

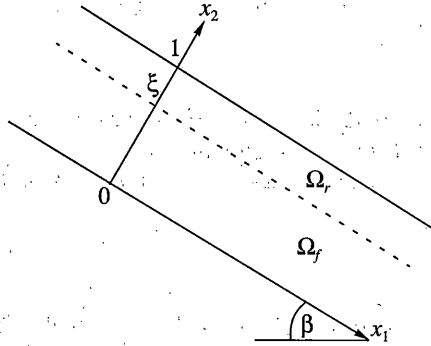
## **РАЗГОН И ТОРМОЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ (ЛЕДНИКА) ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ**

Задача о деформировании тяжелого вязкопластического слоя с большой вязкостью на наклонной плоскости моделирует поведение геофизических структур, находящихся в гравитационном поле на наклонном ложе. Примерами таким структур могут служить снежнопылевые лавины из мягкого снега [1], податливые участки верхних слоев земной коры [2, 3], соляные породы в предельном состоянии [4], послеждожденные оползни почвы [5], ледниковые образования [6]. Для последних особенно характерно наличие массивной недеформируемой корки, занимающей до 95% толщины ледника, и тонкой сдвиговой зоны вблизи основания. На вязкопластическую природу льда обращено внимание в [7, стр. 166]: "Поскольку у льда не обнаружено предела длительной прочности, введем понятие "практически предельного состояния", при котором лед настолько незначительно деформируется во времени, что дальнейшую деформацию можно считать отсутствующей... можно определить длительное сопротивление, что имеет большое значение при характеристике несущей способности ледяного тела во времени". Это длительное сопротивление фактически является пределом текучести при сдвиге. Экспериментально найденные значения материальных функций для широкого класса льдов и снежных потоков лавинного типа приведены в обзоре [8].

Установившееся плоскопараллельное движение тяжелого вязкопластического слоя по наклонной плоскости принадлежит к числу классических и давно исследованных задач [9]. При таком движении область вблизи свободной поверхности слоя занята жесткой зоной, которая присутствует всегда и может охватывать весь слой, если гравитационных усилий недостаточно для страгивания. Устойчивость этого течения относительно двумерной картины возмущений исследована в [10]. Известны многочисленные обобщения данной задачи на случай вязкопластической жидкости с нелинейной вязкостью, упругой сжимаемостью, а также двухслойности и стратифицированности течения [11].

С другой стороны, выполнено много исследований по изучению движения фазовых границ при нестационарном сдвиге материала. Граничные условия здесь надо ставить на заранее неизвестной границе, движение которой определяется в процессе решения (задачи типа Стефана). Достаточно полный обзор по неустановившемуся деформированию с учетом движения жестких зон дан в монографии [12].

В данной работе определяются параметры нестационарного одномерного сдвига вязкопластического слоя на наклонной плоскости в поле силы тяжести, т.е. процесса разгона либо торможения. Находится изменение со временем толщины жесткой зоны вблизи свободной границы, а также другие характеристики течения. Задача с неизвестной границей сводится к задаче с фиксированной во времени границей. Предлагается метод решения подобных задач, который проиллюстрирован на данном примере. Аналитически исследуются асимптотики при  $t \rightarrow \infty$  в случае, когда число Рейнольдса много меньше квадрата числа Фруда.



Фиг. 1

**1. Начально-краевая задача и стационарный режим.** В поле силы тяжести  $\mathbf{g}$  ( $|\mathbf{g}| = g$ ) имеется несжимаемый вязкопластический слой с плоскостью  $\rho$ , пределом текучести при сдвиге  $\tau_s$  и динамической вязкостью  $\mu$ , который движется вниз по наклонной плоскости под углом  $\beta$  к горизонту. В любой момент времени  $t > 0$  физическая область  $\Omega$ , занимаемая материалом слоя, имеет вид  $\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < h\}$ . Нижняя граница  $x_2 = 0$  неподвижна, а верхняя  $x_2 = h$  свободна от напряжений.

Тензорные определяющие соотношения вязкопластического материала с нелинейной вязкостью, связывающие девиатор напряжений  $s = s_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  и тензор скоростей деформаций  $\mathbf{v} = v_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , записываются в виде

$$s_{ij} = 2T(U)v_{ij}/U \tag{1.1}$$

где  $T = (\text{tr } s^2/2)^{1/2}$  – максимальное касательное напряжение,  $U = (2\text{tr } \mathbf{v}^2)^{1/2}$  – максимальная скорость скольжения. Инварианты  $T$  и  $U$  связаны скалярным определяющим соотношением  $T = T(U)$  [13], которое уже подставлено в (1.1).

В базис обезразмеривания включим величины  $\rho$ ,  $g$  и  $h$ , не меняющиеся в процессе деформирования. Все дальнейшие формулы выписаны в безразмерном виде. Два уравнения движения:

$$-p_{,1} + s_{1i,i} = \frac{dv_1}{dt} - \sin \beta, \quad -p_{,2} + s_{2i,i} = \frac{dv_2}{dt} + \cos \beta \tag{1.2}$$

вместе с условием несжимаемости

$$v_{i,i} = 0 \tag{1.3}$$

и соотношениями (1.1), куда надо подставить связь тензора  $\mathbf{v}$  и вектора  $\mathbf{v}$ , замыкают систему в области  $\Omega$  относительно давления  $p$  и компонент  $v_1$  и  $v_2$ .

Граничные условия при  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = 1$  и на прямой  $x_2 = \xi(t)$ , отделяющей зону вязкопластического течения  $\Omega_f = \{-\infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \xi(t)\}$  от жесткой прослойки  $\Omega_r = \{-\infty < x_1 < \infty, \xi(t) < x_2 < 1\}$  (фиг. 1) запишем в виде

$$\begin{aligned} x_2 = 0: v_1 = v_2 = 0; \quad x_2 = 1: p = s_{12} = 0 \\ x_2 = \xi(t): T = \tau_s \end{aligned} \tag{1.4}$$

Будем разыскивать плоскопараллельные течения в  $\Omega$ , такие что

$$v_1 = v(x_2, t), \quad v_2 \equiv 0, \quad U = 2|v_{12}| = |v_{,2}|, \quad s_{11} = s_{22} = 0, \quad T = |s_{12}| \tag{1.5}$$

Кроме того в начальный момент времени зададим функцию  $v(x_2, 0)$

$$v(x_2, 0) = v_0(x_2) \quad (1.6)$$

где  $v_0(x_2) \in C^1(\Omega)$  – монотонно неубывающая функция равная константе на некотором интервале  $\Xi < x_2 < 1$ . Число  $1 - \Xi$  равно начальной толщине жесткой зоны ( $0 < \Xi < 1$ ).

Из второго уравнения (1.2) определяется профиль давления по толщине (гидростатика):

$$p(x_2) = (1 - x_2) \cos \beta \quad (1.7)$$

а после подстановки (1.7) в первое уравнение (1.2) выписывается уравнение движения:

$$s_{12,2} = v_t - \sin \beta, \quad v_t \equiv \partial v / \partial t \quad (1.8)$$

Проинтегрируем (1.8) по  $x_2$  в пределах жесткой прослойки и воспользуемся граничными условиями (1.4) при  $x_2 = 1$  и  $x_2 = \xi(t)$ :

$$x_2 = \xi(t): v_t = \sin \beta - \frac{\tau_s}{1 - \xi(t)} \quad (1.9)$$

Равенство (1.9) служит для определения неизвестной границы  $\xi(t)$ . Им можно заменить условие (1.4) для  $s_{12}$  при  $x_2 = 1$  и свести задачу к нахождению решения только в области  $\Omega_f$ .

Выпишем сначала характеристики стационарного режима движения вязкопластического слоя по наклонной плоскости. Будем пометать параметры такого режима градусом. Решение

$$s_{12}^{\circ} = (1 - x_2) \sin \beta, \quad \xi^{\circ} = 1 - \tau_s / \sin \beta \quad (1.10)$$

является классическим [9]. Заметим, что  $s_{12}^{\circ} > 0$  всюду в  $\Omega$ , следовательно,  $v_{12}^{\circ} > 0$ ,  $v_2^{\circ} > 0$  в  $\Omega$  и знаки модулей в (1.5) могут быть сняты. Слой  $\xi^{\circ} < x_2 < 1$  занят жесткой зоной, движущейся поступательно вдоль плоскости вниз, причем эта зона может охватывать всю область  $\Omega$  в случае, когда  $\tau_s > \sin \beta$ . Гравитационных сдвиговых усилий при этом недостаточно, чтобы преодолеть пороговый предел, и будет иметь место покой.

Распределение скоростей в области  $\Omega$  следующее:

$$v^{\circ}(x_2) = \begin{cases} \int T^{-1}[(1 - \eta) \sin \beta] d\eta, & 0 < x_2 < \xi^{\circ} \\ 0 \\ \xi^{\circ} \\ \int T^{-1}[(1 - \eta) \sin \beta] d\eta, & \xi^{\circ} < x_2 < 1 \\ 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Расход же через весь интервал  $0 < x_2 < 1$  для кинематики (1.11) определяется формулой

$$Q = \int_0^{\xi^{\circ}} \int_0^{x_2} T^{-1}[(1 - \eta) \sin \beta] d\eta dx_2 + \frac{\tau_s}{\sin \beta} \int_0^{\xi^{\circ}} T^{-1}[(1 - \eta) \sin \beta] d\eta \quad (1.12)$$

**2. Нелинейное параболическое уравнение в области с переменной границей.** Перейдем к основной задаче неустановившегося движения слоя. Функция  $v(x_2, t)$  согласно (1.8) и (1.10) удовлетворяет уравнению

$$[T(v_{,2})]_{,2} = v_t - \frac{\tau_s}{1 - \xi^0} \quad (2.1)$$

Данное уравнение с граничными условиями, заданными при  $x_2 = 0$  и  $x_2 = \xi(t)$ , относится к классу нелинейных параболических задач в области с неизвестной границей, определяемой в процессе решения [12, 14–16].

Перейдем от пары независимых переменных  $(x_2; t)$  к паре  $(y; t)$  с помощью замены  $y = 1 - x_2/\xi(t)$ , так что в каждый момент времени все точки  $0 < y < 1$  принадлежат зоне течения  $\Omega_f$ . В переменных  $(y, t)$  начально-краевая задача принимает следующий вид:

$$-\left[T\left(\frac{v_y}{\xi}\right)\right]_y = \xi v_t + \xi(1-y)v_y - \frac{\tau_s \xi}{1 - \xi^0} \quad (2.2)$$

$$y = 1: v = 0; \quad y = 0: v_y = 0, \quad v_t + \frac{\xi}{\xi}(1-y)v_y = \frac{\tau_s}{1 - \xi^0} - \frac{\tau_s}{1 - \xi} \quad (2.3)$$

$$t = 0: v(y) = v_0((1-y)\Xi), \quad \Xi = \xi(0) \quad (2.4)$$

Напомним, что дополнительное (второе) условие при  $y = 0$  в (2.3) и в ниже следующих постановках задач служит для нахождения неизвестной функции  $\xi(t)$ . В этом заключается особенность формулировок задач о вязкопластическом течении в области с неизвестной границей.

Исследуем сначала случай линейного скалярного соотношения

$$T = \tau_s + \mu U \quad (2.5)$$

задающего материал Шведова–Бингама–Ильюшина. Постановку (2.2)–(2.4) можно переформулировать следующим образом:

$$\mu v_{yy} = \xi^2 v_t + \xi \xi(1-y)v_y - \frac{\tau_s \xi^2}{1 - \xi^0} \quad (2.6)$$

$$y = 1: v = 0; \quad y = 0: v_y = 0, \quad \mu v_{yy} = -\frac{\tau_s \xi^2}{1 - \xi} \quad (2.7)$$

а начальное условие (2.4) останется в прежнем виде.

Введем новую неизвестную функцию  $u(y, t)$  заменой

$$v = u + \frac{\tau_s \xi^2 (1-y^2)}{2\mu(1-\xi)} \quad (2.8)$$

тем самым обеспечивая однородность граничных условий (2.7):

$$\mu u_{yy} - \xi^2 u_t - \xi \xi(1-y)u_y = \frac{\tau_s \xi^2 (\xi - \xi^0)}{(1 - \xi^0)(1 - \xi)} + \frac{\tau_s \xi^3 \xi(1-y)(2 - \xi + y\xi)}{2\mu(1 - \xi)^2} \quad (2.9)$$

$$y = 1: u = 0; \quad y = 0: u_y = 0, \quad u_{yy} = 0 \quad (2.10)$$

$$t = 0: u(y) = v_0((1-y)\Xi) - \frac{\tau_s \Xi^2 (1-y^2)}{2\mu(1-\Xi)} \equiv u_0(y) \quad (2.11)$$

Решение начально-краевой задачи (2.9)–(2.11) в области с постоянными границами  $y = 0$  и  $y = 1$  будем разыскивать методом разделения переменных. Удовлетворяя однородным граничным условиям (2.10), представим  $u(y, t)$  в виде степенного ряда

$$u(y, t) = \tau_s \sum_{n=3}^{\infty} T_n(t)(1-y^n) \quad (2.12)$$

Подставим ряд (2.12) в уравнение (2.9) и приравняем зависящие от  $t$  коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \dot{T}_n = -\frac{\xi - \xi^0}{(1 - \xi^0)(1 - \xi)} - \frac{\xi(2 - \xi)\xi}{2\mu(1 - \xi)^2} \quad (2.13)$$

$$T_3 = \frac{\xi^3 \xi}{6\mu^2(1 - \xi)}, \quad T_4 = \frac{\xi^4 \xi}{24\mu^2(1 - \xi)^2} + \frac{\xi \xi}{4\mu} T_3 \quad (2.14)$$

$$T_{n+2} = \frac{\xi^2 \dot{T}_n - \xi \xi (nT_n - (n+1)T_{n+1})}{(n+1)(n+2)\mu} \quad (n \geq 3)$$

Все функции  $T_n$  ( $n \geq 3$ ) выражаются через  $\xi(t)$  с помощью рекуррентной цепочки (2.14), после чего подставляются в уравнение (2.13). В итоге получится обыкновенное уравнение относительно  $\xi(t)$  бесконечного порядка. Аналитическое исследование данной задачи связано с учетом конечного числа членов ряда, стоящего в левой части (2.13).

**3. Приближение  $Re \ll \sqrt{Fr}$ .** Заметим, что безразмерная вязкость  $\mu$ , использовавшаяся до сих пор, выражается в базисе  $\{\rho, g, h\}$  через размерную  $\tilde{\mu}$  следующим образом

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\rho \sqrt{ghh}} = \frac{\tilde{\mu}}{\rho Vh \sqrt{gh}} = \frac{\sqrt{Fr}}{Re} \quad (3.1)$$

где  $V$  – некоторая характерная скорость,  $Re$  – число Рейнольдса,  $Fr$  – число Фруда. Поэтому приближение  $\mu \gg 1$  или  $Re \ll \sqrt{Fr}$  соответствует случаю, когда вязкие составляющие проявляют себя гораздо сильнее гравитационных.

Нулевое приближение по параметру  $1/\mu$  дает стационарный режим  $\xi \equiv \xi^0$ , вообще говоря, не согласующийся с начальным условием  $\xi(0) = \Xi$ . В первом приближении по  $1/\mu$  из (2.13) будем иметь задачу Коши

$$\xi = -\frac{2\mu}{1 - \xi^0} \frac{(\xi - \xi^0)(1 - \xi)}{\xi(2 - \xi)}, \quad \xi(0) = \Xi \quad (3.2)$$

Точное решение (3.2) имеет вид

$$\xi(t) \equiv \xi^0, \quad \text{если } \Xi = \xi^0$$

$$2\mu t = \ln \frac{1 - \xi}{1 - \Xi} - \xi^0(2 - \xi^0) \ln \left| \frac{\xi - \xi^0}{\Xi - \xi^0} \right| - (1 - \xi^0)(\xi - \Xi), \quad \text{если } \Xi \neq \xi^0 \quad (3.3)$$

Учет первого и первых двух членов ряда в левой части (2.13) приводит к двум независимым задачам Коши для уравнений второго порядка относительно  $\xi(t)$

$$\dot{T}_3 = -\frac{\xi - \xi^0}{(1 - \xi^0)(1 - \xi)} - \frac{\xi(2 - \xi)\xi}{2\mu(1 - \xi)^2} \quad (3.4)$$

либо

$$\dot{T}_3 + \dot{T}_4 = -\frac{\xi - \xi^\circ}{(1 - \xi^\circ)(1 - \xi)} - \frac{\xi(2 - \xi)\dot{\xi}}{2\mu(1 - \xi)^2} \quad (3.5)$$

Начальная граница жесткой зоны, по-прежнему, равна  $\Xi$ , а  $\dot{\xi}(0)$  вычисляется из первого по  $1/\mu$  приближения (3.3) по формуле (3.2).

На фиг. 2 для случая  $\xi^\circ = 1/2$  приведены решения трех задач Коши: кривые (a) соответствуют точному решению (3.3) первого приближения при  $\Xi = 0.99, 0.7, 0.3$ ; кривые (b) и (c) – решениям уравнений (3.4) и (3.5) при тех же начальных значениях  $\Xi$ . Поведение всех кривых показывает, что при  $\Xi \neq \xi^\circ$  предельная толщина жесткой зоны вблизи свободной границы достаточно быстро стремится к своему значению в стационарном движении. При этом переходный процесс торможения слоя ( $\Xi > \xi^\circ$ ) происходит медленнее процесса разгона ( $\Xi < \xi^\circ$ ).

Предположим, что при  $t \rightarrow \infty$  решение уравнения второго порядка (3.5) имеет стационарную асимптоту

$$\xi(t) \rightarrow \xi^\circ + \gamma(t), \quad \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

и линеаризуем по  $\gamma$  (3.5)

$$\ddot{\gamma} + 12\mu \frac{(2 - \xi^\circ)\dot{\gamma}}{(4 - 3\xi^\circ)\xi^{\circ 2}} + 24\mu^2 \frac{\gamma}{(4 - 3\xi^\circ)\xi^{\circ 2}} = 0 \quad (3.7)$$

Коэффициенты при  $\gamma$  и  $\dot{\gamma}$  в (3.7) положительны, что говорит об отрицательности действительных частей характеристических корней  $\lambda_1, \lambda_2$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\sqrt{3}\mu}{(4 - 3\xi^\circ)\xi^{\circ 2}} [-\sqrt{3}(2 - \xi^\circ) \pm \sqrt{9\xi^{\circ 2} - 20\xi^\circ + 12}] \quad (3.8)$$

Из (3.8) видно, что  $\lambda_{1,2}$  действительны при любом  $\xi^\circ$ , т.е.  $\gamma(t)$  экспоненциально убывает к нулю, а в силу (3.6) граница жесткой прослойки  $\xi(t)$  экспоненциально стремится к  $\xi^\circ$ .

**4. Модели с нелинейным скалярным соотношением.** Приведем постановки начально-краевых задач в некоторых случаях нелинейной скалярной связи  $T$  и  $U$  (вместо (2.5)), а именно, логарифмической и тригонометрической.

Стационарный профиль продольной скорости  $v^\circ(x_2)$  в случае логарифмического скалярного соотношения

$$T(U) = \tau_s + \mu \ln(1 + U) \quad (4.1)$$

имеет вид ( $0 < x_2 < \xi^\circ$ ):

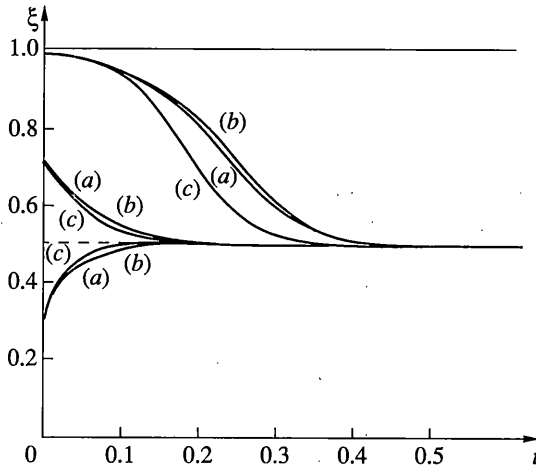
$$v^\circ = \frac{\mu}{\sin \beta} \left( \exp \frac{\sin \beta - \tau_s}{\mu} - \exp \frac{(1 - x_2) \sin \beta - \tau_s}{\mu} \right) - x_2 \quad (4.2)$$

а расход  $Q$  через сечение слоя вычисляется по формуле (1.12). Подставляя (4.1) в (2.2), приходим к нелинейному уравнению

$$\mu v_{yy} = (\xi - v_y) \left( \xi v_t + \dot{\xi}(1 - y)v_y - \frac{\tau_s \xi}{1 - \xi^\circ} \right) \quad (4.3)$$

к которому необходимо добавить начальное условие (2.4) и граничные условия

$$y = 1: v = 0; \quad y = 0: v_y = 0, \quad \mu v_{yy} = -\frac{\tau_s \xi}{1 - \xi} (\xi - v_y) \quad (4.4)$$



Фиг. 2

Однородность условий (4.4) достигается заменой  $v = u + w$ , где  $w(y, t)$  удовлетворяет линейной задаче

$$\mu w_{yy} - \frac{\tau_s \xi}{1 - \xi} w_y + \frac{\tau_s \xi^2}{1 - \xi} = 0 \quad (4.5)$$

$$y = 1: w = 0; \quad y = 0: w_y = 0 \quad (4.6)$$

Заметим, что в задачу (4.5), (4.6) время или функция  $\xi(t)$  входят лишь как параметры.

Тригонометрическое упрочнение

$$T(U) = \tau_s + (2\mu/\pi) \operatorname{arctg} U \quad (4.7)$$

означает, что максимальное касательное напряжение ограничено снизу константой  $\tau_s$ , а сверху константой  $\tau_s + \mu$ . Материал при большой скорости скольжения ведет себя как идеально пластическое тело с пределом текучести при сдвиге  $\tau_s + \mu$ . Такое тело моделирует движение, при котором соседние слои слабо сцеплены друг с другом (камнепад, мелкозернистый селевой поток и т.д.). Профиль стационарного течения имеет вид ( $0 < x_2 < \xi^0$ ):

$$v^0 = \frac{2\mu}{\pi \sin \beta} \ln \frac{\cos[\pi((1 - x_2) \sin \beta - \tau_s)/(2\mu)]}{\cos[\pi(\sin \beta - \tau_s)/(2\mu)]} \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7) в (2.2), получим нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{2\mu}{\pi} \xi v_{yy} = (\xi^2 + v_y^2) \left( \xi v_t + \xi(1 - y) v_y - \frac{\tau_s \xi}{1 - \xi^0} \right) \quad (4.9)$$

к которому необходимо добавить начальное условие (2.4) и граничные условия

$$y = 1: v = 0; \quad y = 0: v_y = 0, \quad \frac{2\mu}{\pi} v_{yy} = -\frac{\tau_s}{1 - \xi} (\xi^2 + v_y^2) \quad (4.10)$$

Решение нелинейных параболических задач (4.3), (4.4), (2.4) и (4.9), (4.10), (2.4) позволяет описать влияние сложной реологии на параметры разгона и торможения тяжелого слоя на наклонной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эглит М.Э. Динамика снежных лавин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 186. С. 162–167.
2. Рамберг Х. Сила тяжести и деформации в земной коре. М.: Недра, 1985. 399 с.
3. Nowacki W.K. On the dynamics description of the rock failure process // Arch. mech. stosow. 1986. V. 38. № 1–2. S. 25–37.
4. Черников А.К. Вариационные методы решения задач о вязкопластическом течении соляных пород // Изв. вузов: Горный ж. 1985. № 10. С. 29–33.
5. Сагомонян А.Я. Дождевая эрозия почвы на склоне возвышенности // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2000. № 4. С. 28–34.
6. Савельев Б.А., Латалин Д.А. Искусственные ледяные платформы // Итоги науки и техники. Сер. Океанология. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 7. С. 3–193.
7. Савельев Б.А. Гляциология. М.: Изд-во МГУ, 1991. 288 с.
8. Назаров А.Н. Основы математического моделирования процессов трения и вовлечения при движении потоков лавинного типа // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1995. № 4. С. 79–85.
9. Воларович М.П. Исследование реологических свойств дисперсных систем // Коллоид. ж. 1954. Т. 16. № 3. С. 227–240.
10. Георгиевский Д.В. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. М.: Изд-во “УРСС”, 1998. 176 с.
11. Листров А.Т., Чернышев А.Д. Об установившемся течении вязко-пластической среды при нелинейной вязкости // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158. № 4. С. 805–807.
12. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. М.: Наука, 1977. 373 с.
13. Ильюшин А.А. Деформация вязко-пластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
14. Баренблатт Г.И., Ишлинский А.Ю. Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 497–502.
15. Кружков С.Н. О некоторых задачах с неизвестной границей для уравнения теплопроводности // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1009–1020.
16. Гноевой А.В., Климов Д.М., Петров А.Г., Чесноков В.М. Течение вязкопластичной среды между круглыми параллельными пластинами при их сближении и удалении // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 9–17.

Москва

Поступила в редакцию  
15.01.2003