

УДК 539.3

© 2003 г. Б.Е. ПОБЕДРЯ

МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В механике часто для описания движения используются “идеальные” модели, такие как абсолютно твердое тело, идеальная жидкость, линейное упругое тело и так далее. Однако, чтобы описать явления, связанные с затратой энергии на преодоление внутреннего и внешнего трения, тепловые потери, сопротивление окружающей среды, требуется вводить измененные модели, в какой-то степени описывающие диссипацию [1–3].

В работе рассматриваются модели линейной вязкоупругости, основанные на введении дробного дифференцирования.

1. Однозвенные модели. Самой распространенной моделью механики деформируемого твердого тела, безусловно, является модель упругого тела. В одномерном случае ее изображают пружинкой (фиг. 1), относительное удлинение которой обозначено ϵ' , а сила натяжения пружинки, отнесенная к площади сечения, обозначена¹ через σ' .

Тогда определяющее соотношение упругой модели (закон Гука) имеет вид

$$\sigma' = E\epsilon' \quad (1.1)$$

где E называется модулем Юнга.

Упругая модель является обратимой [2], так что, если упругий шарик падает с высоты h на упругий пол, то после отскока он поднимется на прежнюю высоту h и так будет прыгать бесконечно (если не учитывать сопротивление воздуха). Естественно, в природе такого не наблюдается и, строго говоря, упругих тел не существует. Однако для произведения многих расчетов деформируемых тел его удобно применять и получать результаты близкие к практике.

Другой распространенной моделью в механике сплошной среды является модель вязкой ньютоновской жидкости, которую в одномерном случае можно условно изобразить в виде поршенька,двигающегося внутри цилиндра с вязкой жидкостью (фиг. 2). Относительное удлинение поршенька обозначено через ϵ'' , а натяжение через σ'' . Определяющее соотношение для вязкой жидкости можно записать в виде

$$\sigma'' = \eta d\epsilon''/dt = \eta d\epsilon'' \quad (1.2)$$

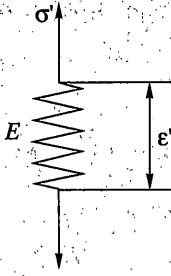
где η – коэффициент вязкости, а d – дифференциальный оператор по времени. Тогда обратным оператором к d будет интегральный оператор d^{-1} :

$$d^{-1}f \equiv \int f(t)dt \quad (1.3)$$

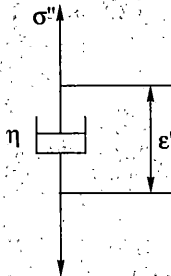
Чтобы исключить неоднозначность, возникающую при определении первообразной функции $f(t)$, будем рассматривать так называемые основные функции $f(t)$, такие что

$$t < 0: f(t) \equiv 0 \quad (1.4)$$

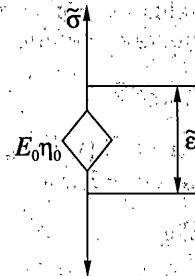
¹ Расстояние между концами пружинки правильной было бы обозначить $1 + \epsilon'$, если длину недеформированной пружинки принять за единицу.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Тогда вместо (1.3) можно ввести определенный интеграл, причем положим

$$d^{-1}f \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\alpha}^{t+\alpha} f(\tau) d\tau \equiv \int_0^+ f(\tau) d\tau \equiv \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

Если функция $f(t)$ n раз дифференцируема, то применяя к ней n раз оператор d , получим

$$d^n f \equiv \frac{d^n}{dt^n} f \quad (1.6)$$

Тогда для оператора d^{-n} , обратного к d^n , будем иметь

$$d^{-n} f = \underbrace{\int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} \dots \int_0^{\tau_{n-1}}}_{n} f(\tau_n) d\tau_n d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

Формулу (1.7) можно использовать для определения производной дробного порядка Римана–Лиувилля. Для этого введем вместо натурального числа n в (1.7) любое действительное число $\alpha > 0$. Тогда, изменив обозначения оператора d для этого случая на D , получим

$$D^{-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re} z > 0 \quad (1.9)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

Пусть $0 \leq n-1 < \alpha \leq n$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда дробная производная порядка α от функции $f(t)$ определяется следующей формулой:

$$D^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n}} \right] \quad (1.10)$$

С помощью дробной производной можно ввести “фрактальную” модель (фиг. 3) с определяющим соотношением

$$\tilde{\sigma} = E\eta_0^\alpha D^\alpha \tilde{\varepsilon} \quad (1.11)$$

Полагая в (1.11) $\alpha = 0$, получим упругую модель (1.1), а полагая $\alpha = 1$ – модель вязкой жидкости (1.2), где

$$\eta = E\eta_0 \quad (1.12)$$

Определяющие соотношения Гука (1.1), Ньютона (1.2) и фрактальной модели (1.11) можно записать в интегральном виде [3]:

$$\sigma'(t) = \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)\varepsilon'(\tau)d\tau, \quad \varepsilon'(t) = \int_0^t K_1(t-\tau)\sigma'(\tau)d\tau \quad (1.13)$$

$$\sigma''(t) = \int_0^t \Gamma_2(t-\tau)\varepsilon''(\tau)d\tau, \quad \varepsilon''(t) = \int_0^t K_2(t-\tau)\sigma''(\tau)d\tau \quad (1.14)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \int_0^t \Gamma_3(t-\tau)\tilde{\varepsilon}(\tau)d\tau, \quad \tilde{\varepsilon}(t) = \int_0^t K_3(t-\tau)\tilde{\sigma}(\tau)d\tau \quad (1.15)$$

$$\Gamma_1(t) = E\delta(t), \quad K_1(t) = \frac{\delta'(t)}{E}, \quad \Gamma_2(t) = \eta\delta'(t), \quad K_2(t) = \frac{h(t)}{\eta} \quad (1.16)$$

$$\Gamma_3(t) = E\eta_0^\alpha Y_{-\alpha}(t), \quad K_3(t) = \frac{1}{E\eta_0^\alpha} Y_\alpha(t)$$

$$Y_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(t), & \alpha > 0 \\ \delta(t), & \alpha = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $\delta'(t)$ – ее производная, $h(t)$ – единичная функция Хевисайда, Y_α – обобщенная функция, обратная к функции (1.17), причем [4]:

$$\int_0^t Y_\alpha(t-\tau)Y_{-\alpha}(\tau)d\tau = \delta(t) \quad (1.18)$$

Итак, в рассмотренных моделях связь между напряжением и деформацией может быть определена с помощью интегральных операторов

$$\sigma(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \quad (1.19)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \quad (1.20)$$

с интегральными ядрами $\Gamma(t)$ и $K(t)$, которые являются взаимобратными

$$\int_0^t \Gamma(t-\tau)K(\tau)d\tau = \int_0^t K(t-\tau)\Gamma(\tau)d\tau = \delta(t) \quad (1.21)$$

Модели, допускающие представление определяющих соотношений в виде (1.19)–(1.21), называются вязкоупругими [3]. Заметим, что чем “регулярнее” одно из ядер $\Gamma(t)$ или $K(t)$, тем “сингулярнее” обратное к нему, с которым оно связано соотношениями (1.21).

Одинаковую сингулярность взаимобратные ядра $\Gamma(t)$ и $K(t)$ будут иметь лишь в том случае, если их можно представить в виде

$$K(t) = K_0\delta(t) + \tilde{K}(t), \quad \Gamma(t) = \Gamma_0\delta(t) - \tilde{\Gamma}(t) \quad (1.22)$$

где ядра $\tilde{\Gamma}(t)$ и $\tilde{K}(t)$ уже не имеют никаких сингулярностей вида дельта-функций и их производных². Заметим, что из трех рассмотренных моделей только “упругая” модель удовлетворяет требованиям (1.22). В этом случае соотношения (1.19), (1.20) можно записать с помощью интегралов Стильтеса

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)d\varepsilon(\tau) \quad (1.23)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau) \quad (1.24)$$

$$\tilde{\Gamma}(t) = -R'_t(t), \quad \tilde{K}(t) = \Pi'_t(t)$$

$$\Pi(0^-) = \Pi(0^+) = \Pi(0) = K_0 = 1/\Gamma_0 \quad (1.25)$$

$$R(0^-) = R(0^+) = R(0) = \Gamma_0 = 1/K_0$$

Можно показать [3], что из соотношений (1.23), (1.24) следует

$$\int_0^t R(t-\tau)d\Pi(\tau) = \int_0^t \Pi(t-\tau)dR(\tau) = 1 \quad (1.26)$$

2. Модели Фойгта и Максвелла. Рассмотрим теперь двузвенные модели или модели, составленные из двух элементов, например, пружинки и поршенька. Очевидно, существует всего два принципиально разных соединения этих элементов, изображенных на фиг. 4, 5. Модель, основанная на параллельном соединении пружинки и поршенька (фиг. 4), называется моделью Фойгта, а модель, основанная на их последовательном соединении (фиг. 5), называется моделью Максвелла.

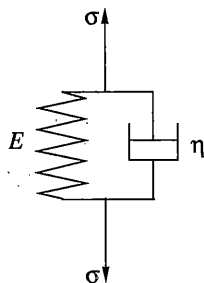
Рассмотрим сначала модель Фойгта

$$\sigma = E\varepsilon' + \eta d\varepsilon'' = (E + \eta d)\varepsilon \quad (2.1)$$

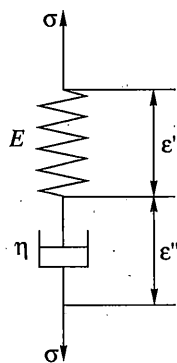
или

$$\sigma = E\varepsilon + \eta d\varepsilon/dt \quad (2.2)$$

² Знак минус во втором выражении (1.22) выбран в силу существующих традиций.



Фиг. 4



Фиг. 5

Соотношения (2.1) и (2.2) можно записать в интегральном виде, воспользовавшись формами записи (1.19) и (1.23), причем

$$\Gamma(t) = E\delta(t) + \eta\delta_t^{(1)}(t), \quad R(t) = E + \eta\delta(t) \quad (2.3)$$

Обращая соотношение (2.2) относительно деформаций, получим

$$\varepsilon = \int_0^t e^{-E(t-\tau)/\eta} \sigma(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) можно записать в видах (1.20) и (1.24). При этом

$$K(t) = \frac{1}{\eta} e^{-Et/\eta}, \quad \Pi(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-Et/\eta}) \quad (2.5)$$

Если к образцу при $t = 0$ мгновенно приложить некоторую силу и затем поддерживать ее постоянной, т.е.

$$\sigma = \sigma_0 h(t) \quad (2.6)$$

то, как следует из соотношения (1.24), деформация будет изменяться по закону

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \Pi(t) \quad (2.7)$$

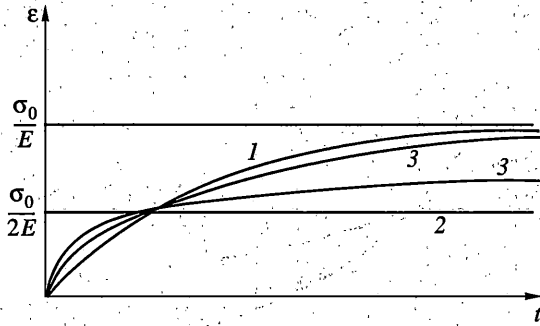
Явление возрастания деформации со временем при постоянной нагрузке называется ползучестью материала. В рассматриваемой модели Фойгта ползучесть описывается формулами (2.5), (2.7) (фиг. 6, кривая 1). Поэтому функцию $\Pi(t)$ называют функцией ползучести, а соответствующую ей функцию $K(t)$ – ядром ползучести.

Рассмотрим теперь модель Максвелла. Ее определяющее соотношение имеет вид

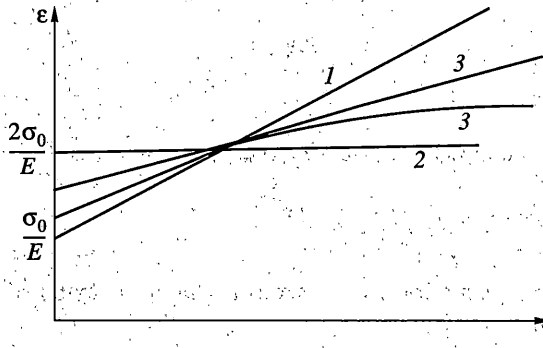
$$\varepsilon = \frac{\sigma'}{E} + \frac{\sigma''}{\eta d} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta d} \right) \sigma \quad (2.8)$$

или

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \quad (2.9)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Из сравнения (2.9) и (1.20), (1.24) видно, что для модели Максвелла

$$K(t) = \frac{1}{E}\delta(t) + \frac{1}{\eta}h(t), \quad \Pi(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что напряжению, подчиняющемуся закону (2.6), соответствует возрастающая со временем деформация (фиг. 7, кривая 1). Следовательно, модель Максвелла описывает ползучесть.

Обратим теперь соотношения (2.8):

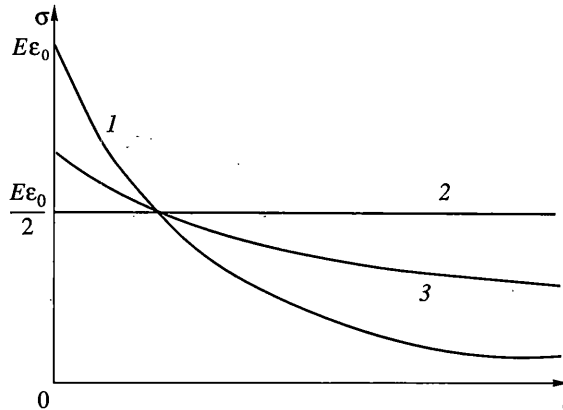
$$\sigma = \frac{E\eta d}{E + \eta d}\varepsilon = E\varepsilon - \frac{E^2}{E + \eta d}\varepsilon \quad (2.11)$$

С одной стороны, соотношение (2.11) можно записать в дифференциальной форме

$$E\sigma + \eta \frac{d\sigma}{dt} = E\eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.12)$$

а с другой, в интегральном виде

$$\sigma = E\varepsilon - \frac{E^2}{\eta} \int_0^t e^{-E(t-\tau)/\eta} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.13)$$



Фиг. 8

Определяющее соотношение (2.13) можно представить в виде (1.19), (1.23), причем

$$\Gamma(t) = E\delta(t) - \frac{E^2}{\eta}e^{-Et/\eta}, \quad R(t) = Ee^{-Et/\eta} \quad (2.14)$$

Если приложить теперь к образцу в момент $t = 0$ некоторую деформацию и поддерживать ее постоянной, т.е.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 h(t) \quad (2.15)$$

то соотношение (1.23) означает, что напряжение будет, вообще говоря, изменяться

$$\sigma = \varepsilon_0 R(t) \quad (2.16)$$

С учетом (2.14) можно сделать вывод о том, что для модели Максвелла напряжение будет экспоненциально убывать (фиг. 8, кривая 1). Явление убывания напряжения при постоянной деформации называется релаксацией. Из вышесказанного следует, что модель Максвелла релаксацию описывает.

Двухзвенные модели, составленные из пружинки и фрактальной модели, можно назвать фрактальной моделью Фойгта (фиг. 9) и фрактальной моделью Максвелла (фиг. 10) [5]. Определяющие соотношения для фрактальной модели Фойгта имеют вид

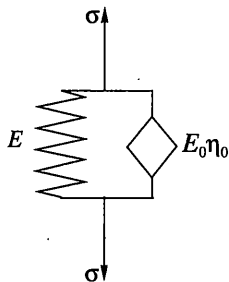
$$\sigma = E(1 + \eta^\alpha D^\alpha)\varepsilon \quad (2.17)$$

или в интегральной записи (1.19), (1.23):

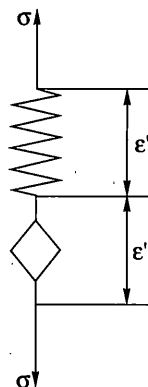
$$\Gamma(t) = E[\delta(t) + \eta_0^\alpha Y_{-\alpha}(t)], \quad R(t) = E\left[h(t) + \frac{\eta_0^\alpha t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right] \quad (2.18)$$

Если разрешить (2.17) относительно деформации, то получим

$$\varepsilon = \frac{1}{E\eta_0^\alpha} \mathfrak{D}_{\alpha-1}^* \left(-\frac{1}{\eta_0^\alpha} \right) \sigma \quad (2.19)$$



Фиг. 9



Фиг. 10

или в записи (1.20), (1.24), где

$$K(t) = \frac{1}{E\eta_0^\alpha} \mathcal{E}_{\alpha-1}(t), \quad \Pi(t) = \frac{1}{E} \left[1 - E_\alpha \left(-\frac{t}{\eta_0} \right)^\alpha \right] h(t) \quad (2.20)$$

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.21)$$

Здесь $E_\alpha(z)$ – функция Миттаг-Леффлера [7], $\mathcal{E}_{\alpha-1}^*$ – дробно-экспоненциальный оператор Работнова [6] с ядром, резольвентным интегральному оператору Абеля $I_{\alpha-1}^*$ с ядром

$$I_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1} h(t)}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.22)$$

Определяющие соотношения для фрактальной модели Максвелла имеют вид

$$\sigma = E \left[1 - \frac{1}{\eta_0^\alpha} \mathcal{E}_{\alpha-1}^* \left(-\frac{1}{\eta_0} \right) \right] \epsilon \quad (2.23)$$

Эта запись эквивалентна записям (1.19), (1.23), где

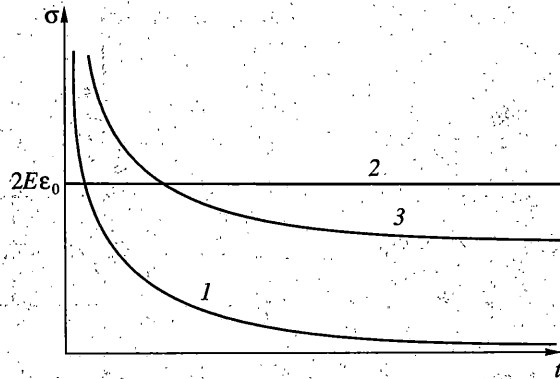
$$\Gamma(t) = E \left[h(t) - \frac{1}{\eta_0^\alpha} \mathcal{E}_{\alpha-1}^* \left(-\frac{1}{\eta_0}, t \right) \right], \quad R(t) = \left[1 + EE_\alpha \left(-\frac{t}{\eta_0} \right) \right] h(t) \quad (2.24)$$

Соотношения, обратные к (2.23), имеют вид

$$\epsilon = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{1}{\eta_0^\alpha} D^{-\alpha} \right) \sigma \quad (2.25)$$

или вид интегральных операторов (1.20), (1.24), где

$$K(t) = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{1}{\eta_0^\alpha} Y_{-\alpha}(t) \right), \quad \Pi(t) = \frac{1}{E} \left[1 + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left(\frac{t}{\eta_0} \right)^\alpha \right] h(t) \quad (2.26)$$



Фиг. 11

На фиг. 6 показаны кривые ползучести для фрактальной модели Фойгта при различных значениях α , а на фиг. 7 – для фрактальной модели Максвелла. На фиг. 8 приведены кривые релаксации для фрактальной модели Максвелла. На всех этих фигурах кривые 2 соответствуют случаю $\alpha = 0$, кривые 1 – случаю $\alpha = 1$, кривые 3 – случаю $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$.

Заметим, что модель Фойгта не описывает релаксацию (условно такую кривую можно изобразить положительными осями абсциссы и ординаты на фиг. 11). На фиг. 11 показаны кривые релаксации для фрактальной модели Фойгта при $0 \leq \alpha < 1$.

Анализ рассмотренных элементарных моделей позволяет сделать вывод, что фрактальные модели за счет выбора параметра α могут описывать более полно релаксацию и ползучесть. При $\alpha = 0$ эти модели совпадают с упругими, а при сколь угодно малом $\alpha > 0$ описывают релаксацию и ползучесть, а значит, и рассеивание энергии (диссипацию).

3. Обобщенные модели. Можно рассматривать теперь трехзвенные, четырехзвенные и так далее модели, набранные из пружинок и поршеньков или из пружинок и фрактальных элементов.

Предположим, например, что составлена некоторая модель из M пружинок и N поршеньков. Будем считать, что эта модель связанная. Такой модели соответствует операторное определяющее соотношение

$$\check{P}\sigma = \check{Q}\epsilon \tag{3.1}$$

где \check{P} и \check{Q} – дифференциальные операторы

$$\check{P} = \sum_{i=0}^m a_i d^i \tag{3.2}$$

$$\check{Q} = \sum_{j=0}^n b_j d^j \tag{3.3}$$

Нетрудно установить, что существует две возможности [3]:

$$n = m, \quad n = m + 1 \tag{3.4}$$

т.е. порядок оператора \check{Q} равен или на единицу больше порядка оператора \check{P} , как бы ни была составлена модель из пружинок и поршеньков.

Любая модель, составленная из пружинок и поршеньков, приводит к выражению (3.1). Однако, вообще говоря, различные модели могут приводить к одним и тем же соотно-

шениям (3.1), в которых операторы \check{P} и \check{Q} определяются выражениями (3.2) и (3.3). Предположим теперь, что задано операторное соотношение (3.1). Тогда оно представимо в интегральном виде (1.19), (1.20) или (1.23), (1.24).

Действительно, рассмотрим рациональную функцию $L(\lambda)$:

$$L(\lambda) = Q(\lambda)/P(\lambda) \tag{3.5}$$

Предположим, что все корни полинома $P(\lambda)$ действительны, отрицательны и имеют кратность единица. Обозначим их абсолютные значения через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Разлагая функцию $L(\lambda)$ на элементарные дроби, получим для оператора (3.1):

$$L(d) = \frac{Q(d)}{P(d)} = c_1 d + c_0 + \frac{c_{-1}}{d + \lambda_1} + \dots + \frac{c_{-m}}{d + \lambda_m} \tag{3.6}$$

Поэтому операторное соотношение (3.1) эквивалентно интегральным равенствам (1.19) и (1.23), причем

$$\Gamma(t) = c_{-1} \delta^{(1)}(t) + c_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^m c_i e^{-\lambda_i t} \tag{3.7}$$

$$R(t) = c_{-1} \delta(t) + c_0 + \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\lambda_i} (1 - e^{-\lambda_i t}) \tag{3.8}$$

Из (3.7), (3.8) видно, что среди корней λ_i не может быть комплексных, ибо ядра ползучести необходимо должны быть монотонными функциями.

Соотношения (3.1) можно разрешить относительно деформаций

$$\varepsilon = \check{P}\sigma/\check{Q} \tag{3.9}$$

Тогда обозначим абсолютные значения действительных корней полинома $Q(\mu)$ через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Может оказаться, что один из корней все-таки равен нулю. Положим, что нулевой корень μ_1 . Тогда получим

$$L^{-1}(d) = \frac{P(d)}{Q(d)} = e_0 + \frac{e_1}{d} + \frac{e_2}{d + \mu_2} + \dots + \frac{e_n}{d + \mu_n} \tag{3.10}$$

Следовательно, дифференциальный оператор (3.9) представим в виде (1.20) или (1.24), причем

$$K(t) = e_0 \delta(t) + e_1 h(t) + \sum_{j=1}^n e_j e^{-\mu_j t} \tag{3.11}$$

$$\Pi(t) = e_0 + e_1 t + \sum_{j=1}^n \frac{e_j}{\mu_j} (1 - e^{-\mu_j t}) \tag{3.12}$$

Если дифференциальные операторы P и Q имеют один и тот же порядок ($m = n$), то в (3.6)–(3.8), (3.10)–(3.12) будут выполнены условия

$$c_{-1} = 0, \quad e_0 \equiv \Gamma_0 = 1/K_0 \equiv 1/c_0 \tag{3.13}$$

и справедливы соотношения (1.25).

Сделаем теперь некоторые обобщения. Дифференциальная модель (3.1), (3.9) эквивалентна интегральной (1.19), (1.20) или (1.23), (1.24) только в том случае, если ядра и

функции релаксации и ползучести имеют вид (3.7), (3.8) или (3.11), (3.12), т.е. представляются в виде суммы экспонент. Однако первоначально можно задать модель вязкоупругого тела с определяющими соотношениями (1.19), (1.20) или (1.23), (1.24). При этом ядра указанных интегральных операторов определяемы экспериментально.

Рассмотрим, например, соотношения (1.23), (1.24) и проведем эксперименты на ползучесть, положив, что напряжение имеет вид (2.6). Тогда, измеряя деформацию со временем, получим из формулы (2.7) функцию ползучести $\Pi(t)$:

$$\Pi(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0 \quad (3.14)$$

Зная функцию ползучести, можно найти функцию релаксации $R(t)$ из решения уравнения (1.26). Это уравнение является интегральным уравнением Вольтерры второго рода, поэтому оно всегда однозначно разрешимо. Однако для нахождения функции релаксации $R(t)$ также используем эксперимент. Зададим в образце деформацию в виде (2.20) и, измеряя напряжение со временем, найдем из формулы (2.21) функцию релаксации

$$R(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0 \quad (3.15)$$

Отметим некоторые особенности графика функции ползучести. Например, функция ползучести, показанная на фиг. 6, имеет всего один этап ползучести. Про такую модель говорят, что она имеет ограниченную ползучесть ($\lim \Pi(t) = \Pi_\infty$ при $t \rightarrow \infty$).

Функция релаксации (фиг. 8) может иметь предел R_∞ при $t \rightarrow \infty$ больший либо равный нулю. Из формулы (2.19) и фиг. 8 следует, что для модели Максвелла $R_\infty = 0$, т.е. модель Максвелла релаксирует до нуля³.

Процедура, описанная выше с многозвенными моделями, построенными с пружинками и поршеньками, может быть повторена для моделей, построенных с пружинками и фрактальными элементами.

Тогда "общее" определяющее соотношение может быть записано в виде

$$\check{P}\sigma = \check{Q}\varepsilon \quad (3.16)$$

$$\check{P} = \sum_{i=0}^m a_i D^{\alpha_i}, \quad 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m \quad (3.17)$$

$$\check{Q} = \sum_{j=0}^n b_j D^{\beta_j}, \quad 0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n \quad (3.18)$$

В [8] доказано, что соотношение (3.16) эквивалентно соотношению (1.24) при выполнении условий (3.17), (3.18), причем функция ползучести $\Pi(t)$ представляется в виде ряда из функций типа Миттаг-Леффлера. Следовательно, если функция ползучести найдена экспериментально, то с любой степенью точности ее можно выразить полиномом, составленным из функций типа Миттаг-Леффлера, т.е. операторной связи (1.24) можно составить в соответствие операторную связь (3.16)–(3.18), причем существует два случая – либо $\alpha_m = \beta_n$, либо $\beta_n = \alpha_m + 1$. В первом из этих случаев (при мгновенной упругости) соотношения (1.24) обратимы и могут быть записаны в виде (1.23), причем ядро релаксации $R(t)$ сколь угодно точно приближаемо функцией

$$P(t) = \sum_{k=0}^N c_k t^{\alpha-1/2} E_{1, \alpha+1/2}(it\lambda_k), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.19)$$

4. Описание рассеивания энергии в вязкоупругих моделях. Прежде всего заметим, что если вязкоупругий материал при мгновенном нагружении ведет себя как вязкая жид-

³ Для всех других моделей $R_\infty \neq 0$.

кость ($c_1 \neq 0$ в (3.6)–(3.8)), то функция релаксации $R(t)$ при $t = 0$ имеет особенность. В этом случае динамическое поведение вязкоупругого стержня, описываемое уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^t R(t-\tau) d \left(\frac{\partial u(x; \tau)}{\partial x} \right) \right] \quad (4.1)$$

может не относиться к уравнениям гиперболического типа, т.е. уравнение (4.1) будет описывать не волновые явления, а диффузионные. Подробный анализ условий возникновения “негиперболичности” уравнений типа (4.1) для классических моделей линейной теории вязкоупругости был дан в [9]. Эти результаты были обобщены в [10, 11] на случай фрактальных моделей линейной вязкоупругости. Частные результаты на физическом уровне строгости были независимо получены в [12].

В механике сплошной среды только для трех классических моделей известны термодинамические параметры состояния [13]. Это модели идеальной, вязкой (ньютоновской) жидкости и линейного упругого тела. При этом, как уже упоминалось в п. 1, модель упругого тела является обратимой, а для модели вязкой жидкости вся накопленная энергия рассеивается. Поэтому для моделей, составленных из пружинок и поршеньков, можно записать точное выражение свободной энергии и функции рассеивания (диссипации).

Например, для модели Максвелла (фиг. 5) можно записать в явном виде [3] функцию свободной энергии Ψ :

$$\Psi = -\frac{c_p}{2T_0} \vartheta^2 + \frac{E}{2} \int_0^t \int_0^t e^{-E(2t' - \tau_1 - \tau_2)/\eta} d\varepsilon_T(\tau_1') d\varepsilon_T(\tau_2') \quad (4.2)$$

энтропии S :

$$S = \frac{c_p}{T_0} \vartheta + \alpha E \int_0^t e^{-E(t' - \tau)/\eta} d\varepsilon_T(\tau') \quad (4.3)$$

и функцию рассеивания W^* :

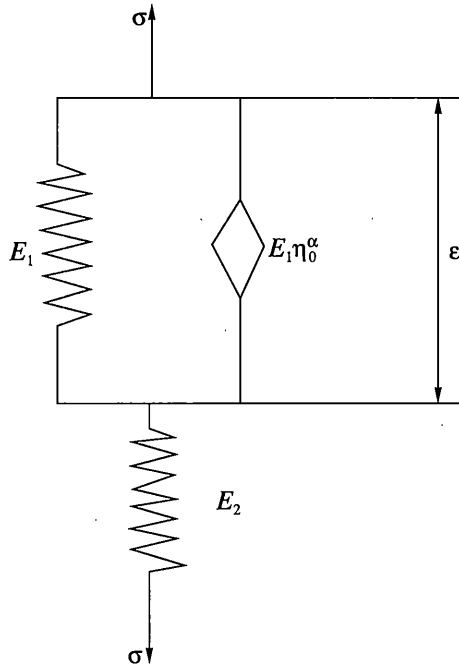
$$W^* = \frac{E^2}{\eta a_T} \int_0^t \int_0^t e^{-E(2t' - \tau_1 - \tau_2)/\eta} d\varepsilon_T(\tau_1') d\varepsilon_T(\tau_2') \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_T \equiv \varepsilon - \alpha \vartheta, \quad t = \int_0^t \frac{dt}{a_T(t)} \quad (4.5)$$

где c_p – теплоемкость при постоянном напряжении, α – коэффициент теплового расширения, ϑ – перепад температур (разность между текущей температурой T и некоторой фиксированной T_0), t – физическое время, $a_T(t)$ – температурное смещение при введении температурно-временной аналогии [3].

В силу того, что для фрактальной модели, как указывалось в п. 1, рассеивание наступает при любом показателе $\alpha > 0$, нетрудно выписать функции, аналогичные (4.2)–(4.4) и для фрактальной модели Максвелла (фиг. 10). Например, для функции рассеивания W^* имеем

$$W^* = -\frac{1}{a_T} \int_0^t \int_0^t E \left[h(t' - \tau_1') + E_\alpha \left(-\frac{1}{\eta_0^\alpha} (t' - \tau_1') \right) \right] \times \\ \times \left[\delta(t' - \tau_2') - \frac{1}{\eta_0^\alpha} \mathcal{E}_{\alpha-1} \left(-\frac{1}{\eta_0^\alpha} (t' - \tau_2') \right) \right] d\varepsilon_T(\tau_1') d\varepsilon_T(\tau_2') \quad (4.6)$$



Фиг. 12

Если же модель задается определяющими соотношениями (1.23), (1.24), функции релаксации и ползучести в которых найдены экспериментально, то для нахождения термодинамических функций состояния нельзя найти точных выражений. Приходится делать дополнительные гипотезы [14] и получать приближенные значения термодинамических функций.

Если же экспериментально найденные ядра представить в виде разложения по экспонентам, то можно приближенно поставить в соответствие выбранной модели модель, составленную из пружинок и поршеньков, и для этой модели получить точные выражения термодинамических функций. Так как экспоненты не образуют полной системы функций, то таких экспонент приходится выбирать много (более сотни [15]).

Если же экспериментально найденные ядра представить в виде разложения по полной системе функций Миттаг-Леффлера, то, как уже было отмечено в п. 3, можно как угодно точно поставить в соответствие найденным ядрам фрактальную модель, составленную из конечного набора пружинок и фрактальных элементов.

Как было показано в п. 1, за счет выбора дробных степеней фрактальных элементов можно ограничиться моделью с небольшим числом звеньев.

Рассмотрим, например, трехзвенную фрактальную модель, изображенную на фиг. 12. Определяющее соотношение этой модели имеет вид

$$\sigma + bD^\alpha \sigma = \tilde{E}_0 \epsilon + \tilde{E}_1 D^\alpha \epsilon \quad (4.7)$$

$$b = \frac{E_1 \eta_0^\alpha}{E_1 + E_2}, \quad \tilde{E}_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad \tilde{E}_1 = \frac{E_1 E_2 \eta_0^\alpha}{E_1 + E_2} \quad (4.8)$$

Более общей моделью типа (4.7), будет

$$\sigma + bD^\alpha \sigma = \tilde{E}_0 \epsilon + \tilde{E}_1 D^\beta \epsilon \quad (4.9)$$

Однако в [4] доказано, что только при условиях

$$\tilde{E}_0 \geq 0, \quad \tilde{E}_1 > 0, \quad b > 0, \quad \tilde{E}_1/b \geq \tilde{E}_0, \quad \beta = \alpha \quad (4.10)$$

определяющее соотношение (4.9) или (4.7) описывает мгновенную упругость, а следовательно, уравнение (4.1) будет гиперболическим и являться волновым уравнением.

Для соотношения (4.7) функция релаксации имеет вид

$$R(t) = \frac{E_1}{b} \left(h(t) + \left(1 - \frac{bE_0}{E_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{t^\alpha}{b} \right) \right) \quad (4.11)$$

Свободную энергию можно записать следующим образом:

$$\Psi = -\frac{c_p}{2T_0} \vartheta^2 + \frac{1}{2R(0)} \left[\int_0^t \frac{\tilde{E}_1}{b} \left(h(\tau') + \left(1 - \frac{b\tilde{E}_0}{E_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{\tau'^\alpha}{b} \right) \right) d\varepsilon_T(\tau') \right]^2 \quad (4.12)$$

а функцию рассеивания в виде

$$W^* = -\frac{1}{R(0)} \iint_{00}^{t' t'} \left[\frac{\tilde{E}_1}{b} \left(h(t' - \tau'_1) + \left(1 - \frac{bE_0}{E_1} \right) E_\alpha \left(-\frac{1}{b} (t' - \tau'_1)^\alpha \right) \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\tilde{E}_1}{b} \left(\delta(t' - \tau'_2) - \left(\frac{1}{b} - \frac{\tilde{E}_0}{E_1} \right) \mathfrak{D}_{\alpha-1} \left(-\frac{1}{b} \right) \right) \right] d\varepsilon_T(\tau'_1) d\varepsilon_T(\tau'_2) \quad (4.13)$$

Из проделанного анализа ясно, что модели фрактального типа полезны при рассмотрении связанных задач термовязкоупругости, потому что позволяют получить явные выражения для основных термодинамических функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00780).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климов Д.М. Затухание собственных колебаний гироскопа в кардановом подвесе с сухим трением // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. № 3. С. 410–412.
2. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
3. Ильющин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. Surguladze T.A. On certain applications of fractional calculus to viscoelasticity // J. of Math. Sci. 2002. V. 112. № 5. P. 4517–4557.
5. Шермергор Т.Д. Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания наследственных свойств материалов // ПМТФ. 1966. № 6. С. 118–121.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
7. Джрбабян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
8. Сургуладзе Т.А. Об одном применении дробной функции Грина // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 53–60.
9. Локишин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
10. Сургуладзе Т.А. О гиперболичности некоторых одномерных уравнений движения вязкоупругости // Мат. Моделирование систем и процессов. 2002. № 10. С. 131–134.
11. Сургуладзе Т.А. О гиперболичности некоторых трехмерных уравнений движения вязкоупругости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2002. № 5. С. 61–64.

12. *Россихин Ю.А., Шитикова М.В.* Анализ динамического поведения вязкоупругих стержней, реологические модели которых содержат дробные производные двух различных порядков // Проблемы механики неупругих деформаций. М.: Физматлит, 2001. С. 281–300.
13. *Победря Б.Е.* Модели механики сплошной среды // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 47–59.
14. *Победря Б.Е.* О связанных задачах механики сплошной среды // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 2. С. 224–253.
15. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Использование функции рассеянной энергии для описания деформаций и разрушения полимерных конструкций // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 250–262.

Москва

Поступила в редакцию
10.02.2003