**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2003**

УДК 531.383

© 2003 г. **В.Ф. ЖУРАВЛЕВ**

О ДРЕЙФЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА (ВТГ) НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ ПРИ УПРАВЛЕНИИ КВАДРАТУРОЙ В РЕЖИМАХ “БЫСТРОГО” И “МЕДЛЕННОГО” ВРЕМЕНИ

Обсуждаются два основных алгоритма управления квадратурой в ВТГ. В одном алгоритме предметом регулирования являются электростатические силы, прикладываемые к резонатору, в другом электростатическая компонента жесткости. Проводится сравнение по эффективности обоих алгоритмов. Устанавливается, что на вращающемся основании главные дефекты резонатора разночастотность и разнодобротность приводят к уходу, имеющему постоянную составляющую, а также четвертую и восьмую гармоники по углу поворота основания.

Ниже используется электрическая модель ВТГ, полученная в [1] в виде

$$m\ddot{w}_1 + kw_1 - \frac{1}{2dC_0}\sum_1^n q_i^2\cos 2\theta_i = 0, \quad k = \frac{m}{\nu^2}$$

$$m\ddot{w}_2 + kw_2 - \frac{1}{2dC_0}\sum_1^n q_i^2\sin 2\theta_i = 0 \tag{1}$$

$$R\dot{q}_i + \frac{q_i}{C_i} + r\sum_{l=1}^n m_{il}\dot{q}_l = V_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$C_i = \varepsilon_0 S(d - w_i)^{-1} = C_0(1 - w_i/d)^{-1}$$

здесь w_1 и w_2 – обобщенные координаты основной формы колебаний резонатора, равные смещению резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга на угол 45° в угловом измерении по экватору; m – приведенная масса парциального осциллятора, соответствующего основной форме колебаний, равная для тонкой полусферической оболочки в приближении Релея 4.8 $\rho h R_c^2$, где ρ – плотность материала резонатора, h – толщина оболочки, R_c – радиус полусферы; k – приведенная жесткость; где ν – частота колебаний; q_i – заряд на конденсаторе, расположенном под углом $\theta_i = 2\pi(i-1)/n$ к отсчетной оси (n – число электродов); C_i – мгновенная емкость этого конденсатора, зависящая от прогиба w_i в месте положения этого конденсатора ($\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ ф/м, S – площадь пластины конденсатора, d – расстояние между пластинами при $w_i = 0$); R – сопротивление, подводящее к конденсатору напряжение V_i (это сопротивление полагается одинаковым для всех электродов); m_{il} – коэффициенты перекрестных связей между электродами (в следующем ниже анализе ими пренебрегается).

Уравнения (1) относятся как к случаю электродов съема информации, так и к случаю электродов управления. В дальнейшем рассматривается только случай электродов управления, для которого $n = 16$, а сопротивление R мало и им можно пренебречь.

В формуле для емкости C_i прогиб w_i в месте расположения i-го конденсатора можно выразить через главные прогибы w_1 и w_2 так:

$$w_i = w_1\cos2\theta_i + w_2\sin2\theta_i \quad (\theta_i = \pi(i-1)/8)$$

В результате чего заряд на i-м конденсаторе будет

$$q_i = C_0V_i\left(1+\frac{w_1}{d}\cos2\theta_i+\frac{w_2}{d}\sin2\theta_i\right)$$

Это выражение следует подставить в первые два уравнения системы (1), после чего силы, зависящие от приложенных к электродам напряжений V_i и используемые для управления основной формой колебаний резонатора, получаются такими:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{2dC_0}\sum_{i=1}^{16}q_i^2\cos2\theta_i = \frac{C_0}{2d}\sum_{i=1}^{16}V_i^2\cos2\theta_i+\frac{C_0}{d^2}\left(w_1\sum_1^{16}V_i^2\cos^22\theta_i+\frac{1}{2}w_2\sum_1^{16}V_i^2\sin4\theta_i\right)\\
F_2 &= \frac{1}{2dC_0}\sum_{i=1}^{16}q_i^2\sin2\theta_i = \frac{C_0}{2d}\sum_{i=1}^{16}V_i^2\sin2\theta_i+\frac{C_0}{d^2}\left(\frac{1}{2}w_1\sum_1^{16}V_i^2\sin4\theta_i+w_2\sum_1^{16}V_i^2\sin^22\theta_i\right)
\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь при возведении в квадрат опущены нелинейные члены вида w_1^2, w_2^2, $w_1 w_2$.

Перепишем первые два уравнения системы (1) в матричной форме, учтя дополнительно основные дефекты резонатора разночастотность h и разнодобротность g, а также угловую скорость вращения основания ω [2]:

$$m\ddot{w}+kw = F+Hw+G\dot{w}+4\kappa\omega\Gamma\dot{w}$$

$$w=\begin{Vmatrix}w_1\\w_2\end{Vmatrix},\quad F_2=\begin{Vmatrix}F_1\\F_2\end{Vmatrix},\quad H=h\begin{Vmatrix}\cos4\alpha & \sin4\alpha\\ \sin4\alpha & -\cos4\alpha\end{Vmatrix},\quad G=g\begin{Vmatrix}\cos4\beta & \sin4\beta\\ \sin4\beta & -\cos4\beta\end{Vmatrix},\quad \Gamma=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix} \qquad (3)$$

Здесь h и g – модули разночастотности и разнодобротности, α и β – соответственно углы ориентации главных осей жесткости и главных осей диссипации относительно отсчетных осей, κ – коэффициент Брайана.

Управляющие силы F в соответствии с (2) можно представить в виде

$$F = F_0+Aw,\quad F_0=\frac{C_0}{2d}\begin{Vmatrix}\sum V_i^2\cos2\theta_i\\ \sum V_i^2\sin2\theta_i\end{Vmatrix},\quad A=\frac{C_0}{d^2}\begin{Vmatrix}\sum V_i^2\cos^22\theta_i & \frac{1}{2}\sum V_i^2\sin4\theta_i\\ \frac{1}{2}\sum V_i^2\sin4\theta_i & \sum V_i^2\sin^22\theta_i\end{Vmatrix} \qquad (4)$$

Для управления квадратурой распределение напряжений по электродам V_i необходимо сформировать так, чтобы сила F получилась в виде [2]:

$$F = \varepsilon(E_0-E)\dot{w}+\mu\sigma\Gamma w+p\Gamma\dot{w}+fw \qquad (5)$$

Стоящие в правой части члены представляют собой не влияющие друг на друга управления различными параметрами состояния гироскопа: первый член определяет управление амплитудой колебаний, где мерой амплитуды выбрана полная энергия колебаний $E = m(\dot{w}_1^2+\dot{w}_2^2)/2+k(w_1^2+w_2^2)/2$, второй член определяет управление квадратурой (мерой квадратуры σ может служить нормированный на амплитуду момент количества движения), третий и четвертый члены – управление прецессией и частотой. Коэффициенты ε, μ, p и f представляют собой коэффициенты усиления в обратных связях.

Энергия и квадратура являются первыми интегралами уравнений (3), если правые части равны нулю, то есть нет ни дефектов, ни управления. В случае, если дефекты невелики, а, следовательно, малы и управления, то E и σ являются медленными функциями времени по сравнению со скоростью изменения w, определяемой частотой собственных колебаний ν.

Если формируемые напряжения V_i зависят только от медленных переменных E и σ, то говорят, что управление (5) формируется в "медленном времени". Если V_i зависят от переменной w, то управление называется управлением в "быстром времени". В первом случае реализуемые управления представляют собой низкочастотные процессы, во втором частота изменения V_i имеет порядок собственной частоты резонатора ν.

Для того, чтобы сила F в системе (3) получилась в виде (5), достаточно в выражении (4) напряжения V_i сформировать следующим образом:

$$\begin{aligned} V_i = {} & V_0 + \varepsilon(E_0 - E)\left(\dot{w}_1\cos\frac{\pi}{4}(i-1) + \dot{w}_2\sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) + \\ & + \mu\sigma\left(w_2\cos\frac{\pi}{4}(i-1) - w_1\sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) + p\left(\dot{w}_2\cos\frac{\pi}{4}(i-1) - \dot{w}_1\sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) + \\ & + f\left(w_1\cos\frac{\pi}{4}(i-1) + w_2\sin\frac{\pi}{4}(i-1)\right) \end{aligned} \tag{6}$$

При этом F_0 приобретает необходимый вид (с точностью до скалярного множителя), а Aw обращается в ноль

$$F = F_0 = \frac{n}{2d}C_0V_0[\varepsilon(E_0 - E)\dot{w} + \mu\sigma\Gamma w + p\Gamma\dot{w} + fw]$$

Получившийся закон управления (6) содержит как медленные переменные E и σ, так и быстрые w_1, w_2, $\dot{w}_1$, $\dot{w}_2$, поэтому это управление представляет собой управление в "быстром времени". Таким образом в быстром времени управлению доступны все параметры состояния резонатора. В дальнейшем не будем интересоваться управлением прецессией и частотой. Что касается управления амплитудой, то она может производиться не только как в формуле (6) силовыми электродами, но и специальным кольцевым электродом, так что, не акцентируя внимание на том, каким способом удерживается амплитуда, в формуле (6) сохраним только первый член V_0, представляющий собой опорное напряжение и член, пропорциональный μ, определяющий управление квадратурой.

Реализация управления в медленном времени возможна только для управления квадратурой и частотой, поскольку в (5) соответствующие члены зависят от w и не зависят от $\dot{w}$, а зависимость от w в (4) уже присутствует естественным образом, что позволяет выбирать V_i зависящим только от σ.

Для управления квадратурой в медленном времени распределение напряжений по электродам предлагается таким:

$$V_i = \sqrt{|\lambda\sigma|}\begin{cases} \cos 2(\pi i/8 - \theta) & (\sigma > 0) \\ \sin 2(\pi i/8 - \theta) & (\sigma < 0) \end{cases} \tag{7}$$

Здесь λ – положительный коэффициент усиления, а θ представляет собой угол, определяющий положение стоячей волны.

Если подставить это выражение в формулу (4), то F_0 обратится в ноль, а матрица A примет вид

$$A = \frac{2C_0\lambda\sigma}{d^2}\begin{Vmatrix} \cos(4\theta-\pi/2) & \sin(4\theta-\pi/2) \\ \sin(4\theta-\pi/2) & -\cos(4\theta-\pi/2) \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Для того, чтобы убедиться, что это управление приводит в точности к такому же эффекту, как и управление (6) при $\varepsilon = p = f = 0$, перейдем в уравнении (3) от переменных w, $\dot{w}$ к медленным переменным r, σ, θ, τ [2]. Здесь r имеет смысл амплитуды, а τ – трансляция по времени. Поскольку уравнение для τ отделяется от остальных, оно не приводится:

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{h\sigma}{2m\nu}\sin 4(\theta-\alpha) + \frac{gr}{2m}\cos 4(\theta-\beta) + \frac{\varepsilon\nu r}{4}(r_0^2 - r^2) + \frac{\tilde{h}\sigma}{2m\nu}\sin 4(\theta-\tilde{\alpha}) \\
\dot{\sigma} &= -\frac{hr}{2m\nu}\sin 4(\theta-\alpha) - \frac{g\sigma}{2m}\cos 4(\theta-\beta) - \frac{\mu' r\sigma}{2m\nu} - \frac{\tilde{h}r}{2m\nu}\sin 4(\theta-\tilde{\alpha}) \\
\dot{\theta} &= -\kappa\omega + \frac{h\sigma}{2m\nu r}\cos 4(\theta-\alpha) - \frac{g}{4m}\sin 4(\theta-\beta), \quad \mu' = \frac{h\mu}{2d}C_0V_0
\end{aligned} \tag{9}$$

(опущены величины второго порядка малости по переменным r и σ).

Здесь в уравнении для σ член $-\mu' r\sigma/(2m\nu)$ определяет управление по закону (6). Члены, пропорциональные $\tilde{h}$ в уравнениях для $\dot{r}$ и $\dot{\sigma}$ определяют управление по закону (7), при этом $\tilde{h}$ и $\tilde{\alpha}$ в соответствии с (8) имеют вид

$$\tilde{h} = 2C_0\lambda\sigma/d^2, \quad \tilde{\alpha} = \theta - \pi/8 \tag{10}$$

При подстановке (10) в (9) получаем, что в уравнении для r член, зависящий от управления квадратурой, пропорционален σ^2 и может быть поэтому опущен. Кроме того, будем предполагать, что управление квадратурой является жестким ($r \cong r_0$) и из трех уравнений (9) существенными остаются два:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma} &= -\frac{hr_0}{2m\nu}\sin 4(\theta-\alpha) - \frac{g\sigma}{2m}\cos 4(\theta-\beta) - \frac{4\mu C_0V_0r_0}{dm\nu}\sigma - \frac{C_0\lambda r_0}{m\nu d^2}\sigma \\
\dot{\theta} &= -\kappa\omega + \frac{h\sigma}{2m\nu r_0}\cos 4(\theta-\alpha) - \frac{g}{4m}\sin 4(\theta-\beta)
\end{aligned} \tag{11}$$

Видно, что управление в быстром времени (6) приводит к тому же самому типу управления в уравнениях (11), что и управление в медленном времени (7):

$$Q_{(6)} = \frac{4\mu C_0V_0r_0}{dm\nu}\sigma, \quad Q_{(7)} = \frac{\lambda C_0r_0}{d^2m\nu}\sigma$$

отличие состоит только в коэффициентах. Сравним эффективность управления по законам (6) и (7). Пусть требуется получить одну и ту же постоянную времени затухания квадратуры, для чего достаточно положить $Q_{(6)} = Q_{(7)}$:

$$\frac{4\mu C_0V_0r_0}{dm\nu} = \frac{\lambda C_0r_0}{d^2m\nu}$$

Отсюда следует $\lambda = 4\mu V_0 d$.

Сравним модули потребных для этого распределений напряжений: $V_i = V_0 + V_i^{(6)\prime} = V_0 + \mu\sigma w$ – в случае управления по закону (6) и $V_i = V_i^{(7)} = \sqrt{|\lambda\sigma|}$ – в случае управления по закону (7). Отношение модулей управляющих напряжений

$$\frac{V_i^{(6)}}{V_i^{(7)}} = \frac{\sqrt{|\lambda\sigma|}}{\mu\sigma w} = \frac{2\sqrt{\mu V_0 d\sigma}}{\mu\sigma w} = 2\sqrt{\frac{V_0}{\mu\sigma w}}\sqrt{\frac{d}{w}}$$

Если отношение опорного напряжения V_0 к управляющему $\mu\sigma w$ имеет порядок 10, а отношение d к w имеет порядок 10^3, то для достижения одного и того же эффекта при управлении в медленном времени потребуются напряжения в 200 раз большие, чем при управлении в быстром времени. В обоих случаях имеется возможность улучшить качество управления добавлением интегрального члена. Для этого в формуле (6) вместо $\mu\sigma$ следует подставить $\mu_1\sigma + \mu_2\int\sigma\,dt$, а в формуле (7) вместо $\sqrt{|\lambda\sigma|}$ следует подставить $\sqrt{\left|\lambda_1\sigma + \lambda_2\int\sigma dt\right|}$.

Рассмотрим теперь влияние вращения основания ω на уход $\dot\theta$, для чего уравнения (11) должны быть решены и решение $\sigma(t)$ должно быть подставлено во второе уравнение системы (11).

Этот анализ не зависит от того, какое управление квадратурой выбрано. Перепишем систему (11), используя сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned}\dot\sigma &= -a\sigma - b\sin4(\theta-\alpha) - c\sigma\cos4(\theta-\beta)\\ \dot\theta &= -\kappa\omega + p\sigma\cos4(\theta-\alpha) - q\sin4(\theta-\beta)\end{aligned} \tag{12}$$

Введенные коэффициенты обозначают:

$$a = \frac{4\mu C_0 V_0 r_0}{dm\nu} = \frac{\lambda C_0 r_0}{m\nu d^2};\quad b = \frac{hr_0}{2m\nu};\quad c = \frac{g}{2m};\quad p = \frac{h}{2m\nu r_0};\quad q = \frac{g}{4m}$$

Периодическое решение системы (12) разыскиваем методом Пикара. Если в качестве порождающего решения выбрать $\sigma \equiv 0$, $\theta \equiv -\kappa\omega t$, то метод будет эквивалентен поиску решения в виде рядов по степеням основных дефектов h и g.

Подставляя это порождающее решение в первое уравнение, получим

$$\dot\sigma = -a\sigma + b\sin4(\kappa\omega t + \alpha)$$

Периодическое решение этого уравнения таково:

$$\sigma = \frac{b}{a^2 + 16\kappa^2\omega^2}[-4\kappa\omega\cos4(\kappa\omega t + \alpha) + a\sin4(\kappa\omega t + \alpha)]$$

Подставляем это решение в правую часть второго уравнения:

$$\dot\theta = -\kappa\omega + \frac{bh}{4r_0 m\nu(a^2 + 16\kappa^2\omega^2)}\times$$
$$\times[-4\kappa\omega - 4\kappa\omega\cos8(\kappa\omega t + \alpha) + a\sin8(\kappa\omega t + \alpha)] + q\sin4(\kappa\omega t + \beta)$$

В результате получаем, что при вращении основания возникает постоянная составляющая ухода:

$$\langle\dot{\theta}\rangle = -\frac{h^2 d^4 \kappa\omega}{2(r_0^2 C_0^2 \lambda^2 + 16\kappa^2\omega^2 m^2 d^4 \nu^2)}$$

а также в дополнение к четвертой еще и восьмая гармоника зависимости $\dot{\theta}$ от угла поворота основания.

Выражение для постоянной составляющей ухода показывает, что уход зависит от скорости линейно при малых скоростях и стремится к нулю при больших. Зависимость постоянной составляющей ухода от угловой скорости может приводить к ошибкам в определении значения коэффициента Брайана. При увеличении коэффициента обратной связи в управлении квадратурой λ найденная постоянная составляющая убывает до нуля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф., Линч Д.Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. АН. МТТ. № 5. 1995. С. 12–24.
2. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. АН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.

Москва

Поступила в редакцию 16.10.2001