frac{\partial \varphi_*(\xi^j, t)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi^2=0} \quad (3.5)$$

Для нормальной компоненты $v_{*n}(\xi^1, t)$ из (3.3), (3.5) и (2.1) получим:

$$v_{*n}(\xi^1, t) = p_0 \frac{\partial f(x^i, \vartheta)}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^2} H(t - f(x^i, \vartheta)) \Big|_{\xi^2=0} = \quad (3.6)$$

$$= p_0(n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta) H(t - f_0(\xi^1, \vartheta))$$

$$f_0(\xi^1, \vartheta) = f(x^i(\xi^j), \vartheta) \Big|_{\xi^2=0} \quad (3.7)$$

С учетом (3.4)–(3.7) и (2.19) давление в отраженной волне определится следующим образом:

$$p_1(\xi^1, t) = -\rho_0 p_0 (n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta) \int_0^{t - f_0(\xi^1, \vartheta)} \dot{G}_0(\xi^1, \tau) d\tau = \quad (3.8)$$

$$= -\rho_0 p_0 (n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta) G_0(\xi^1, t - f_0(\xi^1, \vartheta))$$

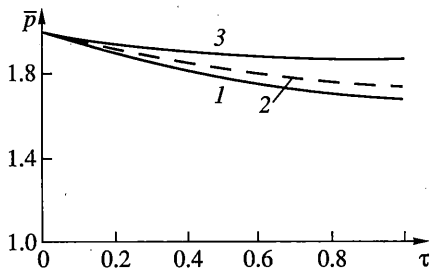
В качестве примера рассмотрим дифракцию плоской косой волны давления на параболическом препятствии. Абсолютно жесткий параболический цилиндр с фокальным расстоянием a в декартовой прямоугольной системе координат Ox^1x^2 определяется следующим образом:

$$\Gamma: x_0^1 = \frac{(\xi^1)^2}{2a}, \quad x_0^2 = \xi^1, \quad \xi^1 \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

$$k = \frac{a^2}{(a^2 + (\xi^1)^2)^{3/2}}, \quad n_0^1 = \frac{\xi^1}{\sqrt{a^2 + (\xi^1)^2}}, \quad n_0^2 = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + (\xi^1)^2}} \quad (3.10)$$

При этом константа C , определяющая точку касания в (3.2) имеет вид

$$C = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \vartheta \sin \vartheta \quad (3.11)$$



Фиг. 2

Введем безразмерные параметры (далее штрих везде опущен)

$$\xi = \frac{\xi^1}{a}, \quad \tau = \frac{c_0 t}{a}, \quad p_1' = \frac{p_1}{\rho_0 c_0^2}, \quad p_0' = \frac{p_0}{\rho_0 c_0^2}, \quad k' = ka, \quad \gamma' = \gamma a c_0 \quad (3.12)$$

Тогда из (3.8), (3.10) получим следующее выражение для безразмерного давления в отраженной волне:

$$p_1(\xi^1, t) = -p_0(n_1^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta) G_0(\xi^1, \tau - f_0(\xi^1, \vartheta)) \quad (3.13)$$

На фиг. 2 представлена временная зависимость давления $\bar{p} = p_* + p_1$ на параболическом цилиндре ($a = 1, p_0 = 1$) при действии плоской прямой волны ($\vartheta = 0$) в точке $\xi^1 = 0$ (кривая 1). На этом же графике штриховой линией (кривая 2) показано решение в лобовой точке $\xi^1 = 0$, полученное в работе [5]. Необходимо отметить хорошее совпадение результатов полученных с помощью зависимости (3.13) с известным аналитическим решением при малых временах взаимодействия.

Кривая 3 соответствует давлению в точке ($\xi^1 = -1$) при действии на параболический цилиндр с рассмотренными ранее параметрами плоской косой волны с углом падения $\vartheta = 45^\circ$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-100374).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев В.И., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек, Т. 5. Киев: Наук. думка, 1982. 400 с.
3. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина (Серия "Справочная математическая библиотека"). М.: Наука, 1969. 344 с.
5. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 232 с.

Москва

Поступила в редакцию
01.02.2003 г.