

УДК 539.3

© 2003 г. М.Ф. МЕХТИЕВ, Н.А. САРДАРОВА, Н.И. ФОМИНА

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛОГО КОНУСА**

На основе одного из вариантов асимптотического метода, опирающегося на однородные решения уравнений анизотропной теории упругости, исследуется поведение решений осесимметричных краевых задач как во внутренней части оболочки, так и вблизи краев оболочки. Получено асимптотическое разложение однородных решений для трансверсально-изотропной конической оболочки переменной толщины, позволяющее рассчитать напряженно-деформированное состояние при различных граничных условиях на торцах конуса. На основании качественного анализа разъясняется характер напряженно-деформированного состояния.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса переменной толщины (фигура).

Отнесем конус к сферической системе координат $r_1 \leq r \leq r_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

В осесимметричном случае уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}
 & b_{11} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u_r}{\partial \rho} \right) + \frac{2}{\rho^2} (b_{12} - b_{22} - b_{23}) u_r + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \\
 & + \left(\frac{b_{12} + 1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1}{\rho^2} \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) = 0 \\
 & \left(\frac{b_{12} + 1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{b_{12} + b_{23} + 2}{\rho^2} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \right) + \\
 & + b_{22} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta u_\theta \right) + \frac{b_{12} - b_{23} - 2}{\rho^2} u_\theta = 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь b_{ij} – материальные константы; $E, E_1, G, G_1, \nu, \nu_1, \nu_2$ – технические константы материала оболочки

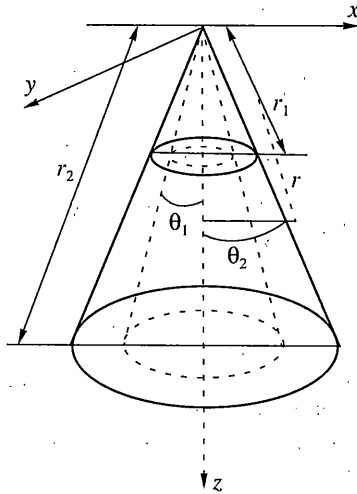
$$mb_{11} = (1 - \nu^2) E_0 G_0, \quad mb_{22} = 2G_0(1 - \nu_1 \nu_2)$$

$$mb_{12} = 2(1 - \nu) \nu_1 G_0, \quad mb_{23} = 2G_0(\nu - \nu_1 \nu_2)$$

$$E_0 = E^{-1} E_1, \quad G_0 = G G_1^{-1}, \quad r = r_1 \rho, \quad m = 1 - \nu - 2\nu_1 \nu_2$$

Предположим, что со стороны конических поверхностей на оболочку действует нагрузка

$$\sigma_\theta = \sigma_n(r), \quad \tau_{r\theta} = \tau_n(r) \quad \text{при} \quad \theta = \theta_n \quad (n = 1, 2). \tag{1.2}$$



А на остальной части границы выполняются следующие граничные условия:

$$\sigma_r = f_{1s}(\theta), \quad \tau_{r\theta} = f_{2s}(\theta) \quad \text{при} \quad \rho = \rho_s \quad (s = 1, 2) \quad (1.3)$$

где $f_{1s}(\theta)$ – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям равновесия.

Неоднородными решениями будем называть частное решение уравнений равновесия (1.1), которое удовлетворяет на боковых поверхностях оболочки неоднородным граничным условиям (1.2).

Для построения неоднородных решений можно использовать приемы, предложенные в [2, 3]. Однако на этом останавливаться не будем, так как здесь строятся однородные решения, оставляющие боковую часть границы свободной от напряжений.

2. Построим однородные решения. Положим в (1.2) $\sigma_n = \tau_n = 0$. Отыскивая решение задачи (1.1), (1.3) в виде

$$u_r = \rho^{z-1/2} u(\theta), \quad u_\theta = \rho^{z-1/2} v(\theta)$$

получаем следующую несамосопряженную спектральную задачу:

$$u'' + \text{ctg} \theta u' + [b_{11}(z^2 - 1/4) + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})]u + [(b_{12} + 1)(z - 1/2) + b_{12} - b_{22} - b_{23}](v' + \text{ctg} \theta v) = 0 \quad (2.1)$$

$$[(b_{12} + 1)(z - 1/2) + b_{22} + b_{23} + 2]u' + b_{22} \left(v'' + \text{ctg} \theta v' - \frac{1}{\sin^2 \theta} v \right) + [z^2 - 1/4 + b_{22} - b_{23} - 2]v = 0$$

$$\{ [b_{12}(z - 1/2) + b_{22} + b_{23}]u + b_{22}v' + b_{23} \text{ctg} \theta v \}_{\theta = \theta_n} = 0 \quad (2.2)$$

$$[u' + (z - 1/2)v]_{\theta = \theta_n} = 0$$

Для построения общего решения системы (2.1) будем отыскивать $u(z, \theta)$, $v(z, \theta)$ в следующем виде:

$$u = AT_\gamma(\theta), \quad v = B \frac{dT_\gamma}{d\theta} \quad (2.3)$$

где A, B – постоянные, функции $T_\gamma(\theta)$ удовлетворяет уравнению Лежандра

$$T_\gamma''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta T_\gamma'(\theta) + \gamma(\gamma + 1)T_\gamma(\theta) = 0 \quad (2.4)$$

После подстановки (2.3) в (2.1) с учетом (2.4) получаем

$$u = A_1 \Psi_{\gamma_1}(\theta) + A_2 \Psi_{\gamma_2}(\theta), \quad v = b_0 \left[\frac{d\Psi_{\gamma_1}}{d\theta} + \frac{d\Psi_{\gamma_2}}{d\theta} \right] \quad (2.5)$$

где γ_1, γ_2 – произвольные корни характеристического уравнения (все возможные случаи возникающие здесь рассматриваются ниже):

$$\begin{aligned} & b_{22}\gamma^2(\gamma + 1)^2 - [(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12})(z^2 - 1/4) + 2b_{22} + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})] \times \\ & \times (G_0 - 1)\gamma(\gamma + 1) + b_{11}(z^2 - 1/4)^2 + 2[b_{11}(G_0 - 1) + b_{12} - b_{22} - b_{23}](z^2 - 1/4) + \\ & + 4(b_{12} - b_{22} - b_{23})(G_0 - 1) = 0 \\ & \Psi_\gamma(\theta) = C_\gamma P_\gamma(\cos \theta) + B_\gamma Q_\gamma(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$A_i = -b_{22}\gamma_i(\gamma_i + 1) + z^2 - 1/4 + 2(G_0 - 1) \quad (i = 1, 2)$$

$$b_0 = -[(b_{12} + 1)(z - 1/2) + b_{22} + b_{23} + 2]$$

Здесь C_γ, B_γ – произвольные постоянные, функции $P_\gamma(\cos \theta), Q_\gamma(\cos \theta)$ – являются линейно независимыми решениями уравнений Лежандра.

Удовлетворяя однородные граничные условия (2.2), получаем следующее характеристическое уравнение относительно спектрального параметра z :

$$\begin{aligned} D(z, \theta_1, \theta_2) = & 2d_{11}d_{22}C_{11}C_{12}\sin^{-1}\theta_1\sin^{-1}\theta_2 + \\ & + d_{11}d_{22}C_{11}C_{12}[D_{\gamma_1}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2)D_{\gamma_2}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2) + D_{\gamma_1}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2)D_{\gamma_2}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2)] - \\ & - C_{11}^2d_{22}^2D_{\gamma_1}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2)D_{\gamma_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - C_{12}^2d_{11}^2D_{\gamma_2}^{(0,0)}(\theta_1, \theta_2)D_{\gamma_1}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - \\ & - C_{13}^2(d_{22} - d_{11})^2\operatorname{ctg}\theta_1\operatorname{ctg}\theta_2D_{\gamma_1}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2)D_{\gamma_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - \\ & - C_{13}C_{11}d_{22}(d_{22} - d_{11})[\operatorname{ctg}\theta_1D_{\gamma_1}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + \operatorname{ctg}\theta_2D_{\gamma_2}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2)] \times \\ & \times D_{\gamma_2}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) - C_{12}C_{13}d_{11}(d_{22} - d_{11})[\operatorname{ctg}\theta_1D_{\gamma_2}^{(1,0)}(\theta_1, \theta_2) + \\ & + \operatorname{ctg}\theta_2D_{\gamma_2}^{(0,1)}(\theta_1, \theta_2)]D_{\gamma_1}^{(1,1)}(\theta_1, \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$C_{ii} = \left[b_{12}\left(z - \frac{1}{2}\right) + b_{22} + b_{23} \right] A_i - \gamma_i(\gamma_i + 1)b_{22}b_0 \quad (i = 1, 2)$$

$$C_{13} = -(b_{22} - b_{23})b_0, \quad d_{ii} = A_i + \left(z - \frac{3}{2}\right)b_0 \quad (i = 1, 2)$$

$$D_z^{(s,l)}(\theta, \Psi) = P_z^{(s)}(\cos \theta)Q_z^{(l)}(\cos \Psi) - P_z^{(s)}(\cos \Psi)Q_z^{(l)}(\cos \theta) \quad (s, l = 0, 1)$$

Левая часть уравнения (2.7), как целая функция параметра z_k имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности. Для эффективного изучения его кор-

ней, как и в изотропном случае [4, 5], предположим, что оболочка тонкостенная. Положим

$$\theta_1 = \theta_0 - \varepsilon, \quad \theta_2 = \theta_0 - \varepsilon \quad (2.8)$$

где θ_0 – угол раствора срединной поверхности оболочки, ε – безразмерный параметр, характеризующий ее толщину. Будем ниже предполагать, что ε – малый параметр, $0 < \xi_1 < \theta_0 < \xi_2 < \pi/2$ (ξ_1, ξ_2 некоторые постоянные). Случай, когда $\theta_0 = \pi/2$, соответствует плите переменной толщины и здесь рассматриваться не будет.

Подставляя (2.8) в (2.7), получаем

$$D(z, \varepsilon, \theta_0) \equiv \Delta(z, \theta_1, \theta_2) = 0 \quad (2.9)$$

Можно показать, что $D(z, \varepsilon, \theta_0)$ является четной функцией как z так и ε . Относительно нулей функции $D(z, \varepsilon, \theta_0)$ докажем следующее утверждение: функция $D(z, \varepsilon, \theta_0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет три группы нулей со следующими асимптотическими свойствами:

- (a) первая группа состоит из двух нулей $z_1 = 1/2, z_2 = -1/2$;
 - (b) вторая группа состоит из четырех нулей, которые имеют порядок $O(\varepsilon^{-1/2})$;
 - (c) третья группа содержит счетное множество нулей, которые имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$.
- Приведем схему доказательства этого утверждения. Разложим $D(z, \varepsilon, \theta_0)$ в ряд по ε :

$$\begin{aligned} D(z, \varepsilon, \theta_0) = & 2^{-1} C_{13}^2 (d_{22} - d_{11})^2 (1 - \nu)^2 E_0 G_0^{-1} b_{22}^{-1} [z^2 + 2(G_0 - 1)] \times \\ & \times (z^2 - 1/4) \varepsilon^2 \{ 2(1 - \nu_1 \nu_2) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 + 1/3 \{ 2E_0 z^4 + \\ & + [8\nu_1 - 5E_0 - 4 - 8(1 + \nu)(G_0 - \nu_2)E_0 \operatorname{ctg}^2 \theta_0] z^2 + 6\nu_1(\nu_2 - 1) - 8\nu_2 + 5 + 2E_0^{-1} + \\ & + 9/8 E_0 + [10(1 - \nu_1 \nu_2) + 2(1 + \nu)(G_0 - \nu_2)E_0] \operatorname{ctg}^2 \theta_0 + 18(1 - \nu_1 \nu_2) \operatorname{ctg}^4 \theta_0 \} \varepsilon^2 + \\ & + 1/45 [-16E_0^2(1 + \nu)(G_0 - \nu_2)(1 - \nu_1 \nu_2)^{-1} z^6 \dots] \varepsilon^4 + \dots \} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отсюда видно, что $z = \pm 1/2$ являются нулями функции $D(z, \varepsilon, \theta_0)$. Отметим, что существование этих нулей также следует из условия равновесия конуса.

Аналогично изотропному случаю [5] можно доказать, что все остальные нули функции $D(z, \varepsilon, \theta_0)$ неограниченно возрастают, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Их можно разбить на две группы в зависимости от поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$: (a) $\varepsilon z_k \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; (b) $\varepsilon z_k \rightarrow \operatorname{const}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon z_k \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этих целей опять используем разложение (2.10).

Как и в изотропном случае [5], нули второй группы имеют следующее асимптотическое разложение:

$$z_k = \alpha_{k0} / \sqrt{\varepsilon} + \alpha_{k1} \sqrt{\varepsilon} + \dots \quad (k = 3, 4, 5, 6)$$

$$\alpha_{k0}^4 + 3(1 - \nu_1 \nu_2) E_0^{-1} \operatorname{ctg}^2 \theta_0 = 0 \quad (2.11)$$

$$\alpha_{k1} = (40\alpha_{k0})^{-1} [24(1 + \nu)(G_0 - \nu_2) \operatorname{ctg}^2 \theta_0 + 5(4 + 5E_0 - 8\nu_1) E_0^{-1}]$$

Для построения асимптотики нулей третьей группы отыскиваем z_n ($n = k - 6, k = 7, 8, \dots$) в виде

$$z_n = \varepsilon^{-1} \delta_n + O(\varepsilon) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.6) имеем

$$\begin{aligned} \tau^2 - 2q_1 \delta_n^2 \tau + q_2 \delta_n^4 &= 0, \quad \gamma_i = \sqrt{\tau_i} \\ \tau_i^2 &= \delta_n^2 S_i, \quad S_i = \sqrt{q_1 - (-1)^i \sqrt{q_1^2 - q_2}} \quad (i=1,2) \\ 2q_1 &= b_{22}^{-1}(b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - 2b_{12}), \quad q_2 = b_{11}b_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Как было отмечено в [6, 7], в зависимости от характеристик материала ν, ν_1, ν_2, G_0 параметры q_1, q_2 принимают различные значения, что влечет за собой различные записи решений через функции Лежандра. Это в свою очередь приводит к различным асимптотическим представлениям функции Лежандра.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

$$1. q_1 > 0, q_1^2 - q_2 > 0, \gamma_{1,2} = \pm S_1 \delta_n, \gamma_{3,4} = \pm S_2 \delta_n$$

$$S_{1,2} = \sqrt{q_1 \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \kappa \pm i\beta = \sqrt{q_1 \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

2. Корни характеристического уравнения (2.13) кратные

$$\gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm \delta_n p, \quad q_1 > 0, \quad q_1^2 - q_2 = 0, \quad p = \sqrt{q_1}$$

$$3. q_1 < 0, q_1^2 - q_2 \neq 0, \gamma_{1,2} = \pm i\delta_n S_1, \gamma_{3,4} = \pm i\delta_n S_2$$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm \sqrt{q_1^2 - q_2}}, \quad q_1^2 > q_2$$

$$S_{1,2} = \sqrt{|q_1| \pm i\sqrt{q_2 - q_1^2}}, \quad q_1^2 < q_2$$

$$4. q_1 < 0, q_1^2 - q_2 = 0, \gamma_{1,2} = \gamma_{3,4} = \pm i\delta_n p, \quad p = \sqrt{|q_1|}$$

В случаях 1, 2 после подстановки (2.12) в (2.7) и преобразования его с помощью асимптотических разложений $P_z(\cos\theta), Q_z(\cos\theta)$ для δ_n получаем

$$(S_2 - S_1) \sin(S_1 + S_2) \delta_n \pm (S_1 + S_2) \sin(S_2 - S_1) \delta_n = 0 \quad (2.14)$$

$$\kappa \sin 2\beta \delta_n \pm \beta \operatorname{sh} 2\kappa \delta_n = 0 \quad (2.15)$$

$$\sin 2P \delta_n \pm 2P \delta_n = 0 \quad (2.16)$$

Что касается случаев 3 и 4, то для них результаты получаются из случаев 1 и 2 формальной заменой S_1, S_2 на iS_1, iS_2 . Эти уравнения совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных плит [6, 7].

В [8] получена асимптотика для корней таких уравнений.

Предполагая что ε является малым параметром, приведем асимптотическое построение однородных решений, соответствующих различным группам корней характеристического уравнения.

Для $z_1 = 1/2$ получаем следующие выражения:

$$u_r = C_0 \cos \theta, \quad u_\theta = -C_0 \sin \theta, \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.17)$$

Таким образом, этому соответствует перемещение канонического тела, как твёрдого тела.

Полагая $\theta = \theta_0 + \varepsilon \eta - 1 \leq \eta \leq 1$ и раскладывая по малому параметру ε , решение, соответствующее нулю $z_2 = -1/2$, представим в виде

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{r_1 C_1}{\rho} [\cos \theta_0 + 2(v_1 - 1)\eta \sin \theta_0 \varepsilon + O(\varepsilon^2)] \\ u_r &= \frac{2r_1(v_1 - 1)}{\rho} C_1 [\sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0 \varepsilon + O(\varepsilon^2)] \\ \sigma_r &= \frac{-2(1 + \nu)(v_1/\nu_2)GC_1}{\rho^2} [\cos \theta_0 + O(\varepsilon)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\sigma_\varphi = O[\varepsilon], \quad \sigma_\theta = O(\varepsilon^2), \quad \tau_\theta = O(\varepsilon^2)$$

В первом члене асимптотики это решение соответствует чистому растяжению вдоль оси конуса и в изотропном случае совпадает с известным решением Митчела – Нейбера [5].

Решение, соответствующее второй группе нулей, представим в виде

$$u_r = r_1 \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{1/2} \sum_{k=3}^6 C_k U_k(\varepsilon, \eta, \rho), \quad u_\theta = \frac{r_1}{\sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 C_k v_k(\varepsilon, \eta, \rho)$$

$$\sigma_r = \frac{G}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 C_k Q_{rk}(\varepsilon, \eta, \rho), \quad \sigma_\varphi = \frac{G}{\rho \sqrt{\rho}} \sum_{k=3}^6 C_k Q_k(\varepsilon, \eta, \rho)$$

$$\tau_\theta = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \sigma_\theta = O(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} U_k(\varepsilon, \eta, \rho) &= \left\{ 2 \frac{v_1}{v_2} \alpha_{k0}^3 \eta + 2v_1 \alpha_{k0} \operatorname{ctg} \theta_0 + \left[\alpha_{k1} \ln \rho \left(\frac{v_1}{v_2} \alpha_{k0}^3 + v_1 \alpha_{k0} \operatorname{ctg} \theta_0 \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + (v_1 - 2) \operatorname{ctg} \theta_0 - 3 \frac{v_1}{v_2} \alpha_{k0}^2 \eta \right] \sqrt{\varepsilon} + \dots \right\} \exp\left(\frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$v_k(\varepsilon, \eta, \rho) = -\frac{v_1}{v_2} \alpha_{k0}^2 [2 + \alpha_{k1} \ln \rho \sqrt{\varepsilon} + \dots] \exp\left(\frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right)$$

$$Q_{rk}(\varepsilon, \eta, \rho) = \left[-6 \frac{v_1}{v_2} (1 + \nu) \eta \operatorname{ctg} \theta_0 + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right)$$

$$Q_{\varphi k}(\varepsilon, \eta, \rho) = \left[-6v_1(1 + \nu) \eta \operatorname{ctg} \theta_0 + (2\nu v_1^2 + 2v_1^2 + v_1 v_2 - 1) \frac{G_0}{m} \alpha_{k0}^2 \operatorname{ctg} \theta_0 + O(\sqrt{\varepsilon}) \right] \exp\left(\frac{\alpha_{k0}}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \rho\right)$$

Рассмотрим третью группу нулей. В этом случае, используя первый член асимптотики функции Лежандра для перемещений и напряжений в первом приближении,

получаем два класса решений, первый из которых соответствует нулям функции $(S_2 - S_1)\sin(S_1 + S_2)\delta_n + (S_1 + S_2)\sin(S_2 - S_1)\delta_n$, а второй – нулям функции $(S_2 - S_1)\sin(S_1 + S_2)\delta_n - (S_1 + S_2)\sin(S_2 - S_1)\delta_n$.

Они имеют одинаковую структуру и могут быть представлены следующими выражениями (здесь приводятся значения перемещений; напряжения могут быть найдены с помощью обобщенного закона Гука):

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n [S_2(b_{22}S_2^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{12})\sin S_2\delta_n \cos S_1\delta_n \eta - S_1(b_{22}S_1^2 + b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{12})\sin S_1\delta_n \cos S_2\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (2.20)$$

$$u_\theta = \frac{1}{\sqrt{\rho}} S_1 S_2 \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n [(b_{22}S_2^2 + b_{12})\sin S_2\delta_n \sin S_1\delta_n \eta - (b_{22}S_1^2 + b_{12})\sin S_1\delta_n \sin S_2\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

Аналогично в случае $\kappa \sin 2\beta\delta_n \pm \beta \operatorname{sh} 2\kappa\delta_n = 0$ имеем

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \varepsilon \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n [(a_1\Delta_{1n} - a_2\Delta_{2n})\cos \beta\delta_n \eta \operatorname{ch} \kappa\delta_n \eta - (a_1\Delta_{2n} - a_2\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n \eta \operatorname{sh} \kappa\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

$$u_\theta = (b_{12} + 1) \frac{\varepsilon}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} D_n [(\beta\Delta_{2n} - \kappa\Delta_{1n})\cos \beta\delta_n \eta \operatorname{sh} \kappa\delta_n \eta + (\kappa\Delta_{2n} - \beta\Delta_{1n})\sin \beta\delta_n \eta \operatorname{ch} \kappa\delta_n \eta + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (2.21)$$

$$a_1 = 1 - b_{22}(\kappa^2 - \beta^2), \quad a_2 = 2b_{22}\kappa\beta$$

$$\Delta_{1n} = \kappa [b_{12} + b_{22}(\kappa^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n \operatorname{ch} \kappa\delta_n + \beta [b_{12} + b_{22}(\kappa^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n \operatorname{sh} \kappa\delta_n$$

$$\Delta_{2n} = -\beta [b_{12} + b_{22}(\kappa^2 + \beta^2)] \sin \beta\delta_n \operatorname{ch} \kappa\delta_n + \kappa [b_{12} + b_{22}(\kappa^2 + \beta^2)] \cos \beta\delta_n \operatorname{sh} \kappa\delta_n$$

В случае, когда $q_1 > 0$ и корни квадратного уравнения (2.13) кратны, решения имеют вид:

$$S_1 = S_2 = p$$

$$u_r = \frac{\varepsilon(b_{12} + 1)'}{\sqrt{\rho}} p \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \delta_n E_n \left\{ \left[\cos p\delta_n + \frac{b_{12}p^2 - b_{11}}{b_{12}p^2 + b_{11}} \frac{\sin p\delta_n}{p\delta_n} \right] \cos p\delta_n \eta + \eta \sin p\delta_n \sin p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right) \quad (2.22)$$

$$u_{\theta} = \frac{\varepsilon(b_{11} + p^2)}{\sqrt{\rho}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \delta_n E_n \left\{ \left[\cos p\delta_n + \frac{2b_{11}(b_{12} + 1)}{(b_{11} - p^2)(b_{12}p^2 + b_{11})} \frac{\sin p\delta_n}{\delta_n} \right] + \right. \\ \left. + \sin p\delta_n \eta - \eta \sin p\delta_n \cos p\delta_n \eta + O(\varepsilon) \right\} \exp\left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \ln \rho\right)$$

где C_k, B_n, D_n, E_n – произвольные постоянные. Выражения для $n = 2, 4, 6, \dots$ получаются из (2.20), (2.21), (2.22) заменой $\cos x$ на $\sin x$ и $\sin x$ на $-\cos x$, $\operatorname{ch} x$ на $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{sh} x$ на $-\operatorname{ch} x$ соответственно.

В формулах (2.20), (2.21), (2.22) заменяя S_1, S_2, p на iS_1, iS_2, ip соответственно, получаем решение для случаев 3 и 4. В работах [6, 7] выполнены исследования корней уравнений (2.14), (2.15) и (2.16) и разработана методика их вычисления. Характер этих корней существенно влияет на общую картину напряженно-деформированного состояния оболочки.

Как было отмечено в [9], в случае существенной анизотропии, имеющей место при больших значениях G_0 , погранслоем Сен-Венана затухает весьма слабо и решения (2.20), (2.21), (2.22) следует причислить к проникающим решениям. Поэтому в этом случае напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной и изотропной оболочки качественно отличаются.

Рассмотрим связь однородных решений с главным вектором напряжений P , действующим в сечении $r = \text{const}$. Имеем

$$P = 2\pi r^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.23)$$

Представим напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ в виде

$$\sigma_r = \sigma_r^{(0)} + r^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{Z_n} Q_{rn}(\theta), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + r^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} r^{Z_n} T_n(\theta) \quad (2.24)$$

Слагаемые $\sigma_r^0, \tau_{r\theta}^0$ соответствуют собственным значениям $z = -1/2$. Во второе слагаемое включены напряжения второй и третьей групп решений. Подставляя (2.24) в (2.23), получаем

$$P = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (2.25)$$

$$P_n = 2\pi r^{1/2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_{rn} \cos \theta - T_n \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

Как и в изотропном случае [5], из условия разрешимости задачи теории упругости получаем, что $P_n = 0$ для любого n .

Таким образом, для главного вектора P получаем

$$P = P_0 = \varepsilon G C_1 [-8(1 + \nu)(\nu_1/\nu_2) \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 + O(\varepsilon)] \quad (2.26)$$

Напряженное состояние, соответствующее нулям второй и третьей групп, является самоуравновешенным в каждом сечении $r = \text{const}$.

Решение (2.18), (2.19) определяют внутреннее напряженно-деформированное состояние оболочки. Первые члены их асимптотических разложений по параметру тонкостенности ϵ определяют безмоментное напряженное состояние. В первом члене асимптотики их можно рассматривать как решение по прикладной теории оболочек.

Напряженное состояние, соответствующее решениям (2.20), (2.21), (2.22) имеет характер пограничного слоя. Первые члены его асимптотического разложения полностью эквивалентны краевому эффекту Сен-Венану трансверсально-изотропной плиты.

3. Суммируя по всем корням характеристического уравнения, однородные решения можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u_r &= r_1 \rho^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} U_n(\rho), & u_\theta &= r_1 \rho^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} v_n(\rho) \\ \sigma_r &= G_1 \rho^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} Q_{rn}(\rho), & \sigma_\phi &= G_1 \rho^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} Q_{\phi n}(\rho) \\ \sigma_{\theta r} &= G_1 \rho^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} Q_{\theta n}(\rho), & \tau_{r\theta} &= G_1 \rho^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{z_n} T_n(\rho) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где C_k – произвольные постоянные.

Рассмотрим вопрос об удовлетворении граничных условий на торцах конуса при помощи класса однородных решений.

Пусть на торцах конуса выполняются условия (1.3). Функции f_{is} ($s = 1, 2; i = 1, 2$) удовлетворяют условиям равновесия

$$2\pi r_1^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_{11} \cos \theta - f_{21} \sin \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi r_2^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_{12} \cos \theta - f_{22} \sin \theta) \sin \theta d\theta = P \quad (3.2)$$

Здесь P – главный вектор усилий, действующих в произвольном сечении $r = \text{const}$. Как было показано выше, несомоуравновешенную часть напряжений (3.1) можно снять при помощи проникающего решения (2.18), причем, связь постоянной C_1 с главным вектором P дается равенством (2.26).

Поэтому будем предполагать, что $P = 0$. Будем отыскивать решение в виде (3.1). Для определения произвольных постоянных C_n ($n = 2, 3, \dots$), вариации которых будем считать независимыми, используем вариационный принцип Лагранжа.

Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на боковой поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму:

$$r_1 \sum_{s=1}^2 \rho_s^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} [(Q_{rn} - f_{1s}) \delta U_n + (T_n - f_{2s}) \delta v_n]_{\rho=\rho_s} \sin \theta d\theta = 0 \quad (3.3)$$

Из (3.3) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} M_{nk} C_n &= N_k \quad (k = 1, 2, \dots) \\ M_{nk} &= \sum_{s=1}^2 \exp(z_n + z_k) \ln \rho_s \int_{\theta_1}^{\theta_2} (Q_{rn} U_k + T_n v_k) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$N_k = \sum_{s=1}^2 \exp(z_n + 3/2) \ln p_s \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f_{1s} U_k + f_{2s} v_k) \sin \theta d\theta$$

Используя формулы (2.19)–(2.22), можно построить асимптотическое решение [7] системы (3.4). Этот подход общеизвестен, поэтому здесь на этом подробно останавливаться не будем.

Отметим, что при $G_0 = 1$ получаем известные результаты для изотропного случая [4, 5].

Авторы выражают благодарность рецензенту за сделанные замечания, способствующие улучшению содержания работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
2. Мехтиев М.Ф. Построение уточненных прикладных теорий для усеченного полого конуса переменной толщины // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1972. Вып. 4. С. 17–21.
3. Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф. Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного конуса // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 113–119.
4. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для полого конуса // 7^я Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С. 425–427.
5. Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А. Асимптотическое исследование решения задачи теории упругости для полого конуса // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 6. С. 1108–1115.
6. Шленев М.А. О корнях характеристического уравнения теории трансверсально-изотропных плит // Пластины и оболочки. Ростов н/Д: 1975. С. 282–290.
7. Космодамианский С.А., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. Киев: Наук. думка, 1978. 239 с.
8. Лидский В.Б., Садовничий В.А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб. 1968. Т. 75. № 4. С. 556–566.
9. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // 1^я Всес. шк. по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: 1975. С. 51–149.
10. Амбарицумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.

Баку

Поступила в редакцию
3.08.2000