МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2003

УДК 531.383

© 2003 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, Т.А. КОЗАЧЕНКО, Д.Д. ЛЕЩЕНКО

ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО И ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТОВ

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, под действием восстанавливающего и возмущающего моментов, медленно изменяющихся во времени. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении для существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном и резонансном случаях. Рассмотрены примеры движения тела под действием конкретного вида восстанавливающего, возмущающего и управляющего моментов сил.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего и возмущающего моментов, зависящих от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, t – время). Уравнения движения имеют вид [1]:

$$
\begin{gathered}
A\dot{p} + (C-A)qr = k(\tau)\sin\theta\cos\varphi + M_1 \\
A\dot{q} + (A-C)pr = -k(\tau)\sin\theta\sin\varphi + M_2 \\
C\dot{r} = M_3, \quad M_l = M_l(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad \tau = \varepsilon t \quad (l = 1, 2, 3) \qquad (1.1) \\
\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi \\
\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{gathered}
$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела, проходящие через точку O; M_l – проекции вектора возмущающего момента на те же оси (они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и являются периодическими функциями углов Эйлера ψ, φ, θ с периодами 2π); A – экваториальный, C – осевой моменты инерции тела для точки O ($A \neq C$). Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от медленного времени, $k(\tau)$. При отсутствии возмущений $M_l = 0$ и $k(\tau) = \text{const}$ уравнения (1.1) отвечают случаю волчка Лагранжа.

Система (1.1) исследуется при условии выполнения предположений

$$
(p^2 + q^2)^{1/2} \ll r, \quad Cr^2 \gg k, \quad |M_{1,2}| \ll k, \quad M_3 \sim k \qquad (1.2)
$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость осевого вращения достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

Неравенства (1.2) позволяют ввести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &p = \varepsilon P, \quad q = \varepsilon Q, \quad k(\tau) = \varepsilon K(\tau), \quad \tau = \varepsilon t \\ &M_{1,2} = \varepsilon^2 M^*_{1,2}(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad M_3 = \varepsilon M^*_3(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ранее рассматривались движения (быстрые вращения) твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием постоянного восстанавливающего момента $k = \text{const}$ [1] и момента, зависящего от угла нутации $k = k(\theta)$ [2]. Исследовалось воздействие возмущающих моментов, обусловленных влиянием сопротивляющейся среды и момента, постоянного в связанных осях.

Ниже исследуется движение твердого тела под действием восстанавливающего и возмущающего моментов, зависящих от медленного времени τ: $k = k(\tau)$ и $M_l(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau)$. Новые переменные P, Q, а также переменные r, ψ, θ, φ, функции K, M_l^* $(l = 1, 2, 3)$ и параметры A, C предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1.1) при малом ε, если выполнены условия (1.2), (1.3), которое будет проводиться методом усреднения [3, 4] на интервале времени порядка ε^{-1}. Метод усреднения широко применялся в задачах динамики твердого тела. Упрощающие предположения (1.2) или (1.3) дают возможность получить в общем случае довольно простую схему усреднения и исследовать ряд примеров.

2. Построение усредненных уравнений движения. Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.3). Сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε, получим

$$\begin{aligned} &A\dot{P} + (C - A)Qr = K(\tau)\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon M_1^* \\ &A\dot{Q} + (A - C)Pr = -K(\tau)\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon M_2^* \\ &C\dot{r} = \varepsilon M_3^*, \quad \dot{\psi} = \varepsilon(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta \\ &\dot{\varphi} = r - \varepsilon(P\sin\varphi + Q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta, \quad \dot{\theta} = \varepsilon(P\cos\varphi - Q\sin\varphi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

По терминологии [3, 4] система (2.1) является двухчастотной и существенно нелинейной.

Рассмотрим сначала систему первого приближения и положим $\varepsilon = 0$ в (2.1). Из последних четырех уравнений находим

$$r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = r_0 t + \varphi_0, \quad K = K(\tau), \quad \tau = \text{const} \tag{2.2}$$

Здесь $r_0, \varphi_0, \theta_0, \varphi_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения (2.1) при $\varepsilon = 0$ и проинтегрируем полученную систему линейных уравнений для P, Q. Получим

$$\begin{aligned} &P = a\cos\gamma + b\sin\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi \\ &Q = a\sin\gamma - b\cos\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi \\ &a = P - KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha, \quad b = -Q + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha \\ &\dot{\gamma} = n, \quad \gamma(0) = 0, \quad n = (C - A)A^{-1}r \neq 0, \quad |n/r| \leq 1, \quad \alpha = \varphi + \gamma \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь a, b – оскулирующие переменные типа Ван дер Поля, введенные вместо (1.3), а переменная γ имеет смысл фазы колебаний.

Рассмотрим систему (2.1) при $\varepsilon \neq 0$ и соотношения (2.3) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1) от переменных $P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau$ к новым переменным $a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau$. Отметим, что фазы φ, α, γ связаны конечным соотношением, которое оказывается более удобным для дальнейших исследований стандартной системы с двумя вращающимися фазами γ, α. После преобразований получим более удобную для дальнейшего исследования систему

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) + \varepsilon K(\tau)C^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha - \\
&\quad - \varepsilon K(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta(b - K(\tau)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha) - \varepsilon K'(\tau)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha \\
\dot{b} &= \varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) - \varepsilon K(\tau)C^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha + \\
&\quad + \varepsilon K(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta(a + K(\tau)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha) + \varepsilon K'(\tau)C^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha \\
\dot{r} &= \varepsilon C^{-1}M_3^0, \quad \dot{\theta} = \varepsilon(a\cos\alpha + b\sin\alpha) \\
\dot{\psi} &= \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\operatorname{cosec}\theta + \varepsilon K(\tau)C^{-1}r^{-1} \\
\dot{\alpha} &= CA^{-1}r - \varepsilon(a\sin\alpha - b\cos\alpha)\operatorname{ctg}\theta - \varepsilon K(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta, \quad \dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r \\
&M_l^0(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, \tau) = M_l^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau) \quad (l = 1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Заметим, что при $K = \text{const}$ и M_l, не зависящих от τ, система (2.4) совпадает с соответствующей системой, исследованной в [1].

Исследуем возможность применения метода усреднения к системе (2.4). Данная система содержит медленные переменные a, b, r, ψ, θ, τ и быстрые переменные – фазы α и γ. В системе (2.4) восстанавливающий момент зависит от медленной переменной τ, что приводит к появлению в первых двух уравнениях слагаемых, содержащих производную $\varepsilon K'(\tau)$. Если возмущающие моменты зависят от времени t, то применение метода усреднения весьма затруднено, поскольку система является существенно нелинейной. Рассмотрим более простой случай зависимости возмущающих моментов от медленного времени $\tau = \varepsilon t$.

Моменты M_l^* периодичны по φ с периодом 2π, поэтому согласно (2.3) функции M_l^0 является 2π-периодическими функциями α и γ. В этом случае система (2.4) содержит две вращающиеся фазы α, γ и соответствующие им частоты $\omega_\alpha = CA^{-1}r$ и $\omega_\gamma = (C - A)A^{-1}r$ переменны и зависят от медленной переменной. При усреднении системы (2.4) следует различать два случая: нерезонансный, когда частоты ω_γ и ω_α несоизмеримы (C/A – иррациональное число) и резонансный, когда эти частоты соизмеримы ($C/A = i/j$, $i/j \leq 2$; i, j – натуральные взаимно простые числа). Поскольку отношение частот постоянно $\omega_\gamma/\omega_\alpha = 1 - AC^{-1}$, то в результате введения переменной γ усреднение нелинейной системы (2.4) эквивалентно усреднению квазилинейной системы с постоянными частотами.

В нерезонансном случае ($C/A \neq i/j$) усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (2.4) по обеим быстрым переменным α, γ. При этом, сделав замену $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon \ll 1$, t – время) и разделив обе части уравнений на ε, имеем

$$a' = A^{-1}\mu_1 - bK(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta + K(\tau)C^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^s$$

$$b' = A^{-1}\mu_2 + aK(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta - K(\tau)C^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^c$$

$$r' = C^{-1}\mu_3, \quad \psi' = K(\tau)C^{-1}r^{-1}, \quad \theta' = 0$$

$$\mu_1 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma)d\alpha d\gamma \tag{2.5}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma)d\alpha d\gamma$$

$$\mu_3 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0 d\alpha d\gamma, \quad \mu_3^s = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\sin\alpha d\alpha d\gamma$$

$$\mu_3^c = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3^0\cos\alpha d\alpha d\gamma, \quad f' = \frac{df}{d\tau}$$

В резонансном случае система (2.4) одночастотна. Введем вместо α медленную переменную λ-линейную комбинацию фаз с целочисленными коэффициентами

$$\lambda = \alpha - i(i-j)^{-1}\gamma, \quad i/j \neq 1, \quad i/j \leq 2, \quad i, j > 0 \tag{2.6}$$

Тогда система (2.4) примет вид стандартной системы с вращающейся фазой γ и правые части этой системы будут периодичны по γ с периодом $2|i-j|\pi$. Систему первого приближения построим усредняя правые части системы (2.4) по указанному периоду изменения аргумента γ. Сделав замену $\tau = \varepsilon t$, приводим систему к виду

$$a' = A^{-1}\mu_1^* - bK(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta + K(\tau)C^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3^{*s}$$

$$b' = A^{-1}\mu_2^* + aK(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta - K(\tau)C^{-2}r^{-2}\cos\theta\mu_3^{*c}$$

$$r' = C^{-1}\mu_3^*; \quad \psi' = K(\tau)C^{-1}r^{-1}; \quad \theta' = 0; \quad \lambda' = -K(\tau)C^{-1}r^{-1}\cos\theta$$

$$\mu_1^* = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma)d\gamma \tag{2.7}$$

$$\mu_2^* = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma)d\gamma$$

$$\mu_3^* = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}M_3^0 d\gamma, \quad \mu_3^{*s} = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}M_3^0\sin\alpha d\gamma$$

$$\mu_3^{*c} = \frac{1}{2\pi|i-j|}\int_0^{2\pi|i-j|}M_3^0\cos\alpha d\gamma,$$

Как отмечалось, зависимость восстанавливающего момента от медленного времени τ привела к появлению в системе (2.4) дополнительного слагаемого. Однако при усреднении системы (2.4) как в нерезонансном (2.5), так и в резонансном (2.7) случаях данное слагаемое исчезает. В результате получаем системы, аналогичные [1, 2]. Отличие заключается в том, что в (2.5). (2.7) восстанавливающий момент зависит от медленного времени: $K(\tau)$.

Далее при помощи изложенной методики рассмотрим некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела.

3. Примеры. *3.1. Случай линейной диссипации.* Исследуем возмущенное движение волчка Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Примером может служить внешняя среда, медленно изменяющая свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Будем считать, что возмущающие моменты являются линейно-диссипативными и с учетом (1.3) принимают вид

$$M_1 = -\varepsilon^2 I_1(\tau)P, \quad M_2 = -\varepsilon^2 I_1(\tau)Q, \quad M_3 = -\varepsilon I_3(\tau)r \tag{3.1}$$

Здесь $I_1(\tau)$, $I_3(\tau)$ – положительные интегрируемые функции на промежутке $\tau \sim 1$. После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений первого приближения (2.5) для возмущающих моментов (3.1) имеет вид

$$\theta = \theta_0, \quad r(\tau) = r_0 \exp[F_3(\tau)]$$

$$\psi(\tau) = \psi_0 + C^{-1} r_0^{-1} \int_0^\tau K(\tau^*) \exp[-F_3(\tau^*)] d\tau^*$$

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \exp[F_1(\tau)][P_0 \cos\beta + Q_0 \sin\beta - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \sin(\beta + \varphi_0)] \\ b(\tau) &= \exp[F_1(\tau)][P_0 \sin\beta - Q_0 \cos\beta + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \cos(\beta + \varphi_0)] \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$F_1(\tau) = -A^{-1} \int_0^\tau I_1(\tau^*) d\tau^*, \quad F_3(\tau) = -C^{-1} \int_0^\tau I_3(\tau^*) d\tau^*$$

$$\beta = C^{-1} r_0^{-1} \cos\theta_0 \int_0^\tau K(\tau^*) \exp[-F_3(\tau^*)] d\tau^* = (\psi - \psi_0) \cos\theta_0$$

В результате подстановки в соотношения (2.3), (1.3) для P, Q, p, q выражений a, b, r из (3.2) определим искомые переменные

$$\begin{aligned} p &= \exp[F_1(\tau)][p_0 \cos(\gamma - \beta) - q_0 \sin(\gamma - \beta) + \\ &+ k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \sin(\gamma - \beta - \varphi_0)] + k(\tau) C^{-1} r_0^{-1} \exp[-F_3(\tau)] \sin\theta_0 \sin\varphi \\ q &= \exp[F_1(\tau)][p_0 \sin(\gamma - \beta) + q_0 \cos(\gamma - \beta) - k_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \cos(\gamma - \beta - \varphi_0)] + \\ &+ k(\tau) C^{-1} r_0^{-1} \exp[-F_3(\tau)] \sin\theta_0 \cos\varphi \\ \gamma &= A^{-1} r_0 (C - A) \int_0^t \exp[F_3(\varepsilon t^*)] dt^* \end{aligned} \tag{3.3}$$

Отметим качественные особенности движения в данном случае. Угол нутации θ согласно (3.2) постоянен. Модуль осевой скорости вращения r монотонно уменьшается по экспоненте. Величины медленных переменных a, b стремятся к нулю по экспоненте (в случае когда I_1, I_2 отделены от нуля). Приращение угла прецессии $\psi - \psi_0$ зависит от произведения подынтегральных функций $K(\tau)$ и $r^{-1}(\tau)$. Переменная β изменяется аналогично $\psi - \psi_0$, если $\theta_0 \neq \pm\pi/2$, и имеет смысл фазы колебаний. Согласно (3.3) слагаемые проекций p, q, обусловленные начальными значениями k_0, p_0, q_0, затухают по экспоненте. В то же время проекции p, q содержат слагаемые, зависящие от вида восстанавливающего момента $k(\tau)$.

В случае $k = \mathrm{const}$, $I_1 = \mathrm{const}$, $I_3 = \mathrm{const}$ выражения для r, ψ, a, b, p, q (3.2), (3.3) совпадают с соответствующими формулами [1]. Зависимость восстанавливающего момента от медленного времени привела к усложнению по сравнению с [1] выражений для угла прецессии ψ, медленных переменных a, b и экваториальных составляющих p, q вектора угловой скорости.

Рассмотрим частный случай, когда восстанавливающий момент медленно изменяется во времени и имеет вид

$$k(\tau) = \varepsilon K(\tau) = \varepsilon(K_0 + \alpha_0\tau) = k_0 + \varepsilon\alpha_0\tau, \quad \alpha_0 \lesseqgtr 0, \quad \alpha_0 = \mathrm{const} \tag{3.4}$$

В системе (3.2) функция $K(\tau)$ входит в уравнение для угла прецессии ψ и в аргумент β:

$$\begin{gathered}\psi - \psi_0 = C^{-1} r_0^{-1} K_0 \int_0^\tau \exp[-F_3(\tau^*)]d\tau^* + f_1 \\ f_1 = \alpha_0 C^{-1} r_0^{-1} \int_0^\tau \tau^* \exp[-F_3(\tau^*)]d\tau^*, \quad \beta = (\psi - \psi_0)\cos\theta_0\end{gathered} \tag{3.5}$$

В системе (3.3) проекции p и q содержат $k(\tau)$ во втором слагаемом и имеют вид

$$\begin{gathered}p = \exp[F_1(\tau)][p_0\cos(\gamma - \beta) - q_0\sin(\gamma - \beta) + k_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma - \beta - \varphi_0)] + \\ + k_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi\exp[-F_3(\tau)] + f_2 \\ f_2 = \varepsilon\alpha_0\tau C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi\exp[-F_3(\tau)]\end{gathered} \tag{3.6}$$

Для переменной q получается аналогичное выражение.

Отметим, что в выражениях для p, q и ψ (3.5) и (3.6), как и в [1], присутствует слагаемое, содержащее постоянную K_0 и экспоненциально возрастающее. Отличие состоит в том, что имеются еще дополнительные слагаемые f_1 и f_2 соответственно. Для угла прецессии модуль дополнительного слагаемого $|f_1|$ экспоненциально возрастает; при $\alpha_0 \lesseqgtr 0$ оно больше или меньше нуля соответственно. Аналогично для p и q функция f_2 имеет вид векового слагаемого. При $\alpha_0 = 0$ получим результаты, соответствующие $k = \mathrm{const}$.

Кратко исследуем систему (2.5) в случае, когда

$$k(\tau) = \varepsilon K(\tau) = \varepsilon(K_0 + \alpha_0\sin\nu\tau), \quad \alpha_0 \lesseqgtr 0 \tag{3.7}$$

В выражениях (3.2), (3.3) момент $K(\tau)$ входит в формулу для угла прецессии ψ, в аргумент β и в проекции вектора угловой скорости p и q:

$$\begin{gathered}\psi - \psi_0 = C^{-1} r_0^{-1} K_0 \int_0^\tau \exp[-F_3(\tau^*)]d\tau^* + f_3 \\ p = \exp[F_1(\tau)][p_0\cos(\gamma - \beta) - q_0\sin(\gamma - \beta) + k_0 C^{-1} r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma - \beta - \varphi_0)] + \\ + k_0 C^{-1} r_0^{-1}\exp[-F_3(\tau)]\sin\theta_0\sin\varphi + f_4\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$f_3 = \alpha_0 C^{-1} r_0^{-1} \int_0^{\tau} \sin(\nu\tau^*) \exp[-F_3(\tau^*)] d\tau^*$$

$$f_4 = \varepsilon\alpha_0 \sin(\nu\tau) C^{-1} r^{-1}(\tau) \sin\theta_0 \sin\varphi$$

Аналогичное выражение получается для переменной q. Сравним выражение (3.8) для p и ψ с соответствующими выражениями (3.5) и (3.6). Отличие имеется лишь в структуре дополнительных слагаемых f_i ($i = 1, 2, 3, 4$). При $\alpha_0 = 0$ (или (и) $\nu = 0$) функции f_3, f_4 равняются нулю и результаты соответствуют случаю $k = \text{const}$.

3.2. *Управление экваториальной составляющей вектора угловой скорости.* Рассмотрим задачу о приведении волчка в состояние регулярной прецессии, в частности, в "спящее состояние". Малые управляющие моменты принимаются в виде

$$M_1 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{p^*}{(p^{*2} + q^{*2})^{1/2}}, \quad M_2 = -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{q^*}{(p^{*2} + q^{*2})^{1/2}}$$

$$M_3 = \varepsilon u(\tau) \tag{3.9}$$

$$p^* = p - k(\tau) C^{-1} r^{-1} \sin\theta \sin\varphi, \quad q^* = q - k(\tau) C^{-1} r^{-1} \sin\theta \cos\varphi$$

Здесь $h(\tau)$, $u(\tau)$ – заданные интегрируемые функции на промежутке $\tau \sim 1$; $h(\tau) > 0$, $r \sim 1$. Эти законы управления отвечают оптимальному по быстродействию гашению экваториальной составляющей вектора угловой скорости вращения [5].

С учетом соотношений (1.3) и (2.3) для p и q возмущающие моменты согласно (3.9) имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a\cos\gamma + b\sin\gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \\ M_2 &= -\varepsilon^2 h(\tau) \frac{a\sin\gamma - b\cos\gamma}{(a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad M_3 = \varepsilon u(\tau) \end{aligned} \tag{3.10}$$

После подстановки в (2.7) возмущающих моментов (3.10) получим (после интегрирования) решение вида

$$\theta = \theta_0, \quad r(\tau) = r_0 + C^{-1} \int_0^{\tau} u(\tau^*) d\tau^*$$

$$\psi(\tau) = \psi_0 + C^{-1} \int_0^{\tau} K(\tau^*) r^{-1}(\tau^*) d\tau^*$$

$$\begin{aligned} a(\tau) &= F_4(\tau)[P_0\cos\chi + Q_0\sin\chi - K_0 C^{-1} r_0^{-1} \theta_0 \sin(\chi + \varphi_0)] \\ b(\tau) &= F_4(\tau)[P_0\sin\chi - Q_0\cos\chi + K_0 C^{-1} r_0^{-1} \sin\theta_0 \cos(\chi + \varphi_0)] \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$F_4(\tau) = \left[1 - A^{-1}(a_0^2 + b_0^2)^{-1/2} \int_0^{\tau} h(\tau^*) d\tau^*\right]$$

$$\chi = C^{-1} \cos\theta_0 \int_0^{\tau} K(\tau^*) r^{-1}(\tau^*) d\tau^*$$

Подставляя в соотношения (1.3) выражения P, Q, a, b, r из (2.3), (3.11), определим искомые величины

$$
\begin{aligned}
p &= F_4(\tau)[p_0\cos(\gamma-\chi) - q_0\sin(\gamma-\chi) + k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)] + \\
&+ k(\tau)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi \\
q &= F_4(\tau)[p_0\sin(\gamma-\chi) + q_0\cos(\gamma-\chi) - k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma-\chi-\varphi_0)] + \\
&+ k(\tau)C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\cos\varphi \\
\gamma &= A^{-1}(C-A)\left[r_0t + C^{-1}\int_0^t\left(\int_0^{\tau^*}u(\tau_1)d\tau_1\right)dt^*\right], \quad \tau = \varepsilon t
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Получены решения системы (2.7), (3.9) и найдены выражения проекций вектора угловой скорости в случае момента (3.10). Угол нутации θ постоянен. Величина $|r(\tau)|$ возрастает, если параметр r_0 и интеграл от функции $u(\tau)$ имеют одинаковые знаки, и убывает в противном случае. Переменные a, b являются произведением сомножителя, принимающего положительные, отрицательные значения и нуль, в зависимости от подынтегральной функции $h(\tau)$, и осциллирующего сомножителя. Из (3.11) следует, что при $h(\tau) \geq h_0 > 0$ существует $\tau_* \leq \tau_0 = A(a_0^2 + b_0^2)^{1/2}/h_0$ такое, что $a(\tau_*) = b(\tau_*) = 0$. При $K(\tau) = K_*$, $r(\tau) = r_*$ для $\tau \geq \tau_*$ волчок совершает регулярную прецессию, в частности, при $\theta_0 = 0, \pi$ он будет "спящим". Приращение угла прецессии $\psi - \psi_0$ зависит от интеграла, являющегося частным от деления восстанавливающего момента на осевую скорость вращения, и принимает положительное значение в случае, если $K(\tau)$ и $r^{-1}(\tau)$ имеют одинаковые знаки.

Составляющие p, q вектора угловой скорости согласно (3.12) содержат ограниченные осциллирующие слагаемые, частота колебаний которых определяется переменной $(\gamma-\chi)$, а также слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом $k(\tau)$.

Функция $h(\tau)$ может иметь смысл ограничения на управляющее воздействие, например, при гашении экваториальной составляющей посредством ограниченного момента сил, где $M_{1,2}$ – управление для p, q, а M_3 – управление для r.

Рассмотрим случай, когда восстанавливающий момент имеет вид

$$
k(\tau) = \varepsilon K(\tau) = \varepsilon(K_0 + \alpha_0\tau) = k_0 + \varepsilon\alpha_0\tau, \quad \alpha_0 \lesseqgtr 0 \tag{3.13}
$$

Тогда выражения для угла прецессии ψ и проекций p, q вектора угловой скорости примут вид

$$
\begin{aligned}
\psi - \psi_0 &= C^{-1}K_0\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)d\tau^* + \eta_1 \\
p &= F_4(\tau)[p_0\cos(\gamma-\chi) - q_0\sin(\gamma-\chi) + k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)] + \\
&+ k_0C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi + \eta_2
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

$$
\eta_1 = \alpha_0C^{-1}\int_0^\tau \tau^* r^{-1}(\tau^*)d\tau^*, \quad \eta_2 = \varepsilon\alpha_0\tau C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi
$$

Аналогично получается формула для q.

В выражениях для p, q и ψ (3.14), как и в [1], присутствуют слагаемые, содержащие постоянную k_0. Отличие состоит в том, что имеются еще дополнительные слагаемые η_1 и η_2 соответственно.

Остановимся кратко на случае, когда

$$k(\tau) = \varepsilon K(\tau) = \varepsilon(K_0 + \alpha_0 \sin\nu\tau), \quad \alpha_0 \lessgtr 0 \tag{3.15}$$

Имеем следующие выражения для ψ, p:

$$\psi - \psi_0 = C^{-1}K_0\int_0^\tau r^{-1}(\tau^*)d\tau^* + \eta_3$$

$$\begin{aligned} p &= F_4(\tau)[p_0\cos(\gamma-\chi) - q_0\sin(\gamma-\chi) + k_0C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\chi-\varphi_0)] + \\ &+ k_0C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\theta_0\sin\varphi + \eta_4 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\eta_3 = \alpha_0C^{-1}\int_0^\tau \sin(\nu\tau^*)r^{-1}(\tau^*)d\tau^*, \quad \eta_4 = \alpha_0C^{-1}r^{-1}(\tau)\sin\nu\tau\sin\theta_0\sin\varphi$$

Выражение для q аналогично полученному для p (3.16).

Отличие между случаями (3.13) и (3.15) заключено в дополнительных слагаемых η_1, η_2, η_3, η_4. Поскольку $|\sin\nu\tau| < |\nu\tau|$, то слагаемые η_3 и η_4 по модулю меньше $|\eta_1|$ и $|\eta_2|$ соответственно, а поскольку функция $r(\tau)$ ограничена, то и дополнительные слагаемые также являются ограниченными.

Если выполнено резонансное соотношение $C/A = i/j$ ($i/j \leq 2$, i, j – натуральные взаимно простые числа), то усреднение следует проводить по схеме (2.9). В примерах, изложенных выше, все интегралы μ_i^* из (2.9) совпадают с соответствующими интегралами μ_i из (2.7). Поэтому резонанс фактически места не имеет и полученное решение пригодно для описания движения при любом отношении $C/A \neq 1$ ($C \leq 2A$).

Выводы. 1. Исследован новый класс вращательных движений динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом нестационарных возмущающего и восстанавливающего моментов.

2. Разработана процедура усреднения для получающейся существенно нелинейной двухчастотной системы в нерезонансном и резонансном случаях.

3. Решены конкретные задачи динамики и управления вращениями твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа, имеющие самостоятельное значение для приложений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00157, 02-01-00252, 01-02-17250).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноусько Ф.Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 5. С. 3–10.
2. *Лещенко Д.Д., Саллам С.Н.* Возмущенные вращения твердого тела относительно неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 16–23.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
5. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.

Москва

Поступила в редакцию 20.06.2001