МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2003

УДК 539.3

© 2003 г. Д.И. ЧЕРНЯВСКИЙ

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ УДАР ДВУХ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ ПРИ СРЕДНИХ СКОРОСТЯХ СОУДАРЕНИЯ

Ударное взаимодействие двух твердых деформируемых тел сопровождается различными физическими процессами, которые зависят от формы и материала этих тел, скорости соударения, а также и других факторов. Основное отличие динамического ударного взаимодействия от статического нагружения состоит в том, что силы, действующие в точке контакта тел, оказывают влияние в течение очень короткого промежутка времени – десятки и сотни микросекунд. В результате такого воздействия формируются ударные волны напряжений, которые охватывают всю систему тел, а также происходит внедрение одного тела в поверхность другого, за исключением редко встречающихся на практике случаев.

Как известно, механическое поведение материалов при ударе классифицируют как упругое, пластическое, вязкое или как комбинацию этих состояний. Основным критерием такой классификации является соотношение между напряжениями и деформациями, а также скоростями их изменения.

Скорости соударения тел на практике подразделяют на малые, средние и высокие. При малых скоростях наблюдаются только упругие деформации, при высоких скоростях удара взаимодействующие тела разрушаются или распыляются. При достаточно высоких скоростях удара, когда возникающее давление достигает величины модуля упругости, возможны фазовые превращения материала соударяющихся тел.

На практике наиболее часто встречается удар при средних скоростях, когда уровень возникающих напряжений превышает величину предела текучести материала тел не более чем на два порядка, а скорость движения частиц этих тел ниже скорости звука для данного материала. При таком диапазоне скоростей возникает остаточное углубление в зоне контакта, и пластическая деформация ограничивается только окрестностью данной зоны и не распространяется на все поперечное сечение тел. При этом выполняется неравенство: $P_m < \sigma_T S_i$, где P_m – максимальная сила; σ_T – предел текучести, S_i – площадь поперечного сечения за областью контакта бойка ($i = 1$) или второго тела ($i = 2$). Для простоты принято считать такие процессы изотермическими, поэтому температура и другие термодинамические эффекты не учитываются. Подобный удар часто встречается при решении актуальных задач прикладной механики, связанных с поведением различных конструкций в условиях импульсных нагрузок.

Процессы распространения волн в твердых упругих телах, независимо от причины их возникновения, хорошо изучены теоретически. Результаты этих исследований изложены в работах [1–9]. Описание процесса содержит дифференциальные уравнения движения и соответствующее уравнение состояния. Решение этих уравнений зависит от геометрических свойств и предполагаемого поведения соударяющихся тел. Большое количество решений получено для однородных, изотропных, упругих материалов. Наиболее простыми случаями дифференциальных уравнений движения является распространение упругих волн в неограниченной среде и в упругом полупространстве. При анализе упругих волновых процессов в телах конечного размера получены точные решения Рэлеем и Лембом для пластин, Похгаммером и Кри для цилиндрических стержней, Мирским и Херрманом для оболочек и т.д.

Сложность применения строгих решений теории упругости для тел конечных размеров вызвало появление различных упрощенных приближенных решений для стержней, балок, пластин, кривых стержней и других простых форм при большом разнообразии граничных условий.

Помимо упругих материалов, вещества классифицируются на анизотропно-упругие, многофазные сыпучие, упругопластические, вязкоупругие и т.д. Дифференциальные уравнения движения для таких случаев значительно усложняются. Наибольший интерес с точки зрения практики представляет описание динамического взаимодействия упругопластических тел. Это объясняется тем, что металлы, оставаясь по настоящее время основными конструкционными материалами, проявляют упругопластические свойства в условиях динамического взаимодействия при средних скоростях соударения.

Для инженерных расчетов элементов машин в условиях быстротекущего динамического взаимодействия необходимо построить поле напряжений, изменяющееся с течением времени. Для решения этой задачи было предложено большое число уравнений, которые устанавливают связь между силой P, действующей в месте контакта двух тел, подвергаемых взаимному сжатию вдоль общей нормали к их поверхностям в точке контакта, и общим сближением вдоль этой линии h.

Классическое уравнение связи контактной силы P и сближения h для статического сжатия двух упругих тел, поверхность которых может быть описана уравнениями второй степени, дал Герц на основе электростатической аналогии [1]:

$$P = k_H h^{1.5} \tag{1}$$

Величина k_H, зависящая от геометрии и упругих свойств тел, определяется выражением

$$k_H = 1.33\sqrt{R_0}\frac{E_1E_2}{(1-\nu_1^2)E_2+(1-\nu_2^2)E_1} \tag{2}$$

где E_1, E_2 – модули Юнга материалов бойка и второго тела; ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона материалов бойка и второго тела; R_0 – приведенный радиус. Закон Герца нашел экспериментальное подтверждение при статическом упругом нагружении. В динамических условиях данный закон применим лишь для сталей с твердостью *HRC* 60–64 и выше при малых скоростях соударения. Это объясняется тем, что в этом случае только небольшая часть начальной энергии расходуется на формирование пластического углубления [3, 4].

В [7] показано, что при достаточно жестких ударах твердых деформируемых тел, когда появляются упругопластические деформации, практически любая поверхность приближается в области контакта к поверхности второго порядка. Это означает, что уравнение Герца можно использовать для описания удара тел различной конфигурации, за исключением тех случаев, когда контактирующие поверхности в большей степени можно считать острыми инденторами, чем поверхностями второго порядка. Поэтому большинство исследователей обратили свои усилия на возможность использования уравнения Герца не только для упругих, но и для упругопластических деформаций. Это связано с тем, что упругое ударное взаимодействие в инженерной практике встречается крайне редко. Так при падении твердого стального шарика диаметром 6.35 мм на очень твердую металлическую пластину [3] возникает кратер, кроме случаев соударения при скоростях ниже 7.5 см/с, а для стального шара диаметром 10 мм и медной плиты твердого НВ 55 предел такой скорости составляет 0.081 см/с[1].

Рассмотрим наиболее известные варианты использования уравнения Герца для описания упругопластического удара.

И.Я. Штаерман [8] модифицировал уравнение Герца:

$$P = k_1 h^{\frac{2n+1}{2n}} \ldots, \quad n > 1, \quad k_1 = \frac{2n}{2n+1}\frac{E}{(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{1}{B}} \tag{3}$$

где B – коэффициент, зависящий от конфигурации тел в зоне контакта. При $n = 1$ данное соотношение переходит в формулу Герца (1).

Однако инженерное использование данного метода затруднено вследствие сложности аналитического определения параметров n и k_1. Наличие пластических деформаций приводит к значительным математическим трудностям определения конечных инженерных зависимостей.

На основании большого числа испытаний Е. Мейер [9] определил эмпирическое соотношение между контактной силой и радиусом остаточного кратера q для случая квазистатического внедрения сферы радиуса R в пластической области

$$P = Cq^2(q/R)^{n-2} \tag{4}$$

где C и n – константы материалов.

Д. Табор [9] изменил форму закона Е. Мейера по аналогии с выражением (1):

$$P = k_m q^n, \quad k_m = C/R^{n-2} \tag{5}$$

Несмотря на перспективность такого подхода, его невозможно использовать для тел произвольной конфигурации.

Эксперименты Н.Н. Давиденкова и [2] и работы А.Ю. Ишлинского [5] свидетельствуют о линейной зависимости пластической деформации от контактного усилия. Результаты относятся к случаю вдавливания жесткого шарика в металлическую плиту.

Основные теории удара неоднократно подвергались экспериментальной проверке. Гамбургер [2] проводил измерения длительности соударения латунных шариков при относительных скоростях соударения от 13.7 до 205 мм/с. Отклонение опытных значений длительности соударения от рассчитанных по теории Герца не превышало 8%. А.Н. Динник [2] показал хорошее совпадение теоретических и экспериментальных данных для стальных шаров, худшее – для цинковых и неудовлетворительное – для свинцовых. В последнем случае велика доля пластических деформаций, которые теории Герца не учитывает.

Таким образом, необходимо отметить, что изучение динамики ударного взаимодействия тел при упругопластических деформациях в зоне контакта является сложной задачей. Аналитические решения определены для простейших конструктивных элементов – упругие стержни, пластины, балки и т.д. Полное математическое описание реальных сложных динамических систем в большинстве случаев невозможно или крайне затруднено на данном этапе развития механики. Поэтому в настоящее время наиболее перспективным методом расчета элементов машин в условиях ударного взаимодействия является сочетание натурных и вычислительных экспериментов. Однако

[1] См. *Стихановский Б.Н.* Передача энергии ударом. Омск: Омск. политехн. ин-т, 1986. 180 С. Деп. в ВИНИТИ, № 8115–В86.

многие вычислительные модели привязаны только к определенным типам форм соударяющихся тел. В связи с этим целесообразно разработать методику расчета ударного взаимодействия твердых деформируемых тел любой формы с контактными поверхностями второго порядка при упругопластическом ударе. Данная методика должна рассчитывать величины ударных сил и сближения, значения коэффициента восстановления, а также определять напряжения в любой точке соударяющихся тел.

Предлагаемую методику построим на базе уравнения Герца (1). Данная теория применима при малых и средних скоростях удара, т.е. когда пластические деформации возникают только в зоне контакта, а вне этой зоны распространяются упругие волны.

В работе [6] рассмотрено выражение (1) для упругого удара. Наибольшее значение величины сближения h достигается в тот момент, когда $dh/dt = 0$:

$$h_{\max} = (1.25 m\upsilon_0^2/k_H)^{0.4} \tag{6}$$

где υ_0 – скорость бойка, m – масса бойка. При этом считается, что второе тело находится в состоянии покоя.

Из данного выражения определяется максимальная сила удара:

$$P_{\max} = k_H h_{\max}^{1.5} = k_H^{0.4}(1.25 m\upsilon_0^2)^{0.6} \tag{7}$$

Исходя из (7), запишем:

$$P = k_H^{0.4}(2.5A)^{0.6} \tag{8}$$

где A – кинетическая энергия бойка. Таким образом, выражение (8) является уравнением связи между энергией удара и ударной силой для упругого удара.

Для расчетов элементов машин на прочность необходимо знать величину ударной силы и площадь ее действия. Для определения данной площади воспользуемся следующей моделью. В ходе удара по взаимодействующим телам распространяются ударные волны сжатия, имеющие сферический фронт. Центром этих волн является точка ударного контакта. В целях построения инженерной методики допущение, что напряжения, возникающие от действия ударной силы, равномерно распределены по сферическому фронту ударной волны. Таким образом, три главных напряжения заменяются одним видом напряжения, направление которого перпендикулярно сферическому фронту волны для каждой конкретной точки возмущенного объема тела. Поэтому для определения ударных напряжений в данной точке тела необходимо рассчитать площадь сферического фронта волны, который проходит через данную точку тела в данный момент времени. Площадь такого сферического фронта легко определить, решив соответствующие уравнения пересечения сферы и поверхностей соударяющихся тел.

Предлагаемая методика предназначена для расчета ударного взаимодействия твердых деформируемых тел различной конфигурации, с контактными поверхностями второго порядка. Начиная с момента ударного соприкосновения точек бойка, движущегося со скоростью V_b, и второго тела, в обоих телах распространяются сферические фронты ударных волн сжатия, постепенно охватывающие весь объем рассматриваемых тел. При взаимодействии сферического фронта волны с поверхностями тел происходит формирование вторичных волн деформации. Эти волны в свою очередь формируют другие ударные волны, и этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока в результате диссипации волновые явления полностью не прекратятся. Полный расчет таких волновых явлений практически не возможен в силу своей громоздкости, так как приходится рассчитывать очень большое количество различных волн деформации. Поэтому необходимо принять такие допущения, при которых погрешность между результатами вычислений и экспериментами будет минимальна.

Известно, что значения сил, деформаций и напряжений меньше по величине при ударе тел с закругленными торцами, чем при ударе тел с идеально плоскими торцами[2]. Однако время удара в первом случае значительно больше чем во втором. Так, если безразмерное время удара τ во втором случае равно двум, то для первого случая при одинаковых параметрах удара безразмерное время τ больше десяти. Это связано с тем, что закругленный торец обладает значительно меньшей жесткостью, чем плоский торец. Напомним, что под безразмерным временем удара τ понимается количество проходов волн сжатия (растяжения) по более короткому соударяющемуся телу за время ударного процесса.

Для упрощения расчетов примем, что безразмерное время удара τ для тел с закругленными торцами соизмеримо с безразмерным временем удара для тел с идеально плоскими торцами. Вычисляемые значения сил, сближения и напряжений откорректируем посредством КПД передачи кинетической энергии η_{ke}.

При описании ударного взаимодействия необходимо знать волновые поперечные сечения взаимодействующих тел. Для стержней волновое поперечное сечение равно

$$W_i = \rho_i a_i S_i \tag{9}$$

где ρ_i – плотность i стержня, a_i – скорость продольной волны деформации i стержня, S_i – площадь поперечного сечения i стержня. Отношение волновых сечений соударяющихся стержней определяется как

$$\lambda = \rho_2 a_2 S_2/(\rho_1 a_1 S_1) \tag{10}$$

В зависимости от величины λ изменяются продолжительность ударного взаимодействия, время контакта, период максимального действия ударной силы, а также другие параметры удара.

Данная теория разработана для удара упругих стержней, имеющих плоские поверхности контакта, по которым происходит идеальное одновременное касание во всех точках торца.

Как видно из уравнения (9), наибольшую сложность вызывает определение величины площади поперечного сечения для тел произвольной формы. Для решения этого вопроса введем новую интегральную характеристику $\bar{S}$, которая определяет среднее значение поперечной площади соударяющихся тел

$$\bar{S} = \left(\sum_{i=1}^{j} S_i\right)/j \tag{11}$$

где S_i – площадь i фронта сферической ударной волны, определяемая пересечением сферы и боковых поверхностей соударяющихся тел в каждый момент времени t_j; j – количество шагов, которые прошла ударная волна с течением времени. При достижении ударной волной поверхности, противолежащей точке ударного контакта, $j = n$. Величина n определяет количество точек, для которых вычисляются действующие напряжения в соударяющихся телах. После определения величины $\bar{S}$ не трудно определить значения λ для исследуемых случаев соударения твердых деформируемых тел.

Как известно, ударная волна многократно проходит по твердому деформируемому телу. Поэтому в ходе ударного взаимодействия максимальная ударная сила может формироваться в различные периоды времени, в зависимости от формы ударного им-

[2] См. *Стихановский Б.Н.* Передача энергии ударом. Ч. 2 и 3. Омск: Омск. техн. ун-т, 1995. 145 с. Деп. в ВИНИТИ, № 1726–В95.

пульса, конфигурации тел, а также других факторов. Данное положение необходимо учитывать при решении задач ударного взаимодействия твердых деформируемых тел.

Примем, что все физические величины, относящиеся к бойку, имеют индекс *1* и величины, относящиеся ко второму телу, имеют индекс *2*. Считаем, что в момент времени t равное нулю происходит ударное соприкосновение бойка и второго тела, и в этот момент в обоих телах отсутствуют любые виды напряженного состояния. Через некоторый промежуток времени t, т.е. в момент времени t_1, в телах образуются области напряженного состояния объемами δ_{11} и δ_{21}, определяемая сферическими поверхностями с радусами

$$r_{1,2} = a_{1,2}t_1 \tag{12}$$

где $a_{1,2}$ – скорость распространения ударной волны в материалах бойка и второго тела.

Для определения величины энергии соударения сталкивающихся тел примем, что в момент времени t_1, скорость всех точек бойка, находящихся внутри объема δ_{11} равняется нулю. В реальной действительности полное торможение будет происходить не в момент времени t_1 при первом прохождении ударной волны, а в другие моменты времени, когда ударная волна пройдет по бойку несколько раз. Это следует из условия τ больше десяти. Но для данных расчетов используем такое допущение, которое, как показали дальнейшие расчеты, существенно не влияет на расчет максимальных величин сил и сближения. Таким образом, можно записать

$$A_{b1} = A_{\text{el.def.11}} + A_{\text{plast.def.11}} + A_{\text{el.def.21}} + A_{\text{plast.def.21}} + A_{\text{wave11}} + A_{\text{wave21}} \tag{13}$$

где A_{b1} – кинетическая энергия частиц бойка, находящихся внутри объема δ_{11} и двигавшихся со скоростью V_b; $A_{\text{el.def.11}}$ и $A_{\text{el.def.21}}$ – энергия упругих деформаций частиц бойка и второго тела, определяемая объемами δ_{11} и δ_{21}; $A_{\text{plast.def.11}}$ и $A_{\text{plast.def.21}}$ – потери энергии на пластические деформации и другие виды необратимых потерь, определяемые объемами δ_{11} и δ_{21}; A_{wave11}, и A_{wave21}, – волновая энергия частиц бойка и второго тела, определяемая объемами δ_{11} и δ_{21}.

Выражение (13) является следствием эмпирического закона Герстнера [2], который гласит, что после перехода деформаций за предел упругости местная деформация состоит из упругой и пластической компонент, которые развиваются при нагружении независимо друг от друга.

Для определения поля напряжений внутри ударно взаимодействующих тел необходимо определить закон распределения энергии в процессе удара. Как известно, в каждой отдельной волне энергия упругих деформаций равна кинетической энергии волны. Однако необходимо учесть, что при наложении нескольких волн сжатия и растяжения этот баланс нарушается из-за того, что по-разному суммируются энергии. При отражении волны от свободной поверхности бойка или второго тела волна сжатия складывается с отраженной волной, твердое деформируемое тело разгружается от энергии деформаций, и за счет этого кинетическая энергия частиц удваивается. При отражении волны от жесткой преграды, наоборот, энергия деформаций удваивается за счет разгрузки стержня от кинетической энергии частиц, которая при суммировании в этом случае компенсируется из-за разных знаков.

Согласно принятым допущениям для данной расчетной модели учитываем только первичную волну деформации сжатия и растяжения и не учитываем остальные вторичные волны, которые формируются в телах в результате прохождения первичных волн. В связи с этим запишем

$$A_{\text{el.def.11}} + A_{\text{plast.def.11}} + A_{\text{wave11}} = 2A_{\text{el.def.11}} + A_{\text{plast.def.11}} \tag{14}$$

$$A_{\text{el.def.21}} + A_{\text{plast.def.21}} + A_{\text{wave21}} = 2A_{\text{el.def.21}} + A_{\text{plast.def.21}} \tag{15}$$

Уравнение (13) преобразуется:

$$A_{b1} = 2A_{\text{el.def.11}} + A_{\text{plast.def.11}} + 2A_{\text{el.def.21}} + 2A_{\text{plast.def.21}} \tag{16}$$

Основной проблемой, которая вытекает из уравнения (16), является определение соотношения между количеством энергии, которое расходуется на формирование упругих (обратимых) деформаций в бойке и во втором теле, и количеством энергии, которое необходимо для формирования пластических (необратимых) деформаций.

Для ответа на этот вопрос обратимся к законам сохранения энергии и импульса. Будем считать, что объемы бойка и второго тела, охваченные волнами деформации в момент времени t_1, можно рассматривать как самостоятельно ударно взаимодействующие твердые деформируемые тела. Такое ударное взаимодействие можно описать следующей системой уравнений:

$$\frac{m_{11}U_{11}^2}{2} + \frac{m_{21}U_{21}^2}{2} = \eta_{ke}\left(\frac{m_{11}V_{11}^2}{2} + \frac{m_{21}V_{21}^2}{2}\right) \tag{17}$$

$$m_{11}\mathbf{U}_{11} + m_{21}\mathbf{U}_{21} = m_{11}\mathbf{V}_{11} + m_{21}\mathbf{V}_{21} \tag{18}$$

$$\mathbf{U}_{21} - \mathbf{U}_{11} = k(\mathbf{V}_{11} - \mathbf{V}_{21}) \tag{19}$$

где m_{11} и m_{21} – массы объемов бойка δ_{11} и второго тела δ_{21}, охваченных волнами деформации в момент времени t_1; V_{11} и V_{21} – доударные скорости масс m_{11} и m_{21}; U_{11} и U_{21} – послеударные скорости масс m_{11} и m_{21}.

Система уравнений (17)–(19) не имеет единственного решения, так как содержит 4 неизвестных величины: послеударные скорости U_{11}, U_{21}, коэффициент восстановления k, КПД передачи кинетической энергии η_{ke}. Для определения величины КПД передачи кинетической энергии η_{ke} обратимся к выражению (8).

Уравнение (8) определено для случая упругого ударного взаимодействия твердых деформируемых тел, которое на практике встречается крайне редко. Преобразуем данное выражение для упругопластического удара:

$$P = k_H^{0.4}(2.5A\eta_{ke})^{0.6} \tag{20}$$

В качестве начальных условий примем, что в момент времени t_0 величина КПД передачи кинетической энергии η_{ke} равна единице.

Исходя из начальных условий, рассчитаем параметры удара, включая величину η_{ke} для момента времени t_1. В момент времени t_2, когда волна деформации заполнит следующие δ_{12} и δ_{22}, в выражение (20) подставим рассчитанное значение КПД передачи кинетической энергии. Данный процесс будем продолжать до тех пор, пока не закончится удар.

Возможны три различных расчетных случая.

Взаимодействуют тела, изготовленные из одинаковых материалов

$$\sigma_{1(2)} \le [\sigma] \tag{21}$$

где $\sigma_{1(2)}$ – напряжения в зоне фронта ударной волны, $[\sigma]$ – предел упругости для данного конструкционного материала.

В этом случае внутри объемов δ_{11} и δ_{21} формируются только упругие деформации, и часть первоначальной энергии преобразуется в энергию ударных волн

$$A_{b1} = 2A_{\text{el.def.11}} + 2A_{\text{el.def.21}} \tag{22}$$

Взаимодействуют тела, изготовленные из одинаковых материалов

$$\sigma_{1(2)} > [\sigma] \tag{23}$$

В этом случае внутри объемов δ_{11} и δ_{21} помимо ударных волн формируются как упругие, так и пластические деформации. Упругие деформации преобразуются в кинетическую энергию, разлетающихся тел, а пластические деформации являются следствием необратимого преобразования кинетической энергии бойка. Энергию упругих и пластических деформаций материала объемов δ_{11} и δ_{21} определим с учетом уравнения (20):

$$P_{\text{el.}} = [\sigma](S_{11}, S_{21}) \tag{24}$$

$$A'_{b1} = 0.4(P^5_{\text{el.}} k_H^{-2})^{0.33} / \eta_{ke} \tag{25}$$

$$2A_{\text{al.def.11}} + 2A_{\text{el.def.21}} = A'_{b1} \tag{26}$$

$$A_{\text{plast.def.11}} + A_{\text{plast.def.21}} = A_{b1} - A'_{b1} \tag{27}$$

где A'_{b1} – энергия бойка, при которой будут наблюдаться только упругие деформации; $P_{\text{el.}}$ – максимальная величина ударной силы, при которой наблюдаются только упругие деформации; $S_{11,\,21}$ – площади фронта сферической волны деформаций, проходящей через рассматриваемую точку.

В тех случаях, когда $\sigma_1 \neq \sigma_2$ для определения величины силы $P_{\text{el.}}$ необходимо использовать меньшее из двух значений $S_{11,\,21}$.

Взаимодействуют тела, изготовленные из различных материалов

$$\sigma_{1(2)} > [\sigma], \quad [\sigma_1] > [\sigma_2] \quad \text{или} \quad [\sigma_1] < [\sigma_2] \tag{28}$$

где $[\sigma_1]$ – предел упругости для материала бойка, $[\sigma_2]$ – предел упругости для материала второго тела.

Алгоритм решения данного варианта аналогичен предыдущим случаям. Отличие состоит в том, что в качестве допустимого напряжения необходимо принимать меньшую величину из допускаемых напряжений для материалов бойка или второго тела.

Далее определим КПД передачи кинетической энергии

$$\eta_{ke} = (A_{\text{el.def.11}} + A_{\text{el.def.21}})/A_{b1} \tag{29}$$

Таким образом, в системе трех уравнений (17)–(19) присутствуют три неизвестные величины: $\mathbf{U}_{11}$, $\mathbf{U}_{21}$ и k, которые не трудно определить.

В результате всех расчетов определяются значения силы P, сближения h, напряжений σ, КПД передачи кинетической энергии η_{ke}, коэффициента восстановления k, а также величины и направления послеударных скоростей $\mathbf{U}_{11}$ и $\mathbf{U}_{21}$ в момент времени t_1.

По истечении времени Δt все приведенные расчеты повторяются. Таким образом, величина коэффициента η_{ke} постоянно уточняется, и для последующей итерации используются значения, определенные ранее.

Через некоторый промежуток времени волна сжатия достигнет поверхности, противолежащей точке ударного контакта, либо бойка; либо второго тела, если оно имеет конечные размеры; либо обоих тел одновременно. В зависимости от конкретного случая закрепления этой поверхности такая волна сжатия либо частично перейдет на поверхность какого-либо третьего тела и частично отразится обратно в боек или второе тело, либо полностью вернется в боек или второе тело волной растяжения в случае свободной поверхности. При расчете КПД передачи энергии η_{ke} для этого момента времени необходимо использовать предел упругости на растяжение для данного конструкционного материала в отличие от предыдущей фазы удара, когда использовался предел упругости на сжатие. Когда волна растяжения одного из тел или обоих тел одновременно достигнет точки удара, то в зависимости от размеров и масс взаимодействующих тел произойдет разрыв контакта поверхностей в соответствующий период времени. В некоторых случаях, разрыв контакта может произойти при завершении прохождения волны растяжения по более длинному телу.

На основании предложенной теории разработана численная методика определения соотношения энергии формирования ударных волн, упругих и пластических деформаций. В связи с этим возникает потребность сверить результаты предлагаемой теории с экспериментальными данными. Такие данные приведены в работе В. Гольдсмита [3]. Главной целью исследования В. Гольдсмита было определение экспериментальных соотношений между силой и сближением, которые описывают взаимодействие в точке контакта ударников различной формы, изготовленных из разных металлов. Материалы и диапазон скоростей удара были выбраны таким образом, чтобы возникало остаточное углубление в точке контакта, а пластическая деформация ограничивалась окрестностью этой точки и не распространялась на все поперечное сечение. Таким образом, проведенные эксперименты соответствуют применимости уравнения Герца.

Для изучения контактных явлений Гольдсмитом был выбран мерный стержень Гопкинса благодаря тому, что его надежность и простота подтверждены многочисленными явлениями, а характеристики тщательно изучены, как теоретически, так и экспериментально. Наличие дисперсии благодаря трехмерным эффектам при распространении продольного импульса в стержне многократно подтверждено [3]; однако влияние этого процесса может быть уменьшено при использовании цилиндрического стержня и достаточно большого отношения длины импульса к диаметру стержня, минимум 8–10, обеспечивающего сохранение основных характеристик волны. Дополнительная дисперсия будет иметь место, если приложенная нагрузка неравномерно распределена по торцу стержня. Это состояние возникает при ударе ударника со сферической или конической головной частью. Начальным возмущением в данном случае является продольная сферическая волна, которая в результате последовательных отражений от боковых границ быстро приобретает характер плоской волны, но никогда возмущение не будет распределено по сечению совершенно однородно.

Баллистическое устройство для всех испытаний, описанных Гольдсмитом, представляло собой горизонтальное пневматическое ружье, изготовленное из латунной трубы длиной 90 см с внутренним диаметром 12.9 мм, с прорезями вблизи дульного конца. Ружье могло выстрелить телом весом 8.33 г со скоростью до 90 м/с [3]. В исследованиях Гольдсмита преграда была либо баллистически подвешена, либо закреплена на тыльном конце. В большинстве случаев торец стержня, воспринимающий удар, помещался вблизи выхода из ружья так, чтобы обеспечивались условия центрального нормального соударения. Начальная скорость снаряда определялась по сигналам либо от двух телефонных наушников, либо от двух фотоэлементов, помещенных на определенном расстоянии друг от друга. Кроме этого, начальная скорость и скорость отскока ударника измерялась с помощью стробоскопической камерой "Фастакс", обеспечивающей 6 тыс. кадров в секунду и специально сконструированной камеры, способной производить съемку с частотой 130 тыс. кадров в секунду. За исключением предварительных испытаний все продольные импульсы регистрировались при помощи проволочных или фольговых тензометров сопротивления. Тензометры помещались попарно на противоположных сторонах стержня и соединялись последовательно, чтобы исключить антисемметричную компоненту импульса. Сигнал от тензометров через потенциометрическую схему или через мост Уинстона подавался на катодный осциллограф с полосой пропускания от 0.5 Гц до 1 МГц, на котором регистрировался с точностью до 1%. Осциллограф запускался от сигнала, который возникал либо при прохождении ударника, либо под действием волны, возникающей в стержне. Определение масштаба осциллограммы производилось путем регистрации изменений, вызываемых вариацией сопротивления шунта, помещенного в цепи тензометра [3].

Конечная глубина кратера, которая сравнивалась с величиной, вычисленной из соотношений между силой и сближением, измерялась профилометром с точностью ±1%, а остаточное сближение ударника определялась при помощи прецизионного микрометра. Независимая проверка на полное сжатие стержня Гопкинса показала, что этим эффектом в измерениях окончательной глубины кратера можно пренебречь. Основные результаты экспериментальных исследований представлены в работе [3] в виде графиков статических и динамических зависимостей сила – сближение.

В табл. 1 представлены результаты сравнения экспериментальных исследований В. Гольдсмита ($m = 1$) и итоги расчетов, проведенных по предлагаемой теории ($m = 2$) для удара шара о стержень (P[н] – максимальная сила, h[мм] – максимальное сближение). В ходе натурных и вычислительных экспериментов изучалось соударение шара $d = 12.7$ мм о стержень с плоским торцом $d = 12.7$ мм. Параметры удара и механические свойства материалов приведены в табл. 2 (v_0 – начальная скорость удара, $m_{(1)}$ – материал шара, $m_{(2)}$ – материал стержня, σ – предел упругости материала стержня, St – сталь, Al – алюминий, D – дюраль, Pb – свинец).

Как видно из табл. 1 разность между теоретическими и экспериментальными данными не превышает 25% для первых 5 опытов (столбец $m = 3$, погрешность в %). Такой результат является удовлетворительным, так как величина доверительной вероятности не превышает 0.9. Поэтому можно считать, что предлагаемая методика применима при расчетах ударного взаимодействия высокопрочных сталей с твердостью от HRC 6–8 до HRC 60–64. Однако для других случаев ударного взаимодействия разница между теорией и экспериментом превышает 25%, достигая для свинцового стержня 461%. В связи с этим при теоретических расчетах необходимо вводить поправочные коэффициенты силы kk_P и сближения kk_h (предлагаемая теория с коэффициентом соответствует $m = 4$, $m = 5$ – погрешность с коэффициентом в %).

Для определения поправочных коэффициентов построим зависимость значений данных коэффициентов от какой-либо величины, характеризующей свойства материалов взаимодействующих тел. В качестве такой величины примем

$$kk_{P,h} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\sqrt{\frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}} \tag{30}$$

где $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$ – пределы упругости материалов шара и стержня; $\rho_{\max}$, $\rho_{\min}$ – плотности материалов шара и стержня. Средние значения отношения экспериментальных $P^1_{\max}$, $h^1_{\max}$ и теоретических $P^2_{\max}$, $h^2_{\max}$ данных, а также величин коэффициента $kk_{P,h}$ представлены в табл. 3. Усреднение величин в табл. 3 проведено с помощью правила среднего арифметического, так как коэффициент вариации не превышает 25%.

В результате анализа данных табл. 3 и построены по этим данным графикам, предложены аналитические функции расчета поправочных коэффициентов k_P (по силе) и k_h (по сближению). Поправочный коэффициент силы k_P рассчитывается по двум видам функций:

$$(a)\quad kk_P < 2,\quad k_P = 1.6\times\sqrt{\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}}\times kk_P^{-1.21}\times e^{-0.1kk_P}$$

$$(b)\quad kk_P \geq 2,\quad k_P = -0.0057kk_P + 0.52$$

Таблица 1

m	1	2	3	4	5
Опыт № 1					
P	52560	41523	21	64218	22.1
h	0.271	0.321	18.6	–	–
Опыт № 2					
P	54020	41624	22.9	64372	19.2
h	0.271	0.322	18.8	–	–
Опыт № 3					
P	73000	58511	19.84	89360	22.4
h	0.346	0.411	18.7	–	–
Опыт № 4					
P	103660	85668	17.35	127884	23.4
h	0.459	0.545	18.69	–	–
Опыт № 5					
P	108040	86384	20.0	128861	19.3
h	0.461	0.548	18.7	–	–
Опыт № 6					
P	6420	9425	46.8	5823	9.3
h	0.108	0.117	8.3	–	–
Опыт № 7					
P	8132	10784	32.6	6667	18.0
h	0.108	0.129	18.7	–	–
Опыт № 8					
P	17200	29812	73.3	18779	9.18
h	0.259	0.264	2.203	–	–
Опыт № 9					
P	10660	12388	16.2	7872	26.15
h	0.242	0.211	12.66	–	–
Опыт № 10					
P	16650	22265	33.7	14149	15.02
h	0.352	0.312	11.24	–	–
Опыт № 11					
P	22200	34185	53.9	21723	2.14
h	0.484	0.416	14.26	–	–
Опыт № 12					
P	28600	50776	77.5	32266	12.8
h	0.730	0.541	25.8	–	–
Опыт № 13					
P	37000	73607	98.9	46774	26.4
h	0.858	0.693	19	–	–
Опыт № 14					
P	37925	75110	98.05	47729	25.8
h	0.88	0.703	20	–	–
Опыт № 15					
P	2800	4002	42.9	1956	30.14
h	0.15	0.099	37	0.184	23
Опыт № 16					
P	5950	10917	83.5	5335	10.3
h	0.34	0.194	43	0.36	5.8
Опыт № 17					
P	9800	21286	117.2	10401	6.13
h	0.58	0.303	48	0.56	3.4
Опыт № 18					
P	13300	380.94	186	18615	39.9
h	0.97	0.447	54	0.83	14.7
Опыт № 19					
P	927	3926	323.5	727	21.6
h	0.424	0.153	63.9	0.43	1.4
Опыт № 20					
P	1096	6155	461.6	1140	4.01
h	0.664	0.206	68.9	0.578	13

Таблица 2

	v_0, [м/с]	$m_{(1)}$	$m_{(2)}$	E, 10^{11} [Па]	ν	σ, [МПа]
1	45.9	*St*	*St*	2.08	0.286	1270
2	46.0	*St*	*St*	2.08	0.286	1270
3	62.4	*St*	*St*	2.08	0.286	1270
4	88.7	*St*	*St*	2.08	0.286	1270
5	89.4	*St*	*St*	2.08	0.286	1270
6	13.0	*St*	*St*	2.08	0.286	666
7	14.6	*St*	*St*	2.08	0.286	666
8	36.0	*St*	*St*	2.08	0.286	666
9	20	*St*	*D*	0.75	0.33	485
10	32.4	*St*	*D*	0.75	0.33	485
11	46.6	*St*	*D*	0.75	0.33	485
12	64.8	*St*	*D*	0.75	0.33	485
13	88.3	*St*	*D*	0.75	0.33	485
14	89.8	*St*	*D*	0.75	0.33	485
15	7.8	*St*	*Al*	0.75	0.33	135
16	18.0	*St*	*Al*	0.75	0.33	135
17	31.4	*St*	*Al*	0.75	0.33	135
18	51.0	*St*	*Al*	0.75	0.33	135
19	7.7	*St*	*Pb*	0.18	0.45	18
20	11.2	*St*	*Pb*	0.18	0.45	18

Таблица 3

$kk_{P,h}$	1	1.53	1.91	5.5	58.77
P^1_{max}/P^2_{max}	1.256	0.67	0.64	0.51	0.21
h^1_{max}/h^2_{max}	–	–	–	1.84	2.99

Поправочный коэффициент сближения k_h вычисляется по одной функции, так как при kk_h меньше двух такие расчеты нет необходимости проводить, потому что погрешность теоретических и экспериментальных данных не превышает 25%. В связи с этим запишем $kk_h \geq 2$, $k_h = 0.018kk_h + 1.75$.

В табл. 1 приведены результаты расчетов с учетом поправочных коэффициентов. Погрешность вычислений не превышает 40%.

Предлагаемый метод расчета ударного взаимодействия твердых деформируемых тел при упругопластических деформациях в зоне контакта позволяет рассчитать величины ударных сил, сближения, коэффициента восстановления, а также построить поля напряжений для ударно взаимодействующих тел различной конфигурации. Данный метод можно использовать при расчете деталей машин и других конструкций на прочность наряду с другими существующими методиками. Наибольшая точность расчетов достигается при соударении тел, изготовленных из сталей твердостью от HRC 6–8 до HRC 60–64.

При соударении мягких материалов (дюралюминий, алюминий, свинец и т.д.) необходимо вводить поправочные коэффициенты, учитывающие предел упругости, а также плотность используемых материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров Е.В., Соколинский В.Б.* Прикладная теория и расчеты ударных систем. М.: Наука, 1969. 199 с.
2. *Батуев Г.С., Голубков Ю.В., Ефремов А.К., Федосов А.А.* Инженерные методы исследования ударных процессов. М.: Машиностроение, 1969. 248 с.
3. *Гольдсмит В.* Удар и контактные явления при средних скоростях // Физика быстропротекающих процессов. М.: Мир, 1971. Т. 2. С. 153–203.
4. *Гольдсмит В. Удар.* Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
5. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметричная задача теории пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
6. *Колесников Ю.В., Морозов Е.В.* Механика контактного разрушения. М.: Наука, 1989. 222 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
8. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
9. *Tabor D.* A simple theory of static and dynamic hardness // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1948. V. 192. № 1029. P. 247–274.

Омск

Поступила в редакцию
10.05.2001