

УДК 534.112

© 2003 г. Ю.А. ДЕМЬЯНОВ, Е.Г. ДЕМЬЯНОВА, С.С. ЛОБАНОВА

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНО-ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН  
В НАТЯНУТОЙ СТРУНЕ ПРИ УДАРЕ  
ПО НЕЙ ТЕЛОМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ**

Исследуются процессы распространения поперечных и продольных волн в натянутых струнах при ударе по ним тел произвольной формы. В рамках постановок [1, 2] рассмотрено взаимодействие струны с телами, передние части которых имеют следующую форму: клиновидную, торцевую, скруглённую, а также торцевую со скруглёнными краями (последние две формы описывают, в частности, контуры молоточков фортепиано). Впервые приводятся решения задач, в которых существуют области отхода струны от тел, обусловленные тем, что скорость поперечной волны превышает скорость движения последней точки соприкосновения струны с телом, или наличием отрицательного ускорения тела.

1. Уравнения, описывающие движение струны, первоначально расположенной по оси абсцисс, имеют вид [3, 4]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T \cos \varphi), \quad \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T \sin \varphi) \quad (1.1)$$

где  $s$  – лагранжева координата, совпадающая с начальной декартовой координатой ненапрянутой струны, имеющей плотность  $\rho_0$ ;  $x, y$  – перемещения точки  $s$ ;  $T$  – натяжение, являющееся функцией деформации  $e$  ( $T = Ee$ ,  $E$  – модуль Юнга);  $\varphi$  – угол наклона элемента струны к ее первоначальному направлению, причем

$$e = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} - 1, \quad \cos \varphi = \frac{1 + \partial x / \partial s}{1 + e}, \quad \sin \varphi = \frac{\partial y / \partial s}{1 + e}$$

Будем считать, что в начальный момент  $t = 0$  струна натянута (ее исходная деформация  $e_0$ ), занимает горизонтальное положение ( $y = 0$ ) и неподвижна  $\partial y / \partial t = 0$ . В точках  $s = -L_2$  и  $s = L_1$  она закреплена. Граничным условием на теле в случае абсолютно неупругого удара является равенство нормальных скоростей частиц струны и тела. В частности, если заостренное тело взаимодействует со струной в одной точке (так называемый "точечный" удар [3], [4]), например, в точке  $s = 0$ , ставятся условия  $y(s = 0, t) = y_0(t)$ ,  $x(s = 0, t) = x_0(t)$ , где  $x_0(t), y_0(t)$  – координаты движущегося тела. Если скорость точек излома струны превышает скорость поперечных волн, то в соответствии с [4], [5] используются соответствующие соотношения, выражающие закон изменения количества движения с введением сосредоточенной силы<sup>1</sup>.

Известны следующие случаи решения таких задач (кроме численных):

1) При постоянстве скорости ударяющего тела при точечном ударе (из соображений размерности и подобия уравнения сводятся к обыкновенным [3], [4]).

<sup>1</sup> См. также: *Зверев И.Н.* Некоторые задачи о распространении волн при ударе // Дис. на соискание учен. степени канд. ф.-м. наук МГУ. НИИ механики. 1949. 91 с.

2) В случае удара телом со скругленной передней частью, когда скорость поперечной волны меньше скорости движения точки излома струны (в области поперечного движения струна прилегает к телу, а за точкой излома движение частиц чисто продольное).

3) В случае, когда начальная деформация в струне близка к нулю (используются внешние и внутренние асимптотические разложения [6])<sup>2</sup>.

4) В случае постоянства исходной деформации  $e_0$  и малости возникающей дополнительной деформации. Тогда уравнения (1.1) при использовании асимптотических рядов  $y = \hat{e}^{1/2} Y_1 + \hat{e}^{3/2} Y_2 + \dots$ ,  $\bar{x} = x - e_0 s = \hat{e} X_1 + \hat{e}^2 X_2 + \dots$  линеаризируются [1]:

$$\partial^2 Y_1 / \partial t^2 = b_0^2 \partial^2 Y_1 / \partial s^2 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 X_1}{\partial s^2} + f(s, t), \quad f(s, t) = \frac{a_0^2}{2(1+e_0)^2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial Y_1}{\partial s} \right)^2 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 Y_n}{\partial s^2} + \xi_n(s, t), \quad \frac{\partial^2 X_n}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 X_n}{\partial s^2} + \varphi_n(s, t) \quad (n = 2 \dots)$$

Здесь  $b_0 = \sqrt{Ee_0/\rho_0}$  – скорость поперечной волны,  $a_0 = \sqrt{E/\rho_0}$  – скорость продольной волны; индексы при переменных  $X, Y$  означают номер приближения, функции  $\xi_n(s, t)$ ,  $\varphi_n(s, t)$  выражаются через производные  $\partial X_k / \partial s$ ,  $\partial Y_k / \partial s$  ( $k < n$ );  $\hat{e}$  – характерное приращение деформации. Уравнения (1.2), (1.3) и используются далее для решения перечисленных задач (обозначим через  $y_1 = \hat{e}^{1/2} Y_1$ ,  $x_1 = \hat{e} X_1$ ). При этом упрощается их постановка, так как при нахождении  $y_1(t)$  оказывается, что точки струны на теле двигаются вертикально вниз со скоростью последнего.

2. При ударе заостренной передней частью естественно предположить, что в ряде случаев удар будет точечным (условия существования таких режимов будут даны ниже). Решением (1.2) в интервале времени, когда не сказывается влияние концов, является (см.[7]):

$$\begin{aligned} y_1(s, t) &= y_0 \left( t - \frac{s}{b_0} \right), \quad t \leq \frac{s}{b_0}; \quad y_1(s, t) = 0, \quad t > \frac{s}{b_0}, \quad s > 0 \\ y_1(s, t) &= y_0 \left( t + \frac{s}{b_0} \right), \quad t \leq -\frac{s}{b_0}; \quad y_1(s, t) = 0, \quad t > \frac{s}{b_0}, \quad s < 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из (2.1) видно, что при движении с переменной скоростью ( $y_0'(t) \neq \text{const}$ ) участок струны за поперечной волной криволинейный.

Учет отражений от закрепленных концов ( $y(L_1, t) = y(-L_2, t) = 0$ ) в соответствии с [7] дает

$$\begin{aligned} y_1(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_0 \left( t - \frac{s}{b_0} - 2n \frac{L_1}{b_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} y_0 \left( t + \frac{s}{b_0} - 2n \frac{L_1}{b_0} \right) \\ y_1(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_0 \left( t + \frac{s}{b_0} - 2n \frac{L_1}{b_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} y_0 \left( t - \frac{s}{b_0} - 2n \frac{L_2}{b_0} \right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

<sup>2</sup> См. также: Лобанова С.С. Удар по нити // Сборник научных трудов аспирантов и докторантов МГУЛ. 1999.

Используя (2.2), найдем выражение для угла наклона струны в любой точке в любой момент времени ( $n = 0$ ). Пусть  $\gamma$  – угол между направлением  $OY$  и струной, тогда

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{ctg} \varphi \sim \frac{1 + e_0}{\partial y_1 / \partial s} = \frac{b_0(1 + e_0)}{y_0'(t - s/b_0)}$$

Рассмотрим область струны, где  $s \rightarrow 0$ , тогда  $\operatorname{tg} \gamma \rightarrow b_0/y_0'(t)$ , т.е.  $\gamma$  обратно пропорционален скорости удара и при ускоренном движении будет уменьшаться, а при замедленном увеличиваться. Для  $n$  отражений, получим

$$\operatorname{tg} \gamma(s, t) = b_0(1 + e_0) / \left[ \sum_{n=0}^{\infty} y_0' \left( t - \frac{s}{b_0} - \frac{2nL_1}{b_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} y_0' \left( t + \frac{s}{b_0} - \frac{2nL_1}{b_0} \right) \right] \quad (2.3)$$

Пока угол раствора клина  $\alpha$  будет удовлетворять условию  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha < \operatorname{tg} \gamma (s = 0, t)$ , удар, очевидно, будет являться точечным.

На основе предыдущего можно описать схему взаимодействия со струной тела с острой передней частью, движущегося с положительным ускорением:

1) В начальный промежуток времени  $0 \leq t \leq t_1$  имеет место точечный удар (возможен случай  $t_1 = 0$  для достаточно большого угла  $\alpha$ ).

2) С момента  $t = t_1$  струна начинает прилегать к клину ( $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \geq \operatorname{tg} \gamma (s = 0, t \geq t_1)$ ); причем в точке  $s^*(t)$ , являющейся граничной для части струны, прилегающей к телу, возникнет сосредоточенная сила (см. [3]). Закон движения  $s^*(t)$  для случая, когда отраженные от концов  $s = -L_2$  и  $s = L_1$  поперечные волны не подошли к телу, находится из соотношения

$$\frac{b_0(1 + e_0)}{y_0'(t - s^*(t)/b_0)} = \operatorname{tg} \frac{\alpha(s^*(t))}{2}$$

Участок струны при  $s^*(t) < s < b_0 t$  будет криволинейным.

3) При  $t = t_2$ , когда  $ds^*(t_2)/dt = b_0$ , решение диктуется формой клинообразной части и распределением  $dy/dt$ ,  $dy/ds$  к этому моменту при  $s > s^*(t_2)$ .

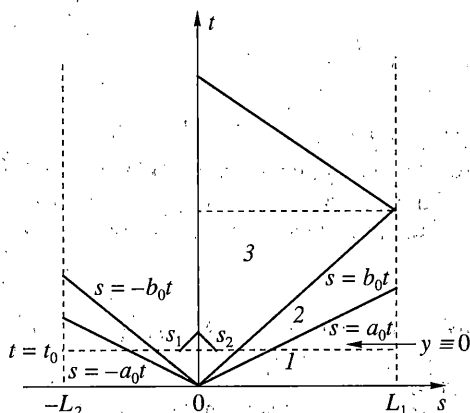
Наконец, рассмотрим случай движения тела с отрицательным ускорением ( $y_0''(t > t_0) < 0$ ). Покажем, как проводится анализ отрыва струны от точки удара в этом случае. Пусть  $s_1$  и  $s_2$  – точки на струне, расположенные на одном расстоянии от  $s = 0$  соответственно слева и справа при  $t = t_0$  (фиг. 1). Тогда в предположении отрыва струны от тела (при  $s = 0$ ) соотношения на характеристиках  $s - s_1 = b_0(t - t_0)$  и  $s - s_2 = -b_0(t - t_0)$  будут иметь вид:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}(0, t) - \frac{\partial y_1}{\partial t}(s_1, t_0) = b_0 \left( \frac{\partial y_1}{\partial s}(0, t) - \frac{\partial y_1}{\partial s}(s_1, t_0) \right)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}(0, t) - \frac{\partial y_1}{\partial t}(s_2, t_0) = -b_0 \left( \frac{\partial y_1}{\partial s}(0, t) - \frac{\partial y_1}{\partial s}(s_2, t_0) \right)$$

Сложим эти формулы

$$2 \frac{\partial y_1}{\partial t}(0, t) - \frac{\partial y_1}{\partial t}(s_1, t_0) - \frac{\partial y_1}{\partial t}(s_2, t_0) = b_0 \left( \frac{\partial y_1}{\partial s}(s_2, t_0) - \frac{\partial y_1}{\partial s}(s_1, t_0) \right) \quad (2.4)$$



Фиг. 1

и учтем, что значения  $\frac{\partial y_1}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial y_1}{\partial s}$  при  $t = t_0$  необходимо считать известными из решения задачи. В частности, для интервала времени, в течение которого к  $s = 0$  не подошли отраженные от концов поперечные волны

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}(s_1, t_0) = y_0'\left(t_0 + \frac{s_1}{b_0}\right), \quad \frac{\partial y_1}{\partial t}(s_2, t_0) = y_0'\left(t_0 - \frac{s_2}{b_0}\right)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}(s_1, t_0) = \frac{1}{b_0}y_0'\left(t_0 + \frac{s_1}{b_0}\right), \quad \frac{\partial y_1}{\partial s}(s_2, t_0) = -\frac{1}{b_0}y_0'\left(t_0 - \frac{s_2}{b_0}\right)$$

С учетом этих выражений из (2.4) следует, что отрыв может наступить в момент  $t$  при  $y_0'(t) = 0$ , если скорость тела после этого момента станет отрицательной. В случае использования формулы (2.2) количественные результаты для скорости отрыва, естественно, будут иными.

Переходя к решению уравнения (1.3), заметим, что область определения решения при  $s > 0$  (как и при  $s < 0$ ) делится на три части (фиг.1): 1 – область, куда не дошли продольные возмущения ( $s > a_0t$ ); 2 – область продольного движения, куда не дошли поперечные возмущения ( $b_0t < s \leq a_0t$ ); 3 – область продольно-поперечного движения ( $0 < s \leq b_0t$ ), где поперечные волны влияют на продольные ( $f(s, t) \neq 0$ ). Обозначая вторым индексом при функции  $x_1$  область решения, будем, очевидно, иметь

$$x_{11}(s, t) = 0; \quad x_{12}(s, t) = f_1\left(t - \frac{s}{a_0}\right) + f_2\left(t + \frac{s}{a_0}\right); \quad x_{13}(s, t) = f_3\left(t - \frac{s}{a_0}\right) + f_4\left(t + \frac{s}{a_0}\right) + F(s, t)$$

где  $F(s, t)$  – частное решение неоднородного уравнения (1.3). В силу непрерывности смещений на границе  $s = a_0t$  областей 1 и 2  $f_2 \equiv \text{const}$ , причем без ограничения общности эту константу можно положить равной нулю (что означает изменение на константу функции  $f_1$ ).

Так как функция  $f(s, t)$  в уравнении (1.3) в силу (2.1) зависит только от  $z = t - s/b_0$ , то естественно искать частное решение в виде  $F(s, t) = F(z)$ . Тогда

$$F'' = \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} f(z) = \frac{a_0^2}{b_0(1 + e_0)^2(a_0^2 - b_0^2)} y_0'\left(t - \frac{s}{b_0}\right) y_0''\left(t - \frac{s}{b_0}\right)$$

$$F' = \frac{a_0^2}{b_0(1+e_0)^2(a_0^2-b_0^2)} y_0'^2 \left( t - \frac{s}{b_0} \right)$$

Заметим, что  $y_0'(z=0) = 0$ , если  $y_0'(t=0) = 0$ ;  $y_0'(z=0) = V_0 = \text{const}$ , если  $y_0'(t=0) = V_0$ , поэтому  $F'(0) = 0$  для случаев движения тела из состояния покоя,  $F'(0) = \text{const}$  для случая встречи тела со струной с начальной скоростью.

Для нахождения  $f_1, f_2, f_3$  потребуется условие в точке удара

$$x_{13}(0, t) = x_0(t) \quad (2.5)$$

а также условия для разрыва составляющих  $\partial x_i/\partial t, \partial x_i/\partial s$  на поперечной волне  $s = b_0 t$

$$\frac{\partial x_{13}}{\partial t} - \frac{\partial x_{12}}{\partial t} = \frac{b_0}{2(1+e_0)} \left( \frac{\partial y_1}{\partial s} \right)^2 = \frac{1}{2b_0(1+e_0)} y_0'^2 \left( t - \frac{s}{b_0} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial x_{13}}{\partial s} - \frac{\partial x_{12}}{\partial s} = -\frac{1}{2(1+e_0)} \left( \frac{\partial y_1}{\partial s} \right)^2 = -\frac{1}{2b_0^2(1+e_0)} y_0'^2 \left( t - \frac{s}{b_0} \right) \quad (2.7)$$

базирующихся на законе изменения количества движения, примененного к частице, прошедшей через поперечную волну [3], причем второе условие выражает условие непрерывности полной деформации при этом. Условие (2.5) указывает, что могут рассматриваться случаи незначительного ( $\sim O(\hat{\epsilon})$ ) движения ударяющего тела в горизонтальном направлении. Очевидно, случай  $x_0(t) \equiv 0$  описывает возникновение продольных волн при чисто поперечном ударе.

Используя (2.5), (2.6), (2.7), получим

$$\begin{aligned} x_{12}(s, t) &= x_0 \left( t - \frac{s}{a_0} \right) - F \left( t - \frac{s}{a_0} \right) - K_1 \left( t - \frac{s}{a_0} \right) + K_2 \\ x_{13}(s, t) &= x_0 \left( t - \frac{s}{a_0} \right) - F \left( t - \frac{s}{a_0} \right) + F \left( t - \frac{s}{b_0} \right) + 2 \left( 1 - \frac{a_0}{b_0} \right) K_1 \frac{s}{a_0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

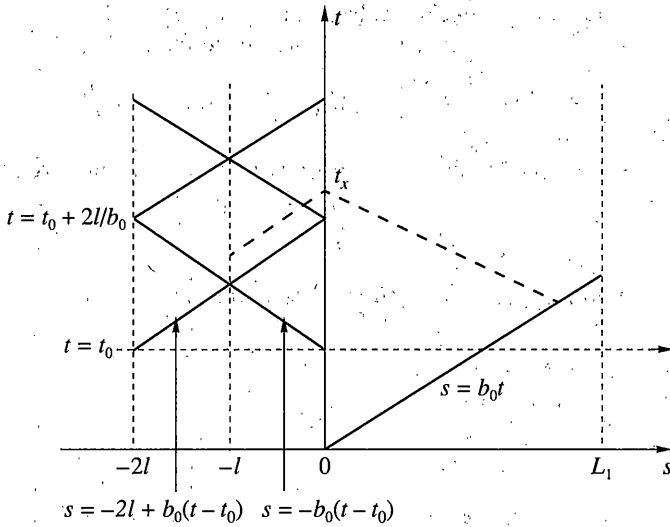
$$K_1 = \frac{1}{4b_0(1+e_0)} \left[ 1 - \frac{a_0^2}{(1+e_0)(a_0^2-b_0^2)} \right] y_0'^2(0), \quad K_2 = F(0) - x_0(0)$$

Нахождение  $x_2, y_2$  в общем виде очень громоздко, поэтому не приводится.

3. Рассмотрим удар по струне телом с плоским торцом шириной  $2H$ , двигающимся по закону  $y = y_0(t)$ . Так как тело симметрично, будем рассматривать его правую половину, причем примем, что в начальный момент времени край торца приходится на точку  $s = 0$  (лагранжева координата второго края  $s = -2l$ , где  $l = H/(1+e_0)$ ). Обозначая через  $s = z(t)$  зависимость лагранжевой координаты от времени для частиц, находящихся на краю ( $z(0) = 0$ ), очевидно, будем иметь  $e_0 z(t) + \bar{x}(z, t) = 0$ , где декартова координата любой точки при заданных  $s$  и  $t$  есть  $x = e_0 s + \bar{x}(s, t)$ . Отсюда следует, что  $z(t) \sim \hat{\epsilon}$ . Условие  $y(z(t), t) = y_0(t)$  поэтому может быть линеаризовано

$$y(z, t) = y(z=0, t) + \frac{\partial y}{\partial z}(0, t)z + O(z^2)$$

и с учетом того, что  $y = \hat{\epsilon}^{1/2} Y_1 + \hat{\epsilon}^{3/2} Y_2$  принимает вид  $Y_1 = y_0(t)/\hat{\epsilon}^{1/2}$ , совпадающий для точек  $s \geq 0$  с условием для точечного удара. Поэтому решение (2.2) справедливо и



Фиг. 2

для этого случая при  $s \geq 0$  (очевидно, как и при  $s \leq -2l$ ). Решением при  $2l \leq s \leq 0$  для случая абсолютно неупругого удара по струне, которым ограничимся, при  $y_0'' > 0$  является  $y \equiv y_0(t)$ .

При  $y_0''(t = t_0) < 0$  струна отойдет от тела во всех точках, кроме  $s = 0$ . Рассмотрим дальнейший процесс отражения волн от краев торца  $s = 0$ ,  $s = -2l$  и точки  $s = -l$ , соответствующей его середине (фиг. 2). При  $t = t_0$  влево от  $s = 0$  по области равномерного движения частиц струны ( $y_1(s, t) = y_0'(t_0)(t - t_0) + y_0(t_0)$ ) распространяется поперечная волна  $s = -b_0(t - t_0)$ , решение за которой можно найти

$$y_1(s, t) = \begin{cases} y_0'(t_0)(t - t_0) + y_0(t_0) & (-l \leq s \leq -b_0(t - t_0)) \\ -\frac{s}{b_0} y_0'(t_0) + y_0\left(t + \frac{s}{b_0}\right) & (-b_0(t - t_0) \leq s \leq 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

Аналогично за волной, идущей от края  $s = -2l$ :

$$y_1(s, t) = \begin{cases} y_0(t_0) + y_0'(t_0)(t - t_0) & (-2l + b_0(t - t_0) \leq s \leq -l) \\ \frac{s + 2l}{b_0} y_0'(t_0) + y_0\left(t - \frac{s + 2l}{b_0}\right) & (-2l \leq s \leq -2l + b_0(t - t_0)) \end{cases}$$

Используя метод характеристик аналогично п. 2, найдем поперечные скорость и деформацию струны в точке  $s = -l$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}(-l, t) = 2y_0'\left(t - \frac{l}{b_0}\right) - y_0'(t_0), \quad \frac{\partial y_1}{\partial s}(-l, t) = 0$$

Отсюда следует  $y_1(-l, t) = 2y_0(t - l/b_0) - t y_0'(t_0) + c_1$  (3.2)

где  $c_1$  находится из условия равенства соотношений (3.1) и (3.2) при  $t = t_0 + l/b_0$ . Далее получим решение после отражения от  $s = -l$  (для правой половины):

$$y_1(s, t) = y_0\left(t + \frac{s}{b_0}\right) + y_0\left(t - \frac{s}{b_0} - \frac{2l}{b_0}\right) - ty_0'(t_0) + c_1 \quad \text{при} \quad t_0 + \frac{l}{b_0} \leq t \leq t_0 + \frac{2l}{b_0}$$

и, используя условие на краю торца  $y(0, t) = y_0(t)$ , после отражения от края:

$$y_1(s, t) = y_0\left(t + \frac{s}{b_0}\right) + y_0\left(t - \frac{s}{b_0} - \frac{2l}{b_0}\right) - y_0\left(t + \frac{s}{b_0} - \frac{2l}{b_0}\right) + \frac{s}{b_0}y_0'(t_0) - c_1 \quad \text{при} \quad t_0 + \frac{2l}{b_0} \leq t \leq t_0 + \frac{3l}{b_0}$$

Следуя описанной процедуре, найдем вид решения при  $s = -l$ :

$$y_1(-l, t) = ty_0'(t_0) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ y_0\left(t - (2n+1)\frac{l}{b_0}\right) - ty_0'(t_0) \right] + c_n$$

а также и общее решение

$$y_1(s, t) = ty_0'(t_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ y_0\left(t + \frac{s}{b_0} - 2n\frac{l}{b_0}\right) - \left(t + \frac{s}{b_0}\right)y_0'(t_0) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[ y_0\left(t - \frac{s}{b_0} - 2n\frac{l}{b_0}\right) - \left(t - \frac{s}{b_0}\right)y_0'(t_0) \right] + (-1)^{n+1} c_n$$

$$c_{2k+1} = (-1)^k \left[ 2y_0(t_0) - 2\left(t_0 + \frac{(2k-1)l}{b_0}\right)y_0'(t_0) \right] + c_{2k-1}$$

$$c_{2k} = -c_{2k-1} \quad (k = 1 \dots); \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \left(t_0 + \frac{2l}{b_0}\right)y_0'(t_0) - y_0(t_0)$$

Для нахождения условия отрыва края торца  $s = 0$  от струны примем, что  $t_x$  – момент отрыва. Тогда значения  $\partial y_1/\partial t$  ( $s = 0, t = t_x$ ),  $\partial y_1/\partial s$  ( $s = 0, t = t_x$ ) находятся по соотношениям на характеристиках, проведенных из точки  $(0, t_x)$  на линии  $s = -l$  и  $s = b_0 t$  (без учета отражений от края  $L_1$ )

$$\frac{\partial y_1}{\partial t}(0, t_x) = \frac{1}{2}y_0'(t_0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ y_0'\left(t_x - (n+2)\frac{l}{b_0}\right) - y_0'(t_0) \right]$$

причем  $t_{2n+2} \leq t_x \leq t_{2n+4}$  ( $t_k = t_0 + kl/b_0$ ).

Заметим, что приведенное решение будет справедливым для тел, заканчивающихся плоским торцом таким образом, что угол наклона их поверхности к оси  $y$  при этом меньше угла наклона струны в точке  $s = z(t)$ .

Найдем  $x_1(s, t)$ , ограничившись случаем  $y_0''(t) > 0$ . Примем вначале, что трение между частицами струны и поверхностью торца отсутствует. До прихода более быстрых продольных волн, отраженных от креплений  $s = -L_2$  и  $s = L_1$  решение  $x_1 = x_1(s, t)$ , очевидно, будет симметрично относительно середины торца, причем смещения частицы, которая в момент времени  $t = 0$  находилась на середине торца со временем происходить не будет, а значит  $x_1(-l, t) = 0$ . Поэтому для частиц струны на торце можно искать решение для  $x_1(s, t)$  только в области  $-l \leq s \leq z(t)$ , где в силу того, что  $y \equiv y_0(t)$ , оно удовлетворяет однородному уравнению (1.3) и с учетом условия  $x_1(-l, t) = 0$  имеет вид

$$x_1(s, t) = f_2(t + s/a_0) - f_2(t - s/a_0 + 2l/a_0)$$

Из факта непрерывности смещений и деформаций (при отсутствии трения) на краях торца, например, на правом, вытекают соотношения:

$$\left[ \frac{\partial x_1}{\partial t} \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)} \left( \frac{\partial y_1}{\partial s} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.3)$$

где [...] – разрыв величин на  $s = z(t)$ . Аналогично тому, как показано выше для  $y_1(s, t)$ , соотношения могут быть поставлены при  $s = 0$ . Обозначая через  $x_0(t)$  продольное перемещение частиц при  $s = 0$ , можем воспользоваться решением (2.8) при  $0 \leq s \leq a_0 t$ . При этом  $x_0(t) = f_2(t) - f_2(t - 2l/a_0)$ .

Второе соотношение (3.3) позволяет получить решение

$$x_1(s, t) = K_1 \left( t + 2 \frac{s+l}{a_0} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a_0}{b_0} \right) F' \left( t + \frac{s}{a_0} \right) + \Phi \left( t + \frac{s}{a_0} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a_0}{b_0} \right) F' \left( t - \frac{2l+s}{a_0} \right) - \Phi \left( t - \frac{2l+s}{a_0} \right), \quad \Phi(z) = \int y_0'^2(z) dz$$

При учете трения уравнение (1.3) на участке  $-l \leq s \leq z(t)$  при  $y_0''(t) > 0$  имеет вид ( $f$  – коэффициент трения):

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial s^2} + f y_0''(t)$$

При этом, очевидно, условия  $x_1(-l, t) = 0, [\partial x_1 / \partial t] = 0$  остаются без изменения, а второе соотношение (3.3) заменяется на

$$\frac{\partial x_{12}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)} \left( \frac{\partial y_{12}}{\partial s} \right)^2 = \left( \frac{\partial x_{11}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)} \left( \frac{\partial y_{11}}{\partial s} \right)^2 \right) e^{f(1/2\pi + \gamma)}$$

и представляет линеаризацию формулы Эйлера для струны, скользящей при наличии трения (индексы 1 и 2 при переменных  $x$  и  $y$  обозначают области соответственно слева и справа от точки  $s = z(t)$ ).

4. Рассмотрим тело, имеющее закругленную переднюю часть радиуса  $R$  идвигающееся по закону  $y = y_0(t)$ . В соответствии с [4], (где приведены соответствующие эксперименты) будем предполагать, что удар абсолютно неупругий, и поэтому частицы струны, соприкоснувшиеся с телом, остаются на нем. Из фиг. 3,  $a$  можно найти уравнение, связывающее смещения  $y$  и  $\bar{x}$  с радиусом  $R$  и смещением  $y_0(t)$ :

$$[R - (y_0 - y_1)]^2 + [s(1 + e_0) - \bar{x}]^2 = R^2 \quad (4.1)$$

Отсюда получим

$$y_1(s, t) = \sqrt{R^2 - [s(1 + e_0) - \bar{x}]^2} + y_0(t) - R \quad (4.2)$$

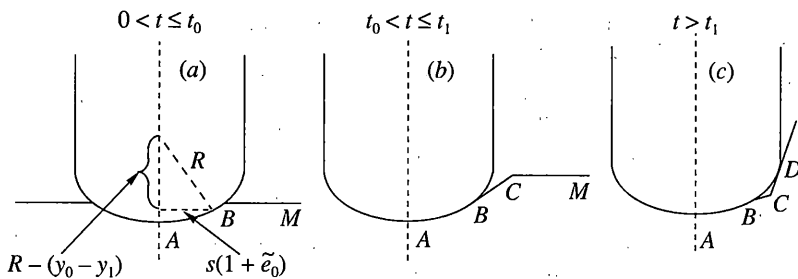
Ясно, что закон  $s = s^*(t)$  движения точки  $B$  определяется из условий  $y = 0, \bar{x} = 0$ :

$$s^*(t) = \frac{1}{1 + e_0} \sqrt{y_0(t)(2R - y_0(t))} \quad (4.3)$$

Откуда следует

$$\frac{ds^*}{dt} = \frac{(R - y_0(t)) y_0'(t)}{(1 + e_0) \sqrt{y_0(t)(2R - y_0(t))}} \quad (4.4)$$





Фиг. 3

Если начальная скорость встречи тела со струной  $y'_0(0) \neq 0$ , то

$$\frac{ds^*}{dt} \sim \frac{\sqrt{R}y'_0(0)}{(1 + e_0)\sqrt{2y_0(0)}} \quad \text{при } t \rightarrow 0$$

то есть  $ds^*/dt \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ . Следовательно, на некотором участке  $0 < t \leq t_0$  эта скорость превышает скорость поперечной волны  $b_0$ . Поэтому, в соответствии с [5], при  $0 < t \leq t_0$  предлагается схема, при которой форма струны при  $0 \leq s \leq s^*(t)$  совпадает с формой тела, а при  $s > s^*(t)$  она прямолинейная (что означает распространение только продольных волн по контуру АВ и горизонтальному участку ВМ). При этом в соответствии с [5] в точке В необходимо ввести сосредоточенную силу взаимодействия тела со струной. Очевидно, значение  $t_0$  определяется из условия  $ds^*/dt(t = t_0) = b_0$ .

При  $t > t_0$  по струне начнут распространяться поперечные волны, первая из которых  $s = s^*(t) + b_0(t - t_0)$ , и появится криволинейный участок ВС (фиг. 3, b). Для определения закона  $s^*(t)$  при  $t > t_0$  и определения решения  $y_1(s, t)$  упростим уравнение (4.2), учитывая, что  $y_0 \sim \hat{e}^{1/2}$ ,  $y \sim \hat{e}^{1/2}$ ,  $\bar{x} \sim \hat{e}$ . Тогда из (4.3) следует, что  $\sim \hat{e}^{1/4}$ , а выражение для  $y_1(s, t)$  принимает вид

$$y_0 - y_1 = \frac{s^2(1 + e_0)^2}{2R} \quad (4.5)$$

указывая, что при определении  $y_1$  перемещение частиц струны по телу несущественно, а скорость всех частиц одна и та же и равна  $y'_0(t)$ .

Проводя характеристику второго семейства из любой точки кривой  $s = s^*(t)$ , до пересечения с характеристикой  $s = s^*(t_0) + b_0(t - t_0)$  (за которой  $\partial y_1/\partial t = \partial y_1/\partial s = 0$ ), получаем  $\partial y_1/\partial t(s^*(t), t) = -b_0 \partial y_1/\partial s(s^*(t), t)$ , а, следовательно,

$$\partial y_1/\partial s(s^*(t), t) = -y'_0(t)/b_0 \quad (4.6)$$

Также  $\partial y_1/\partial s(s^*(t), t)$  может быть определен из (4.2):

$$\frac{\partial y_1}{\partial s}(s^*(t), t) = \frac{s^*(t)(1 + e_0)^2}{\sqrt{R^2 - (s^*(t))^2(1 + e_0)^2}} \quad (4.7)$$

Так как в точке В излом струны отсутствует, то закон движения  $s = s^*(t)$  при  $t > t_0$  получаем, приравняв выражения (4.6) и (4.7):

$$s^*(t) = \frac{1}{(1 + e_0)} \frac{y_0'(t)R}{\sqrt{(1 + e_0)^2 b_0^2 + y_0'^2(t)}} \quad (4.8)$$

Если  $y_1/R \ll 1$ , то формулы (4.7) и (4.8) примут вид:

$$\frac{\partial y_1}{\partial s}(s^*(t), t) = -\frac{s^*(t)(1 + e_0)^2}{R}, \quad s^*(t) = \frac{y_0'(t)R}{b_0(1 + e_0)} \quad (4.9)$$

В силу того, что  $y \equiv 0$  при  $s = s^*(t_0) + b_0(t - t_0)$  решение для  $y_1(s, t)$  имеет вид "простой" волны  $y_1 = f_1(s - b_0 t)$ . Удовлетворение условию  $y_1(s^*(t), t) = f_1(s^*(t) - b_0 t)$  с использованием (4.2), (4.8) позволяет выразить  $f_1$  через  $y_0$ .

При возвращении отраженной от конца  $s = L_1$  поперечной волны решение задачи существенно усложняется. Дело в том, что угол наклона струны за этой волной возрастает, а скорость частиц падает (в частности при  $y_0'(t) \equiv \text{const}$  скорость частиц равна нулю). Поэтому в определенный момент времени  $t_1$  возникает ситуация, изображенная на фиг.3, с: струна касается тела в некоторой точке  $D$ , расположенной перед В, при этом поперечная волна находится в точке С. При  $t > t_1$  возникает новая область около  $D$  присоединения струны с телом, которая в дальнейшем соединяется с предыдущей областью.

Заметим, что при торможении тела ( $y_0''(t > \tau) < 0$ ) отрыв струны от тела может произойти при  $y_0''(t) > b_0^2/R$ , что возможно только для тела очень больших размеров.

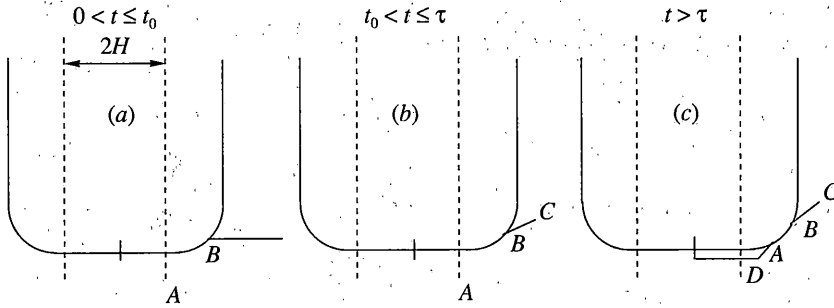
5. Рассмотрим тело с плоской частью длиной  $2H$  и закруглениями радиуса  $R$  (только правую половину), причем примем, что в начальный момент времени край плоской части приходится на точку  $s = 0$  (лагранжева координата второго края  $s = -2l$ , где  $l = H/(1 + e_0)$ ).

Обозначим через  $r^*(t)$  и  $s^*(t)$  траектории движения точек, ограничивающих часть струны, прилегающей к закруглению, соответственно слева и справа (на рис. 4 это точки А и В). Ясно, что при  $y_0''(t < \tau) \geq 0$   $r^*(t) = 0$ , а  $s^*(t)$  удовлетворяет формулам (4.3) при  $t < t_0$  и (4.8) при  $t_0 < t \leq \tau$  (при  $y/R \ll 1$  ей соответствует формула (4.9)). Форма струны определяется формой тела для  $0 < s \leq s^*(t)$ , а для  $s > s^*(t)$  решение находится так же, как в п. 4 (см. фиг. 4, а и 4, b).

Интерес в данном случае представляет поведение струны, начиная с момента  $t = \tau$ ,  $y_0''(t > \tau) < 0$ . Струна, как и в случае п. 3, оторвется от плоской части, но теперь точка отрыва  $r^*(t)$  будет перемещаться по закруглению радиуса  $R$ . Влево от точки  $s = r^*(t)$  начнут распространяться поперечные волны, первая из которых  $s = -b_0(t - \tau)$  и, кроме ВС, возникнет еще один криволинейный участок  $DA$  (фиг. 4, с). Находя  $r^*(t)$  при  $t > T$  аналогично  $s^*(t)$ , получим

$$r^*(t) = \frac{1}{1 + e_0} \frac{R[y_0'(T) - y_0'(t)]}{\sqrt{b_0^2(1 + e_0)^2 + [y_0'(T) - y_0'(t)]^2}} \quad (5.1)$$

Форма струны за волной  $s = -b_0(t - \tau)$  находится аналогично п. 4. С момента прихода отраженной от середины плоской части поперечной волны будут возникать новые зоны присоединения струны, как в п. 4.



Фиг. 4

Можно решить еще один вопрос: при каком условии границы  $r^*(t)$  и  $s^*(t)$  совпадут, т.е. струна практически оторвется от тела (рассматриваем интервал времени, не учитывая отражения от точки, соответствующей середине плоской части). Приравняв (4.8) и (5.1), получим  $y_0'(t) = y_0'(\tau)/2$ , что совпадает с формулой для торца. Формы тел, рассмотренные в п. 4, 5, охватывают случаи удара по струне молоточком фортепиано, но при этом  $\tau = 0$ .

6. Представленные выше результаты определения поперечно-продольных волн в струне при взаимодействии с ней тел, движущихся с произвольными законами изменения скорости со временем, позволяют во многих случаях решать и обратные задачи – определения законов движения  $y = y_0(t)$ ,  $x = x_0(t)$ , например, твердых тел, при взаимодействии со струной в том случае, когда дополнительные силы воздействия или известны, или отсутствуют.

Приведем основные этапы методики расчета движения твердых тел, имеющих перечисленные выше формы передних частей. Для уяснения ее сути примем, что никаких дополнительных сил (например, сил тяжести) на такое тело, имеющее массу  $m$  и начальную вертикальную скорость встречи со струной  $V_{00}$ , не действует.

Примем вначале, что удар точечный. Тогда из второго закона Ньютона следует, что

$$m y_0'' = T^- \sin \varphi^- + T^+ \sin \varphi^+ \quad (6.1)$$

$$m x_0'' = T^- \cos \varphi^- + T^+ \cos \varphi^+ \quad (6.2)$$

где знаки (+) и (-) означают соответствующие величины справа и слева от точки удара. Так как  $T^- = E(e_0 + \Delta e^-)$ ,  $T^+ = E(e_0 + \Delta e^+)$ , причем  $\Delta e^- \ll e_0$ ,  $\Delta e^+ \ll e_0$ , то уравнения (6.1), (6.2) примут вид

$$m y_0'' = E e_0 (\sin \varphi^- + \sin \varphi^+) + O(\varepsilon^{3/2}) \quad (6.3)$$

$$m x_0'' = E e_0 (\cos \varphi^- + \cos \varphi^+) + O(\varepsilon^2) \quad (6.4)$$

показывая, что динамика движения в главном приближении определяется параметром  $T_0/m$  ( $T_0 = E e_0$ ) и углами наклона струны по разные стороны от тела. Основное внимание уделим определению закона  $y = y_0(t)$ . До отражения поперечных волн от краев  $L_1$  и  $L_2$ , как следует из п. 2:

$$\sin \varphi^+ = \sin \varphi^- = \frac{1}{(1 + e_0) b_0} \frac{dy_0}{dt} = \frac{V_y^{(0)}}{(1 + e_0) b_0}$$

где  $V_y^{(0)}(t)$  – скорость тела на этом участке времени. Тогда на этом участке уравнение (6.3) примет вид

$$\frac{dV_y^{(0)}}{dt} = -\lambda V_y^0, \quad \lambda = \frac{2T_0}{(1+e_0)b_0} \quad (6.5)$$

откуда следует  $V_y^0(t) = V_{00}e^{-\lambda t}$ .

Примем вначале, что  $L_1 \ll L_2$  и за время воздействия тела со струной отраженная от  $L_2$  поперечная волна не возвратилась к телу. Тогда формула (6.5) справедлива до момента  $\tau_0 = 2L_1/b_0$  возвращения отраженной от  $L_1$  поперечной волны к телу. При  $t > \tau_0$  уравнение (6.3) с учетом (2.3) примет вид

$$dV_y^{(1)}/dt = -\lambda[V_y^{(1)} + V_y^{(0)}(t - \tau_0)]$$

откуда с учетом того, что  $V_y^0(\tau_0) = V_{00}e^{-\lambda\tau_0}$ , получим

$$V_y^{(1)} = V_{00}e^{-\lambda t} \left( 1 + \lambda e^{2\lambda L_1/b_0} \frac{2L_1}{b_0} - v e^{2\lambda L_1/b_0} t \right)$$

где  $V_y^{(1)}$  – значение скорости тела на участке  $\tau_0 \leq t \leq 2\tau_0$ .

При  $t > \tau_0$  уравнение (6.3) с учетом того, что  $V_y^{(2)}(2\tau_0) = V_y^{(1)}(2\tau_0)$ , дает

$$V_y^{(2)} = \left[ \frac{1}{2} \lambda^2 V_{00} e^{4\lambda L_1/b_0} t^2 - \lambda V_{00} e^{2\lambda L_1/b_0} \left( 1 + 2\lambda e^{2\lambda L_1/b_0} \frac{2L_1}{b_0} + e^{2\lambda L_1/b_0} \right) t + 1 + \lambda e^{2\lambda L_1/b_0} \frac{2L_1}{b_0} + \lambda e^{4\lambda L_1/b_0} \left( \frac{4L_1}{b_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 V_{00} e^{4\lambda L_1/b_0} \left( \frac{4L_1}{b_0} \right) V_{00} \right] e^{-\lambda t}$$

Продолжая указанную процедуру, находим скорости  $V_y^{(n)}$  на любом участке  $(n-1)\tau_0 \leq t \leq n\tau_0$ , причем нетрудно установить, что в формуле для  $V_y^{(n)}$  перед экспонентой  $e^{-\lambda t}$  будет стоять полином от  $t$  степени  $n$ . Коэффициент при старшей степени полинома будет иметь вид  $(-\lambda)^n e^{n\tau_0\lambda} V_{00}/n!$ . Определение  $V_y^{(n)}$  производится до того момента времени  $\hat{t}$ , пока не прекратится связь тела со струной за счет обращения в нуль и последующего изменения знака проекции равнодействующей сил натяжения на ось  $y$  (в правой части уравнения (6.3)). По найденному закону  $V_y(t)$  с учетом непрерывности поперечного смещения  $y = y_0(t)$  всюду, включая точки  $t = n\tau_0$ , находится закон изменения последнего со временем. Определение  $x = x_0(t)$  проводится аналогичным образом, причем, очевидно, на участке  $t < \tau_0$   $x_0(t) \equiv 0$ .

Из формулы (2.3) следует, что с каждым новым отражением поперечной волны от тела, пока последнее тормозится до остановки, проекция равнодействующей силы натяжения струны на ось  $y$  по модулю растет, приводя к увеличению модуля  $\dot{V}_y^{(n)}$  с ростом числа  $n$ . При этом в моменты  $t = n\tau_0$  имеет место скачкообразное увеличение модуля  $\dot{V}_y^{(n)}$ .

В том случае, если отраженная поперечная волна от крепления  $s = L_2$  подошла к телу, процедура расчета, очевидно меняется незначительно и усложняется лишь тем, что с  $t = 2L_2/b_0$  до  $t = 4L_2/b_0$  в формуле (6.3)  $\sin \varphi^-$  должен быть определен по формуле

$$\sin \varphi^- = \frac{1}{(1 + e_0)b_0} [V_y^{(1)}(y) + V_y^{(0)}(t - \tau_1)] \quad (n = 2)$$

А с  $t = 4L_2/b_0$  до  $t = 6L_2/b_0$  по формуле

$$\sin \varphi^- = \frac{1}{(1 + e_0)b_0} [V_y^{(2)}(y) + V_y^{(1)}(t - \tau_1) + V_y^{(0)}(t - 2\tau_1)]$$

и т.д.

Методика расчета динамики движения тел с другими носовыми частями, хотя и более сложная, но сохраняет особенности описанные выше. Так, в случае удара тела с торцевой передней частью уравнения (6.3), (6.4) видоизменяются за счет наличия двух точек 0,  $-2l$  (в обозначениях фиг.1), тормозящих тело, и принимают соответственно вид

$$m y_0'' = -T_0 (\sin \varphi^-(s = 0, t) + \sin \varphi^+(s = 0, t) + \sin \varphi^-(s = -2l, t) + \sin \varphi^+(s = -2l, t)) \quad (6.6)$$

$$m x_0'' = -T_0 (\cos \varphi^-(s = 0, t) + \cos \varphi^+(s = 0, t) + \cos \varphi^-(s = -2l, t) + \cos \varphi^+(s = -2l, t)) \quad (6.7)$$

где соответствующие значения тригонометрических функций определяются с использованием формул для  $dy/ds$  из п. 3. В силу положительности проекций натяжения на ось  $y$  в точках  $-2l, 0$  со стороны оторвавшейся части струны, торможение такого тела (при том же значении  $\gamma$ ) происходит медленнее, чем тел с заостренной передней частью.

При ударе телом с закругленной передней частью за начальный момент целесообразно принять момент, когда  $ds^{*+}/dt = ds^{*-}/dt = b_0$ , определяя с использованием схемы с сосредоточенными силами в точках излома струны [3], [4] значение скорости  $V_{00}$  и перемещения  $y_{00}$  к этому моменту времени. Тогда расчет ведется с использованием уравнений типа (6.3), (6.4), которые приводят к более сложным дифференциальным уравнениям за счет зависимостей  $\sin \varphi^+[s = s^{*+}(t)]$   $\sin \varphi^-[s = s^{*-}(t)]$  входящих в (6.3), (6.4). За счет этого же обстоятельства интервалы  $\tau_{i,n} = [2L_i + s^*(\tau_{i,n+1}) + s^*(\tau_{i,n})]/b_0$  ( $i = 1, 2$ ), оказываются разными при каждом очередном отражении поперечных волн от тела. Кроме того, как отмечено в п.4, при приближении отраженных от концов поперечных волн к закругленной передней части появляются дополнительные области отрыва и присоединения струны к телу. Очевидно, все значения проекций силы натяжения в точках отрыва и присоединения должны быть учтены при использовании второго закона Ньютона (по аналогии с формулами (6.6), (6.7)).

В случае удара телом, передняя часть которого представляет плоский торец, заканчивающийся скруглениями радиуса  $R$ , необходимо по описанной в п. 5 схеме учесть отрыв струны от торца (и движение точки отрыва по закруглению). Для двух последних форм передних частей, соответствующих, в частности, контурам молоточков фортепиано, заметное упрощение методики достигается при использовании естественного предположения  $s^{*+}(t)/L_2 \ll 1$ ,  $s^{*-}(t)/L_1 \ll 1$ . Тогда возможно использовать метод возмущений, снеся условия на линиях  $s = s^*(t)$  на некоторые фиксированные прямые  $s = s^* = \text{const}$ . При этом в главном приближении интервалы прихода отраженных от краев волн одинаковы. В рамках метода возмущений, очевидно, можно учесть и переменность натяжения (учтя члены порядка  $O(\hat{\epsilon}^{3/2})$ ,  $O(\hat{\epsilon}^2)$  в уравнениях (6.3), (6.4)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов Ю.А. К уточнению теории колебания музыкальных струн // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 4. С. 461–465.
2. Демьянов Ю.А. Постановка задач взаимодействия струны с возбудителем ее колебаний // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 6. С. 743–748.
3. Рахматулин Х.А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 6. С. 449–462.
4. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках // М.: Физматгиз, 1961. 399с.
5. Рахматулин Х.А. Поперечный удар по гибкой нити телом заданной формы. // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 23–34.
6. Демьянов Ю.А. Асимптотический метод решения задач распространения волн в нити. // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С.146–149.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. // М.: Наука, 1977. С. 735.

Москва

Поступила в редакцию  
24.01.2001