

УДК 539.3

© 2003 г. И.Т. ДЕНИСЮК

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ВБЛИЗИ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕГЛАДКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Локальные стационарные поля напряжений, найденные вблизи вершины углового двумерного включения в упругом теле [1–3], позволяют построить решения соответствующих задач теории упругости двумерных тел с угловыми включениями [4–8]. В статье изучаются локальные поля напряжений вблизи особых линий (множества угловых точек) поверхностей инородных включений при внешних динамических воздействиях. Особенности динамических напряжений для некоторых случаев негладкости границ приведено в [9].

Пусть поверхность раздела матрица-включение содержит негладкость в виде особой линии L , являющейся пересечением гладких поверхностей S_1 и S_2 . Натянем на L поверхность S_0 , на которой введем криволинейные координаты u, v , причем при $v = v_0 = \text{const}$ определяется линия L [10]. Не ограничивая общность, будем считать, что $u = s$, где s – длина дуги L , отсчитываемая от некоторой начальной точки. Пусть $\mathbf{nn}_1\mathbf{n}_2$ – сопровождающий трехгранник поверхности S_0 в точке M_0 кривой L , где $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ – орты касательной плоскости к S_0 в M_0 , \mathbf{n}_1 – касательный вектор к кривой L , $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1, \mathbf{n} \perp \mathbf{n}_2$ [10]. Каждую точку M плоскости векторов \mathbf{nn}_2 определяем полярным радиусом ρ и углом $\theta = \angle(M_0M, \mathbf{n}_2)$ (фигура). Соотношение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho(\cos\theta\bar{\mathbf{n}}_2(s) + \sin\theta\bar{\mathbf{n}}(s)) \quad (1)$$

где \mathbf{r}_0, \mathbf{r} – радиус-векторы точек M_0, M , определяет ρ, θ, s как криволинейные координаты точки M локальной области пространственной кривой L . Линейный элемент, найденный на основе (1), имеет вид

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + (1 + \rho H_0)^2 ds^2 \quad (2)$$

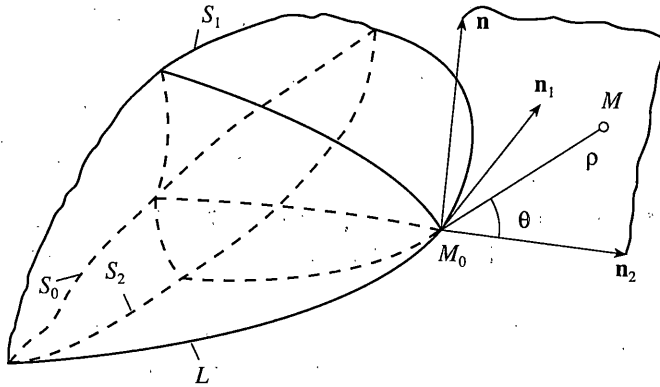
$$H_0 = -(p \cos\theta + r_1 \sin\theta), \quad p = -|\mathbf{r}_s|_v / |\mathbf{r}_v|, \quad \mathbf{r}_1 = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_{ss}) / |\mathbf{r}_s|$$

Таким образом, введенные координаты ортогональны с коэффициентами Ламе $h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1 + \rho H_0$. Уравнение равновесия [11]:

$$c_{1i}^2 \text{grad div} \mathbf{u}_i - c_{2i}^2 \text{rot rot} \mathbf{u}_i - \partial^2 \mathbf{u}_i / \partial t^2 = 0 \quad (3)$$

где $\bar{\mathbf{u}}_i$ – вектор перемещений, $c_{1i}^2 = (\lambda_i + 2\mu_i) / \rho_{0i}$, $c_{2i}^2 = \mu_i / \rho_{0i}$ – скорости волн расширения и сдвига среды, ρ_{0i} – плотность материала среды, E_i, μ_i – модули упругости и сдвига, $\lambda_i = \nu_i E_i / ((1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i))$, ν_i – коэффициент Пуассона, (значение индекса $i = 0$ отвечает матрице, а $i = 1$ – включению), должны выполняться во всех точках матрицы и включения, в том числе в точках особой линии

$$\lim_{M \rightarrow M_0} (c_{1i}^2 \text{grad div} \mathbf{u}_i - c_{2i}^2 \text{rot rot} \mathbf{u}_i - \partial^2 \mathbf{u}_i / \partial t^2) = 0 \quad (4)$$



На поверхности раздела S выполняются условия идеального механического контакта: в точках гладкости

$$u_{\rho 0} - u_{\rho 1} = 0, \quad u_{\theta 0} - u_{\theta 1} = 0, \quad u_{s_0} - u_{s_1} = 0$$

$$\sigma_{\theta 0} - \sigma_{\theta 1} = 0, \quad \tau_{\rho\theta 0} - \tau_{\rho\theta 1} = 0, \quad \tau_{\theta s_0} - \tau_{\theta s_1} = 0$$

в точках особой линии

$$\lim(u_{\rho 0} - u_{\rho 1}) = 0, \quad \lim(u_{\theta 0} - u_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(u_{s_0} - u_{s_1}) = 0$$

$$\lim(\sigma_{\theta 0} - \sigma_{\theta 1}) = 0, \quad \lim(\tau_{\rho\theta 0} - \tau_{\rho\theta 1}) = 0, \quad \lim(\tau_{\theta s_0} - \tau_{\theta s_1}) = 0 \quad (5)$$

Здесь $u_{\rho i}, u_{\theta i}, u_{s i}$ – компоненты вектора перемещений, $\sigma_{\theta i}, \tau_{\rho\theta i}, \tau_{\theta s i}$ – компоненты тензора напряжений в координатах (1), пределы берутся при стремлении точки M к точке M_0 .

Начальные условия не задаются, поскольку, как показано ниже, выполнение соотношения (4) обуславливает установившийся режим.

Определим локальное напряженное состояние в общем случае внешних динамических воздействий, т. е. найдем решение уравнения (4) при граничных условиях (5).

Уравнение равновесия (3) допускает группу преобразования подобия

$$u_{\alpha}(x, y, t) = A^0 u_{\alpha}(B^0 x, B^0 y, B^0 z, B^0 t) \quad (\alpha = x, y, z) \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по B^0 , получаем систему дифференциальных уравнений:

$$(\text{grad} u_{\alpha}, \mathbf{r}) + t \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} = - \frac{B^0 \partial A^0}{A^0 \partial B^0} u_{\alpha}$$

решение которой

$$u_{\alpha} = x^{m_{\alpha}} \varphi_{\alpha}(x/y, x/z, x/t) \quad (7)$$

где φ_{α} – однородная функция m_{α} -го измерения, идентифицирующий индекс i для упрощения записи опущен.

Используя представления декартовых координат в локальной области особой линии L посредством ρ, θ, s (1) из соотношений (7) получаем такое представление перемещений

$$u_{\rho} = \rho^{m_1} A\left(\theta, s, \frac{\rho}{t}\right), \quad u_{\theta} = \rho^{m_2} B\left(\theta, s, \frac{\rho}{t}\right), \quad u_s = \rho^{m_3} C\left(\theta, s, \frac{\rho}{t}\right) \quad (8)$$

$$m_j = m_j(s, t) \quad (j = \overline{1, 3})$$

Удовлетворяя уравнениям равновесия (4) при $\rho \rightarrow 0$ с помощью (8), получим систему дифференциальных уравнений, которая совместима при $m_1 = m_2 = m$ и расщепляется на систему вида

$$c_1^2(m^2 - 1)A + c_2^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + [c_1^2(m - 1) - c_2^2(m + 1)] \frac{\partial B}{\partial \theta} = 0 \quad (9)$$

$$c_1^2 \frac{\partial^2 B}{\partial \theta^2} + [c_1^2(m + 1) - c_2^2(m - 1)] \frac{\partial A}{\partial \theta} + c_2^2(m^2 - 1)B = 0$$

и уравнение

$$m_3^2 C + \partial^2 C / \partial \theta^2 = 0 \quad (10)$$

где $A = A(\theta, s)$, $B = B(\theta, s)$, $C = C(\theta, s)$ оказываются не зависящими от переменной t .

Система (9) и уравнение (10) в частном случае плоской кривой совпадают с известными уравнениями, полученными в случае статических нагрузок [12].

Решение (9), (10) имеет вид

$$A(\theta, s) = (m - \kappa)b(s)\cos(m - 1)\theta + (m - \kappa)a(s)\sin(m - 1)\theta - d(s)\cos(m + 1)\theta + c(s)\sin(m + 1)\theta \quad (11)$$

$$B(\theta, s) = (m + \kappa)a(s)\cos(m - 1)\theta + (m + \kappa)b(s)\sin(m - 1)\theta + c(s)\cos(m + 1)\theta + d(s)\sin(m + 1)\theta \quad (\kappa = 3 - 4\nu)$$

$$C(\theta, s) = e(s)\cos m_3\theta + f(s)\sin m_3\theta \quad (12)$$

Удовлетворим условиям контакта (5) при значениях

$$\theta = \theta_1(s) = \arccos((\text{grad} f_1, \text{grad} f_0) / (|\text{grad} f_1| |\text{grad} f_0|))$$

$$\theta = \theta_2(s) = \arccos((\text{grad} f_2, \text{grad} f_0) / (|\text{grad} f_2| |\text{grad} f_0|))$$

в точке $M_0 \in L(f_i(x, y, z) = 0$ – уравнение поверхности S_i ($i = \overline{0, 2}$)) с помощью представлений (11), (12). В результате приходим к системе уравнений

$$A_1 = A_0, \quad B_1 = B_0, \quad g_{01}^0 \partial B_0 / \partial \theta + g_{02}^0 A_0 = g_{11}^0 \partial B_1 / \partial \theta + g_{12}^0 A_1 \quad (13)$$

$$h_{01}^0 B_0 + h_{02}^0 \partial A_0 / \partial \theta = h_{11}^0 B_1 + h_{12}^0 \partial A_1 / \partial \theta$$

$$C_1 = C_0, \quad \gamma \partial C_0 / \partial \theta = \partial C_1 / \partial \theta \quad (14)$$

$$\gamma = \mu_0 / \mu_1, \quad g_{01}^0 = \gamma \mu_{00} / 2, \quad g_{02}^0 = \gamma [1 + (m + 1)\nu_0 / (1 - 2\nu_0)]$$

$$g_{11}^0 = \mu_{01} / 2$$

$$g_{12}^0 = 1 + (m + 1)\nu_1 / (1 - 2\nu_1), \quad h_{01}^0 = \gamma(m - 1), \quad h_{02}^0 = \gamma$$

$$h_{11}^0 = m - 1, \quad h_{12}^0 = 1, \quad \mu_{0i} = 2(1 - \nu_i) / (1 - 2\nu_i)$$

Подставляя представления (11), (12) в (13), (14), получим системы однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $a_i(s)$, $b_i(s)$, $c_i(s)$,

$d_i(s), e_i(s), f_i(s)$ ($i = \overline{0, 1}$). Приравнивая нулю определители таких систем, получаем сингулярные характеристические уравнения для определения $m(s), m_3(s)$:

$$\begin{aligned} \sin m\omega &= \pm m \sin \omega, \quad \mu^* \sin m\omega = \pm m \sin \omega, \quad m_3 = \pi/\omega \\ \mu^* &= (\kappa_1 \gamma - \kappa_0)/(1 - \gamma), \quad \omega(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s) \end{aligned} \quad (15)$$

совпадающие в случае плоской кривой с известными [12].

Устанавливая локальные поля напряжений и смещений на основе представлений (8), (11), (12) и решений полученных систем алгебраических уравнений, находим, что они совпадают с приведенным распределением напряжений и смещений в работе [12], где необходимо заменить θ_1 и θ_2 на $\theta_1(s), \theta_2(s)$ соответственно и являются суперпозицией полей плоской деформации и продольного сдвига (здесь не выписаны).

Таким образом, в случае неподвижной поверхности раздела сред с особой линией распределение локальных напряжений и смещений вблизи особой линии одинаково как при динамических, так и при статистических нагрузках.

В частном случае трещин ($\mu_1 = 0, \omega(s) = 2\pi$) этот результат согласуется с данными [13, 14].

Выполнение уравнений равновесия (4) в особой линии необходимо приводит к системе дифференциальных уравнений (9) и уравнению (10) не содержащих производных по переменной t , такая задача разрешима для установившегося режима.

Численный анализ корней характеристических уравнений (15), определяющих порядок особенностей локальных динамических напряжений вблизи неподвижного включения, приведен в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисюк И.Т. Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1992. Т. 28. № 4. С. 76–81.
2. Денисюк И.Т. Особенность напряжений анизотропной пластинки с угловым вырезом // Прикл. механика. 1996. Т. 32. № 1. С. 48–52.
3. Барабаш С.С., Денисюк И.Т. Поздовжній зсув анизотропного тіла з кутовими вкрапленнями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1996. Т. 32. № 4. С. 86–90.
4. Денисюк И.Т. Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 148–155.
5. Денисюк И.Т. Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 140–148.
6. Денисюк И.Т. Напряжения анизотропной пластинки с угловыми включениями // Прикл. механика. Т. 35. 1999. № 2. С. 76–84.
7. Денисюк И.Т. Поздовжній зсув анизотропного тіла з пружними смугами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1997. Т. 33. № 1. С. 51–56.
8. Денисюк И.Т. Термонапруження в анізотропній пластині з кутовими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1999. Т. 35. № 3. С. 59–68.
9. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
10. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз, 1958. 244 с.
11. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука. 1981. 688 с.
12. Денисюк И.Т. Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 64–70.
13. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 502 с.
14. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.