

УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СМАЗКА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РОЛИКА СО СКРУГЛЕННЫМ КРАЕМ

Надежность роликоподшипников в значительной мере зависит от распределения контактных напряжений на торце ролика, снижение которых достигается скруглением осевого профиля в торцевой части. В этом случае для определения контактных напряжений необходимо решить задачу о сжатии упругих тел сложной формы. Численные исследования, выполненные в [1–4] для сухого контакта, показали, что контактное напряжение резко нарастает вблизи торцевой кромки цилиндрических роликов, однако профилированием ролика в концевой зоне этот эффект может быть значительно ослаблен или совсем исключен.

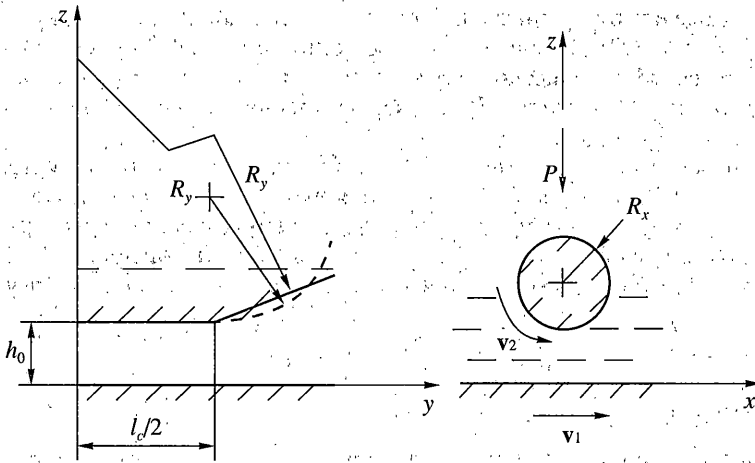
Существенно меньше исследованы профилированные ролики, функционирующие в типичном для многих узлов трения (таких, например, как зубчатые передачи и подшипники качения) режиме упругогидродинамической (УГД) смазки. Это связано, главным образом, с трудностями осуществления устойчивого вычислительного процесса при решении данной УГД задачи, особенно в случае тяжелого нагружения. Применительно к условиям умеренного нагружения ряд результатов численного решения УГД задачи для цилиндрического ролика с торцевым скруглением представлен в [5]. Из решения, полученного методом нижней релаксации, в частности, следовало, что в торцевой зоне давления выше, чем в случае сухого контакта.

Цель настоящей работы состояла в исследовании УГД смазки короткого цилиндрического ролика при различных значениях параметра скругления торца (отношение радиуса цилиндрической части к радиусу скругления торца в осевом направлении) и сопряжении цилиндрической части со скругленным краем как негладким, так и гладким образом. Вычислительный алгоритм сформулированной задачи основан на методе Ньютона для решения системы нелинейных интегродифференциальных уравнений, описывающих УГД контакт.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарная изотермическая задача об УГД контакте короткого цилиндрического ролика со скруглением в торцевой части. На фиг. 1 схематично показана половина симметричного относительно плоскости xz ролика, в торцевой части которого сопряжение цилиндрической части со скругленным краем осуществлено как негладким, так и гладким образом. Эти два типа сопряжения выбраны с целью продемонстрировать влияние на параметры УГД контакта возможного отклонения сопряжения от гладкого. Полагается, что подобный контакт реализуется при качении со скольжением упругого ролика по гладкой поверхности упругого полупространства, при этом контактирующие тела разделены слоем смазки со свойствами несжимаемой вязкой жидкости. В задаче используются типичные допущения УГД теории смазки [6]. Введем безразмерные переменные

$$(x', y') = \frac{(x, y)}{a_H}, \quad l'_c = \frac{l_c}{a_H}, \quad p' = \frac{p}{P_H}, \quad h' = \frac{h}{h_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad H_0 = \frac{2R_x h_0}{a_H^2}, \quad \varepsilon = \frac{R_x}{R_y}$$

$$V = \frac{24\mu_0 |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2| R_x^2}{P_H a_H^3}, \quad P' = \frac{P}{P_H a_H^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|}$$



Фиг. 1

где x, y – декартовы координаты в плоскости контакта; R_x, R_y – радиусы кривизны; ε – параметр скругления торцевой части; p – давление в смазочной пленке; a_H – полуширина герцевского линейного контакта; p_H – максимальное герцевское напряжение в линейном контакте; P – внешняя нагрузка; h – толщина смазочной пленки (зазор); h_0 – толщина смазочной пленки в начале координат; μ – вязкость смазки; μ_0 – вязкость смазки при давлении окружающей среды; $v_1(v_{1x}, v_{1y}), v_2(v_{2x}, v_{2y})$ – векторы и компоненты скоростей контактирующих поверхностей; H_0 – безразмерная толщина пленки в начале координат; V – нагрузочно-скоростной параметр; l_c – длина цилиндрической части ролика.

Уравнения УГД задачи в безразмерных переменных имеют вид (далее штрихи опущены)

$$L(p) = \nabla \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$h(x, y) = 1 + \frac{x^2 + f(y)\theta(|y|)\varepsilon}{H_0} + \frac{1}{\pi H_0} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.2)$$

$$M(p) = \frac{\pi}{2} l_c - \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.3)$$

$$p|_C = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{C_e} = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad \theta(|y|) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \geq l_c/2 \\ 0 & \text{при } |y| < l_c/2 \end{cases}$$

где C – граница области контакта Ω , C_e – выходная граница (часть границы области контакта, на которой $(\mathbf{v}\mathbf{n}) > 0$), \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали. В случае негладко-

го сопряжения осевой профиль торцевой части, показанный на фиг. 1, описывается функцией $f(y) = y^2 - (l_c/2)^2$, в случае гладкого сопряжения – функцией $f(y) = (y - l_c/2)^2$. Условие равновесия (1.3) записано в предположении, что сила, приложенная к ролику, равна суммарной силе P на участке l_c в случае бесконечно длинного цилиндра, т.е. в размерных величинах $P = \pi r_H a_H l_c / 2$.

Система (1.1)–(1.4) является нелинейной интегродифференциальной системой, состоящей из уравнения Рейнольдса (1.1), уравнения для определения толщины смазочной пленки между упругими телами (1.2), условия равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (1.3), краевых условий для давления (1.4). Для определения местоположения выходной (свободной) границы используются условия дополнителности [7]:

$$L(p) = 0, \quad p > 0 \tag{1.5}$$

$$L(p) < 0, \quad p = 0 \tag{1.6}$$

Условия (1.5) должны соблюдаться в зоне смазки, а условия (1.6) – в зоне кавитации. Физическое обоснование целесообразности применения этих условий при решении различных УГД задач подробно обсуждено в [7]. Получаемые решения при этом удовлетворяют кавитационному условию на выходной границе (второе условие в (1.4)).

В системе уравнений и неравенств (1.1)–(1.6) заданными считаются геометрия входной границы смазочной пленки, нагрузочно-скоростной параметр V , компоненты вектора скорости $\mathbf{v}(v_x, v_y)$, параметр скругления $\varepsilon = R_x/R_y$ и зависимость $\mu(p)$. В расчетах использовалась зависимость $\mu = \mu_0 \exp(Qp)$, где Q – пьезокоэффициент вязкости (для тяжело нагруженного контакта $Q \gg 1, V \ll 1$). Решением системы являются распределения давления $p(x, y)$, толщины смазочной пленки $h(x, y)$, выходная граница $x_e(y)$ и безразмерная толщина слоя смазки в начале координат H_0 .

2. Численный метод решения. Расчетная область контакта (x, y) задается в виде прямоугольника $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ и покрывается неравномерной разнесенной декартовой сеткой с системой узлов $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Давление определяется в узлах (x_i, y_j) , толщина смазочной пленки – в узлах $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. После интегрирования уравнения (1.1) по области $\Delta\Omega_{ij}$, занимаемой расчетной ячейкой (i, j) внутри контура (l) , получаем

$$L_1(p) = \int_{(l)} \left[H_0^2 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \mathbf{n}) - V(\mathbf{v} \mathbf{n}) h \right] dl = 0 \tag{2.1}$$

В условиях дополнителности (1.5), (1.6) оператор $L(p)$ заменяется на $L_1(p)$.

Решение УГД системы уравнений проводится методом Ньютона. Уравнения (1.3), (1.4), (2.1), линеаризованные около решения $(p(x, y), H_0)_k$, имеют вид

$$\int_{(l)} \left\{ \left[H_0^2 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - V(\mathbf{v} \mathbf{n}) \right]_k \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_k \Delta p_{k+1} + \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \right)_k \frac{\partial \Delta p_{k+1}}{\partial n} - \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial n} \right)_k \Delta p_{k+1} + \left[2H_0 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - V(\mathbf{v} \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial H_0} + H_0^2 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial H_0} \right]_k \Delta H_{0,k+1} \right\} dl = - \int_{(l)} \left[H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - V(\mathbf{v} \mathbf{n}) h \right]_k dl \tag{2.2}$$

$$\int_{\Omega_k} \int \Delta p_{k+1}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{\pi}{2} l_c - \int_{\Omega_k} p_{k+1}(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{2.3}$$

$$\Delta p_{k+1}|_c = 0, \quad \Delta p_{k+1} = p_{k+1} - p_k, \quad \Delta H_{0,k+1} = H_{0,k+1} - H_{0,k} \tag{2.4}$$

Здесь k – номер итерации, $\partial h/\partial H_0$ – частная производная от h по H_0 , вычисляемая по соотношению (1.2); $\partial \mu/\partial p$ – частная производная от μ по p , вычисляемая по зависимости $\mu = \mu_0 \exp(Qp)$; $\partial h/\partial p$ – линейный оператор, действующий на Δp_{k+1} , имеет вид

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right) \Delta p_{k+1} = \frac{1}{\pi H_{0,k}} \iint_{\Omega_k} G(x, y, \xi, \eta) \Delta p_{k+1}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.5)$$

Система уравнений (2.2)–(2.4) является исходной для построения конечноразностной схемы, при этом система разностных уравнений на каждом итерационном шаге имеет следующую структуру

$$\begin{pmatrix} (a_{qr})_{nn} & (b_q)_n \\ (c_r)_n^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_n \\ \Delta H_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_1(p_r)_n \\ M(p_r)_n \end{pmatrix}$$

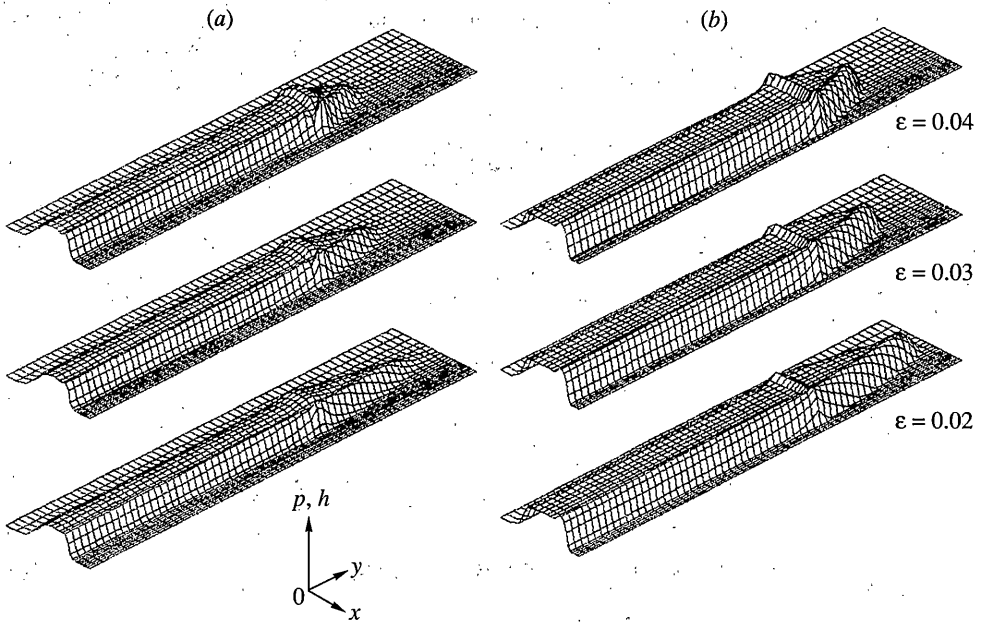
где элементами матрицы Якоби порядка $(n + 1)$ являются полная квадратная матрица $(a_{qr})_{nn}$ порядка n , вектор-столбец $(b_q)_n$ и вектор-строка $(c_r)_n^T$ ($q, r = 1, \dots, n$). Значение n равно числу узлов сетки, в которых определяется давление, и зависит от местоположения выходной границы.

Интеграл в выражениях (1.2), (2.5) вычислялся по кубатурной формуле, применяемой при вычислении сингулярных интегралов [8]:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_{m-1/2} - \xi)^2 + (y_{n-1/2} - \eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \equiv \\ & \equiv \sum_{j=1}^{NY} \sum_{i=i1(j)}^{i2(j)} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_{m-1/2} - x_i)^2 + (y_{n-1/2} - y_j)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_{m0-1/2} - x_i)^2 + (y_{n0-1/2} - y_j)^2}} \right) \times \\ & \times p(x_i, y_j) (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) (y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \end{aligned}$$

где $i1(j)$, $i2(j)$ – целочисленные массивы, описывающие расположение соответственно входной и выходной границ ($m = 1, \dots, NX + 1$; $n = 1, \dots, NY + 1$). Массив $i2(j)$ определяется, исходя из условий дополнителности (1.5), (1.6), на каждой итерации. Узел $(m0-1/2, n0-1/2)$ соответствует началу координат. Один шаг итерационного процесса состоит в решении разностных уравнений относительно $\Delta H_{0,k+1}$, $\Delta p_{k+1}(x_i, y_j)$ методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычисления $H_{0,k+1} = H_{0,k} + \omega \Delta H_{0,k+1}$, $p_{k+1} = p_k + \omega \Delta p_{k+1}$ с учетом коэффициента релаксации ω ($0.05 < \omega < 1$), вычисления $h_{k+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ по соотношению (1.2) и определении выходной границы $x_{e,k}(y_j)$. Коэффициент релаксации ω увеличивался по мере приближения к решению. Итерационный процесс продолжался до достижения требуемой относительной точности решения δ , т.е. $\max(|H_{0,k+1}/H_{0,k} - 1|, |p_{k+1}/p_k - 1|, |h_{k+1}/h_k - 1|, |x_{e,k+1}/x_{e,k} - 1|) < \delta$.

3. Результаты расчетов. Изложенный выше вычислительный алгоритм был применен для расчета УГД контакта цилиндрического ролика, имеющего скругление торцевой части, с упругим полупространством при следующих параметрах: $V = 0.1$, $Q = 3$, $l_c = 20$, $v_x = 1$, $v_y = 0$. Параметры скругления задавались в диапазоне $\epsilon = 0.02-0.04$ для негладкого сопряжения и $\epsilon = 0.1-0.3$ для гладкого сопряжения. Численное моделирование проводилось с учетом симметрии для половины ролика на неравномерной сетке с числом узлов 22×62 . В расчетах относительная точность задавалась, равной $\delta = 0.001$.

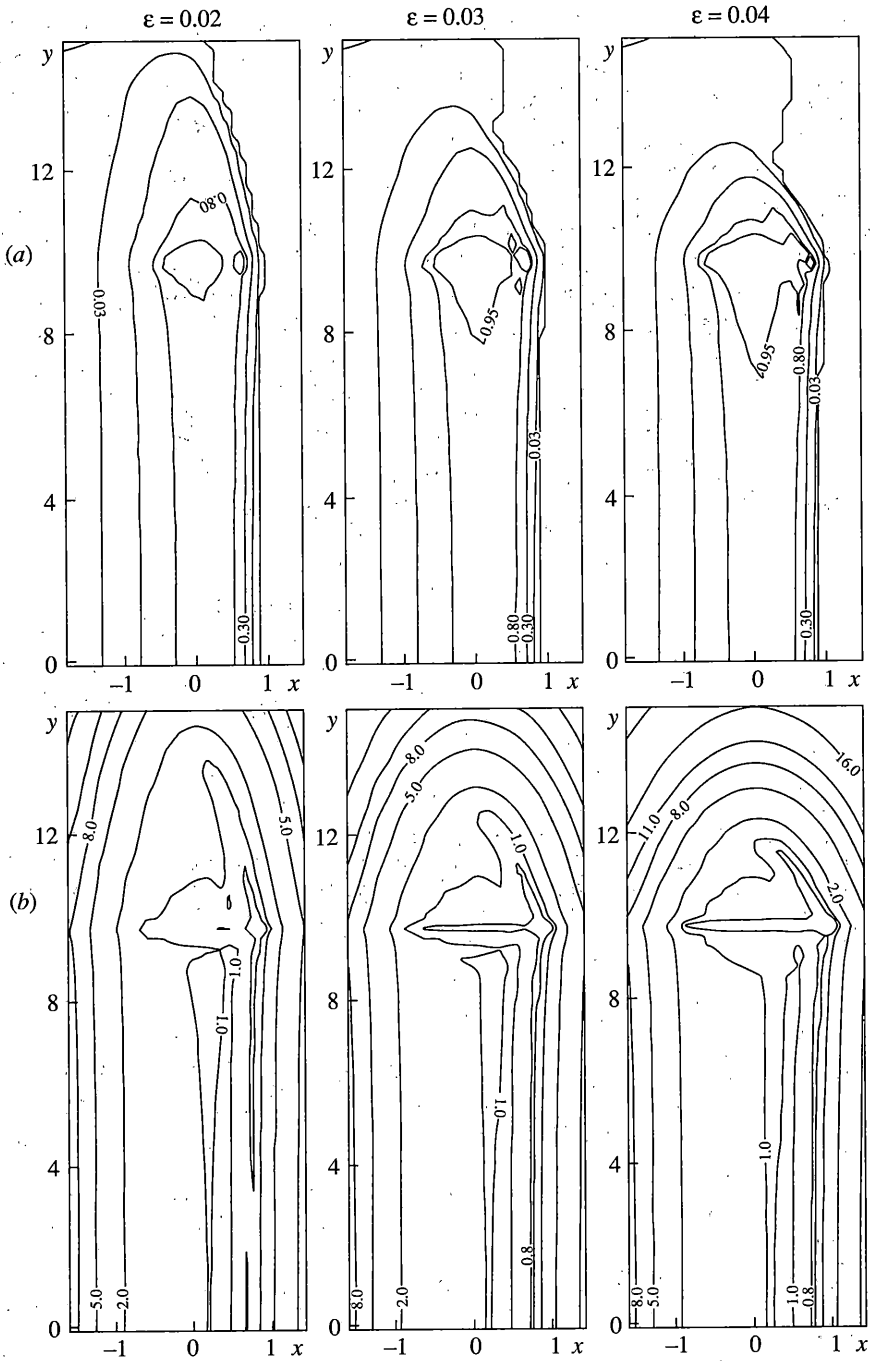


Фиг. 2

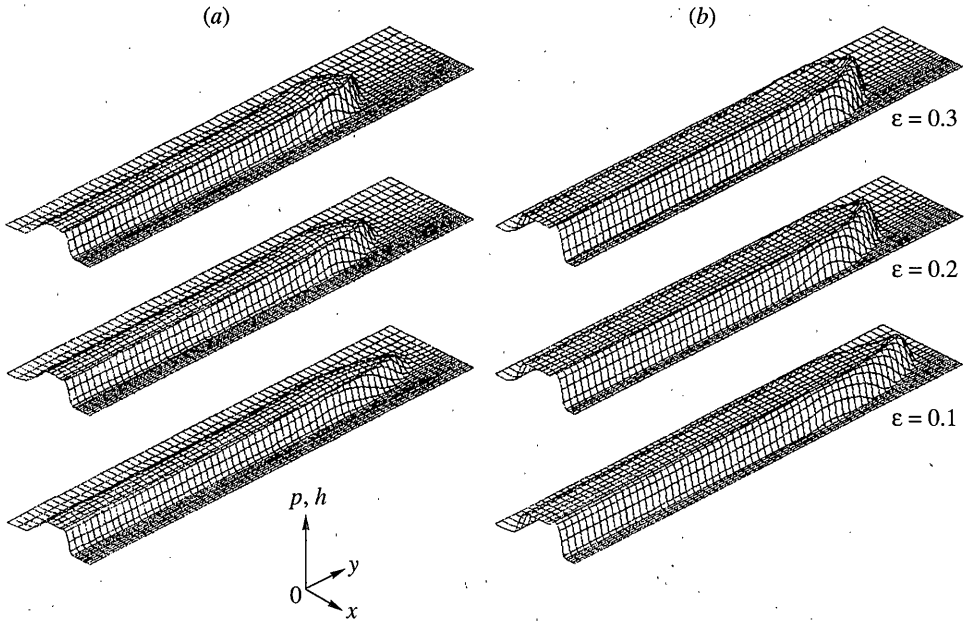
Дальнейшее уменьшение относительной точности (до $\delta = 0.00001$ в ряде предварительных расчетов) практически не влияло на значения вычисляемых величин, существенно увеличивая при этом время счета.

Для случая негладкого сопряжения цилиндрического участка со скругленной торцевой частью распределения давления $p(x, y)$ и толщины смазочной пленки $h(x, y)$ в УГД контакте представлены на фиг. 2, *a, b* соответственно. На фиг. 2, *b* (а также далее на фиг. 4, *b*) распределения толщины смазочной пленки представлены для наглядности в виде функции $-h(x, y)$. Изолинии полученных распределений представлены на фиг. 3, *a, b* соответственно. Видно, что распределения давления и толщины пленки в центральной части ролика имеют вид распределений, типичных для линейного УГД контакта – пик давления и сужение смазочной пленки на выходе из зоны контакта. На распределениях $h(x, y)$ также видно, что имеет место эффект уплощения зазора. Однако с приближением к сечению сопряжения $y = l_c/2$ характер распределений существенно изменяется: давление резко возрастает, а зазор уменьшается. Максимальных значений давление достигает в сечении сопряжения. В этом же сечении толщина смазочной пленки достигает своих минимальных значений. Отмеченные эффекты проявляются все резче по мере увеличения параметра скругления ϵ и увеличения соответственно скачка производной осевого профиля dh/du в сечении сопряжения. Это видно из сопоставления распределений $p(x, y)$ и $h(x, y)$ для трех значений параметра ϵ на фиг. 2, 3. Влияние параметра ϵ на значения толщины смазочной пленки в центре контакта H_0 , минимальной толщины пленки h_{\min} и максимального давления p_{\max} иллюстрирует табл. 1. Характерно, что значения H_0 практически не изменяются с ростом ϵ . При этом значения h_{\min} и p_{\max} изменяются значительно, что наглядно демонстрируют фиг. 2, 3.

Для гладкого сопряжения распределения $p(x, y)$ и $h(x, y)$ показаны на фиг. 4, *a, b* соответственно, а изолинии этих распределений – на фиг. 5, *a, b*. Можно заметить существенное снижение градиентов давления и зазора в окрестности сечения $y = l_c/2$ в срав-



Фиг. 3



Фиг. 4

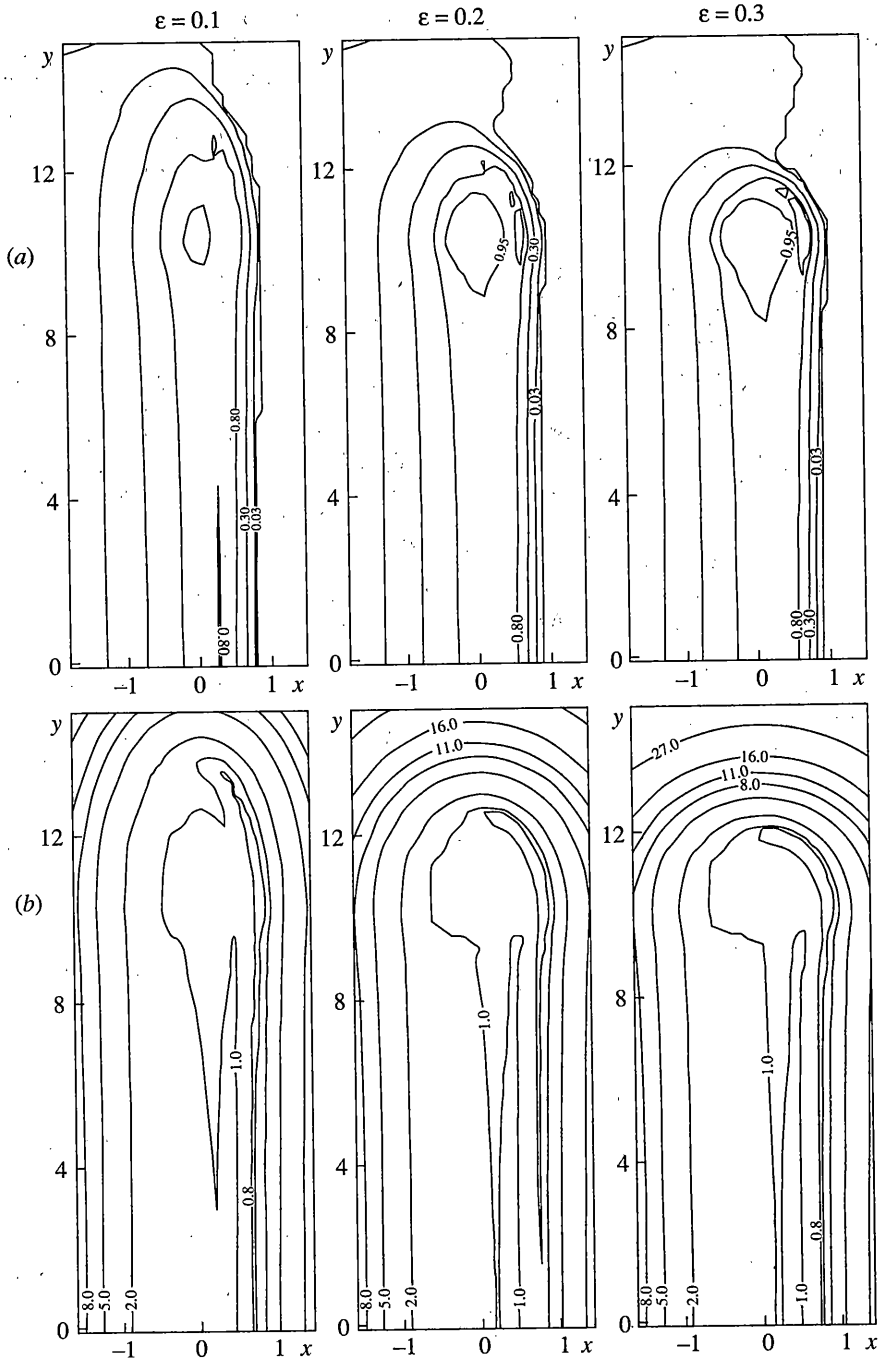
нении с предыдущим случаем. Как и в случае негладкого сопряжения, с увеличением ϵ нарастают значения dp/du и dh/du в окрестности сечения $u = l_c/2$. При $u > l_c/2$ распределения $p(x, u)$ и $h(x, u)$ имеют вид, сходный с распределениями соответствующих величин в эллиптическом УГД контакте. Тенденции изменения значений H_0 , h_{\min} и p_{\max} в зависимости от увеличения параметра ϵ (см. табл. 2) те же, что и в случае негладкого сопряжения (см. табл. 1). В частности, значения H_0 практически не изменяются с ростом параметра ϵ .

Таблица 1

| ϵ | H_0 | h_{\min} | p_{\max} |
|------------|--------|------------|------------|
| 0.02 | 0.1698 | 0.6014 | 1.0992 |
| 0.03 | 0.169 | 0.5369 | 1.3727 |
| 0.04 | 0.1687 | 0.4439 | 1.9875 |

Таблица 2

| ϵ | H_0 | h_{\min} | p_{\max} |
|------------|--------|------------|------------|
| 0.1 | 0.173 | 0.7496 | 0.9801 |
| 0.2 | 0.1696 | 0.6752 | 1.0663 |
| 0.3 | 0.1691 | 0.5963 | 1.1409 |



Фиг. 5

Из расчетов, проведенных при $V = 0.1$, $Q = 3$ и различных значениях l_c для случая гладкого сопряжения со скруглением $\varepsilon = 0.2$, следует, что толщина смазочной пленки H_0 снижается с увеличением l_c : $H_0 = 0.1722$ при $l_c = 10$, $H_0 = 0.1696$ при $l_c = 20$, $H_0 = 0.1684$ при $l_c = 30$. Расчеты, проведенные по методике [9], разработанной для решения одномерных задач УГД смазки (т.е. для линейного УГД контакта), показали, что при тех же V и Q в случае бесконечно длинного цилиндра $H_0 = 0.1622$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hartnett M.J.* The analysis of contact stresses in rolling element bearings // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1979. V. 101. № 1. P. 105–109.
2. *Kannel J.W., Hartnett M.J.* Theoretical and experimental evaluation of edge stresses under severe edge loads // ASLE Trans. 1983. V. 26. № 1. P. 25–30.
3. *de Mul J.M., Kalker J.J., Fredriksson B.* The contact between arbitrarily curved bodies of finite dimensions // Trans. ASME. J. Tribol. 1986. V. 108. № 1. P. 140–148.
4. *Natsumeda S.* Application of multi-level multi-integration to contact problems. Part 1. Non-Hertzian contact in rolling bearings // Proc. Instn Mech. Engrs. J. Engng Tribol. 1999. V. 213. № J1. P. 63–80.
5. *Mostofi A., Gohar R.* Elastohydrodynamic lubrication of finite line contacts // Trans. ASME. J. Lubric. Technol. 1983. V. 105. № 4. P. 598–604.
6. *Dowson D., Higginson G.R.* Elasto-hydrodynamic lubrication. Oxford: Pergamon Press, 1966. 235 p.
7. *Oh K.P.* The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 106. № 1. P. 88–95.
8. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
9. *Айрапетов Э.Л., Кудиш И.И., Пановко М.Я.* Численный метод решения задач смазки тяжело нагруженного упругогидродинамического контакта // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 6. С. 957–964.

Москва

Поступила в редакцию
19.04.2001