МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2003

УДК 533.6.013.42

© 2003 г. Е.Л. ГУСЕВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Исследуются задачи оптимального синтеза слоистых структур при воздействии акустических волн. Набор материалов, участвующих в проектировании, предполагается дискретным. Изучается возможность создания эффективных методов оптимального проектирования слоистых структур, реализующих предельные возможности по достижению заданного комплекса свойств. На основе качественного исследования необходимых условий оптимальности, связанных с нелокальными вариациями управляющих параметров, установлены экстремальные соотношения, характеризующие взаимосвязь параметров в оптимальных акустических структурах. Установленные экстремальные соотношения позволяют эффективно исследовать предельные возможности слоистых структур по управлению энергетическими характеристиками акустической волны.

1. В последние десятилетия существенный интерес вызывают вопросы взаимодействия волновых процессов различной физической природы с неоднородными структурами [1–10]. При этом центральной проблемой при исследовании такого рода задач является проблема исследования предельных возможностей по достижению заданного комплекса свойств, которых можно достичь на основе направленного выбора структуры неоднородной конструкции. Это связано с тем, что создание композиционных конструкций, материалов, покрытий с уникальными свойствами необходимо связано с исследованием их предельных возможностей. Предельные возможности соответствуют тому предельному уровню, которого можно достичь на основе направленного управления структурой композиционной конструкции.

В вариационной постановке исследование предельных возможностей сводится к проблеме создания эффективных методов построения глобально-оптимальных решений в специальных задачах оптимального управления комбинаторного типа, связанных с оптимальным синтезом неоднородных структур.

Будем исследовать случай распространения акустических волн в слоистой структуре в рамках линейной акустики. В этом случае распространение акустической волны может быть описано следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{1}{\rho_s}\nabla p_s = 0, \quad \frac{\partial p_s}{\partial t}+\rho_s c_s^2 \operatorname{div} v_s = 0 \tag{1.1}$$

Здесь ρ_s – плотность s-го слоя, p_s – давление в s-ом слое, v_s – вектор скорости частиц в s-ом слое, c_s – скорость распространения волны в s-ом слое.

С использованием метода разделения переменных и преобразования Фурье задача о распространении акустических волн в слоистой среде может быть сведена к нахождению решения следующей краевой задачи [11]:

$$\frac{\partial^2 f_s(z,\omega)}{\partial z^2}+k_s^2(\omega)f_s(z,\omega) = 0$$

$$b_{s-1} \le z \le b_s \quad (s = 0, \ldots, N+1)$$

$$f_s(b_{s-1}, \omega) = f_{s-1}(b_{s-1}, \omega)$$

$$\frac{\partial f_s(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} = \frac{\rho_s}{\rho_{s-1}} \frac{\partial f_{s-1}(b_{s-1}, \omega)}{\partial z} \quad (s = 1, \ldots, N+1) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial f_0(0, \omega)}{\partial z} + ik_0(\omega) f_0(0, \omega) = 2ik_0(\omega)$$

$$\frac{\partial f_{N+1}(l, \omega)}{\partial z} - ik_{N+1}(\omega) f_{N+1}(0, \omega) = 0$$

Функции $f_s(z, \omega)$ $(b_{s-1} \le z \le b_s,\ s = 0, \ldots, N+1)$ имеют смысл составляющих комплексных амплитуд давления, $k_s(\omega) = \omega(c_s^{-2} - c_0^{-2}\sin^2\vartheta_0)^{1/2}$ – проекция волнового вектора на ось z в s-ом слое.

Энергетический коэффициент пропускания $T(\omega)$ определяется через решение краевой задачи (1.2):

$$T(\omega) = \frac{c_0 \rho_0 \cos\vartheta_{N+1}}{c_{N+1}\rho_{N+1}\cos\vartheta_0} |f_{N+1}(l, \omega)|^2$$

Здесь ϑ_{N+1} – угол, под которым волна выходит из конструкции.

На дискретном наборе материалов физические свойства будут связаны некоторой функциональной зависимостью $c = c(\rho)$, позволяющей однозначно восстановить скорость распространения акустических волн в материале по известной плотности. В этом случае независимым физическим параметром будет являться только плотность ρ. Множество плотностей материалов допустимого набора обозначим через Λ.

Требуется спроектировать слоистую структуру, обеспечивающую наибольшее отражение акустических волн в одной области спектра и наибольшее пропускание в другой. Тогда задача оптимального синтеза может быть сформулирована как специальная задача оптимального управления, связанная с минимизацией критерия

$$J = \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \tau(\omega) \operatorname{mod}^2(f_{N+1}(l, \omega))\, d\omega \tag{1.3}$$

на решениях системы (1.2). Здесь $\omega_{\min}$, $\omega_{\max}$ – нижняя и верхняя границы фильтруемого диапазона частот, $\tau(\omega)$ $(-1 \le \tau(\omega) \le 1)$ – весовая функция (для задач синтеза "высокопросветляющих" акустических систем значения весовой функции отрицательны, а для задач синтеза акустических систем с высокой звукоизоляцией они положительны).

Рассмотрим вопрос о возможности выделения полной совокупности вариантов слоистых структур U^*, реализующих предельные возможности по достижению заданного комплекса свойств:

$$U^* = \{\rho^*(z) : J(\rho^*(z)) = \min_{\rho(z)} J(\rho(z))\} \tag{1.4}$$

Здесь $\rho(z)$ $(0 \le z \le l)$ – распределение плотности по толщине конструкции ($\rho(z) = \rho_s$, $b_{s-1} \le z \le b_s$, $s = 1, \ldots, N$).

Важное значение при решении данной проблемы имеет построение экстремальных соотношений, характеризующих взаимосвязь между параметрами оптимальных слоистых структур, которые позволяют исследовать влияние варьируемых параметров на структуру оптимальной конструкции.

Ограничимся в дальнейшем исследованием случая нормального падения акустической волны.

2. Сформулируем необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления (1.2)–(1.3). Введём функцию Гамильтона для s-го слоя:

$$\begin{gathered}
H(f_s, \dot{f}_s, \psi_s, \dot{\psi}_s; \rho)\big|_z = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{k^2(\rho, \omega)}{\rho}\alpha_s(z, \omega)d\omega + \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \rho\beta_s(z, \omega)d\omega \\
b_{s-1} \le z \le b_s \quad (s = 1, \ldots, N) \\
k(\rho, \omega) = \omega/c(\rho), \quad \rho \in \Lambda \\
\alpha_s(z, \omega) = -\frac{\rho_s}{k_s^2}\mathrm{Re}\dot{\psi}_s(z, \omega)f_s(z, \omega), \quad \beta_s(z, \omega) = \frac{1}{\rho_s}\mathrm{Re}\dot{f}_s(z, \omega)\psi_s(z, \omega)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

$\psi_s(z, \omega)$ $(b_{s-1} \le z \le b_s, s = 1, \ldots, N)$ – решение краевой задачи, сопряженной к (1.2) [11].

Пусть $\rho^*(z)$ $(0 \le z \le l)$ оптимальное распределение плотности по толщине конструкции, $f_s^*(z, \omega)$, $\psi_s^*(z, \omega)(b_{s-1} \le z \le b_s, s = 0, \ldots, N)$ соответствующие ему решения исходной (1.2) и сопряженной систем. Тогда на оптимальном решении

$$H(*; \rho^*(z))|_z = \max_{\rho \in \Lambda} H(*; \rho)|_z, \quad 0 \le z \le l \tag{2.2}$$

Пропущенные аргументы в представлении функции Гамильтона (2.2) подсчитываются на оптимальном решении.

Отдельно рассмотрим случаи гармонической и негармонической акустической волны.

3. Для случая гармонической акустической волны на оптимальном решении функции Гамильтона могут быть преобразованы к виду

$$\begin{gathered}
H(*; \rho)|_z = \alpha_s^*(z)\rho\left[\frac{k^2(\rho)}{\rho^2} - \frac{k_s^{*2}}{\rho_s^{*2}}\right] + \frac{\rho}{\rho_s^*}L^* \\
b_{s-1}^* \le z \le b_s^*, \quad s = 1, \ldots, N^*
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Амплитудные коэффициенты пропускания W и отражения V представим в виде:

$$W = \tau\exp(i\vartheta), \quad V = \sigma\exp(i\varphi), \quad 0 \le \tau, \quad \sigma \le 1, \quad 0 \le \vartheta, \quad \varphi \le 2\pi$$

Отдельно рассмотрим случаи, когда допустимый набор состоит из двух и нескольких (более чем двух) материалов допустимого набора.

1. Допустимый набор состоит из двух материалов. В этом случае качественный анализ необходимых условий оптимальности (2.2) позволяет установить следующую взаимосвязь между параметрами в оптимальной конструкции.

Плотность материала первого слоя оптимальной конструкции удовлетворяет экстремальному соотношению:

$$\begin{gathered}
\rho_1^* = \begin{cases} \arg\max\limits_{\rho \in \Lambda}[\rho(Z^2(\rho) - Z_0^2)], & \text{если} \quad 0 < \varphi < \pi \\ \arg\min\limits_{\rho \in \Lambda}[\rho(Z^2(\rho) - Z_0^2)], & \text{если} \quad \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \\
x^* = \arg\operatorname*{extr}_x f(x), \quad \text{если} \quad f(x^*) = \operatorname*{extr}_x f(x) \\
z(\rho) = 1/\rho c(\rho), \quad z_0 = 1/\rho_0 c_0
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Оптимальная толщина первого слоя удовлетворяет следующему экстремальному соотношению:

$$\Delta_1^* = \frac{1}{2k_1^*}\arccos\left\{\frac{(Z_1^{*2} - Z_0^2)[2\rho_1^* Z_1^{*2} - \rho_2^*(Z_1^{*2} + Z_2^{*2})]\cos\gamma(\varphi)}{\rho_2^*(Z_0^2 + Z_1^{*2})(Z_2^{*2} - Z_1^{*2})}\right\} - \frac{1}{2k_1^*}\gamma(\varphi)$$

$$\gamma(\varphi) = \operatorname{arctg}\left[\frac{2Z_0 Z_1^* \operatorname{ctg}\varphi}{Z_1^{*2} + Z_0^2}\right], \quad Z_s = \frac{1}{\rho_s c_s} \tag{3.3}$$

Толщины первого и второго слоев оптимальной конструкции связаны следующим экстремальным соотношением:

$$Z_2^* \operatorname{ctg} y_2^* = -Z_1^* \sigma_{2,1}^* \operatorname{ctg}(2y_1^* + \gamma(\varphi)) + \frac{Z_1^* \tau_{2,1}^* \tau_{0,1}^* \cos(\gamma(\varphi))}{\sigma_{0,1}^* \sin(2y_1^* + \gamma(\varphi))}$$

$$y_s^* = k_s^* \Delta_s^*, \quad \Delta_s^* \tag{3.4}$$

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{2}(1 + \delta_{i,j}^2), \quad \tau_{i,j} = \frac{1}{2}(1 - \delta_{i,j}^2), \quad \delta_{i,j} = Z_i/Z_j$$

Здесь Δ_s^* – оптимальная толщина s-го слоя. Для случая гармонического воздействия толщины внутренних слоев оптимальной конструкции связаны соотношением [11]:

$$\Delta_s^* = \Delta_{s-2}^* \quad (s = 4, \ldots, N^* - 1) \tag{3.5}$$

Полученные экстремальные соотношения могут быть применены для выделения полной совокупности вариантов слоистых структур U^*, реализующих предельные возможности по достижении заданного комплекса свойств.

2. *Допустимый набор состоит из нескольких (более двух) материалов*. Можно показать, что функции $\alpha_s^*(z)$ в представлении функции Гамильтона (3.1) могут быть представлены в виде:

$$\alpha_s^*(z) = C_s^* \sin(2k_s^*(z - b_{s-1}^*)) + D_s^* \cos(2k_s^*(z - b_{s-1}^*)) + E_s^*$$

$$b_{s-1}^* \le z \le b_s^* \quad (s = 1, \ldots, N^*)$$

где C_s^*, D_s^*, E_s^* – вещественные константы. Для $s = 1$ данные константы могут быть представлены в виде:

$$C_1^* = -\frac{\rho_1^* \tau(\omega)}{k_1^*(\omega)}\left(\frac{(1-\rho^2)Z_0}{Z_{N^*+1}}\right)\rho\cos\varphi$$

$$D_1^* = \frac{\rho_0 \tau(\omega)}{2k_0(\omega)}\left(1 + \frac{Z_0^2}{Z_1^{*2}}\right)\left(\frac{(1-\rho^2)Z_0}{Z_{N^*+1}}\right)\rho\sin\varphi \tag{3.6}$$

$$E_1^* = \frac{\rho_0 \tau(\omega)}{2k_0(\omega)}\left(1 - \frac{Z_0^2}{Z_1^{*2}}\right)\left(\frac{(1-\rho^2)Z_0}{Z_{N^*+1}}\right)\rho\sin\varphi$$

Анализ условий сопряжения решений на границах раздела слоев позволяет получить для коэффициентов C_s^*, D_s^*, E_s^*, входящих в состав функции $\alpha_s^*(z)$ следующие рекуррентные соотношения:

$$C_s^* = \delta_{s-1,s}^*(C_{s-1}^*\cos 2y_{s-1}^* - D_{s-1}^*\sin 2y_{s-1}^*)$$

$$D_s^* = \sigma_{s-1,s}^*(C_{s-1}^*\sin 2y_{s-1}^* + D_{s-1}^*\cos 2y_{s-1}^*) + \tau_{s-1,s}^* E_{s-1}^* \tag{3.7}$$

$$E_s^* = \tau_{s-1,s}^*(C_{s-1}^*\sin 2y_{s-1}^* + D_{s-1}^*\cos 2y_{s-1}^*) + \sigma_{s-1,s}^* E_{s-1}^* \quad (s = 2, \ldots, N^*)$$

Полученные экстремальные соотношения могут быть применены для эффективного выделения всей совокупности вариантов конструкций, реализующих предельные возможности по достижению заданного комплекса свойств. Выделение искомой совокупности вариантов конструкций может быть осуществлено по следующей схеме.

Для каждого значения скалярного параметра φ ($0 \le \varphi \le 2\pi$) осуществляется следующая последовательность действий: на основе экстремальных соотношений (2.2), (3.2), (3.6), (3.7) находятся оптимальные толщины слоев Δ_s^* ($s = 1, \ldots, N^*$) и оптимальные физические параметры слоев ρ_s^* ($s = 1, \ldots, N^*$). Вычисления с применением данных экстремальных соотношений осуществляются следующим образом. По вычисленным оптимальной толщине ($s - 1$)-го слоя Δ_{s-1}^* и оптимальной плотности s-го слоя ρ_s^* по формулам (3.7) находятся C_s^*, D_s^*, E_s^* и вычисляется $\alpha_s^*(z)$. Находится точка z^* ($b_{s-1}^* < z \le l$), в которой максимальное значение функции $H(*; \rho)|_z$ (3.1) достигается одновременно на двух элементах ρ_s^* и ρ^*. Полагается $\Delta_s^* = z^* - b_{s-1}^*$, $\rho_{s+1}^* = \rho^*$. Далее процесс продолжается аналогично.

Для скомпонованной конструкции вычисляется амплитудный коэффициент пропускания $V(\varphi)$ как функция скалярного параметра φ. Выделяется совокупность конструкций, для которых выполняется условие $V(\varphi) = \varphi$. Подмножество таких конструкций, соответствующих наименьшему значению критерия качества, принимается за искомую совокупность вариантов конструкций, реализующих предельные возможности.

Для случая нефиксированной общей толщины конструкции на основе данной методики может быть исследована зависимость структуры оптимальной конструкции от изменения ее общей толщины.

4. Перейдем к рассмотрению общего случая негармонической акустической волны.

Первоначально рассмотрим случай, когда при некоторой частоте $\omega^* \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ значение энергетического коэффициента пропускания должно быть предельно близко к требуемому значению. Обозначим через q предельно-достижимое при частоте $\omega = \omega^*$ значение энергетического коэффициента пропускания. Тогда в рассматриваемой постановке задача оптимального синтеза будет заключаться в построении множества всех вариантов структур, реализующих предельные возможности U^* (1.4) при дополнительном условии вида:

$$T(\omega^*) = q \tag{4.1}$$

Обозначим через U_0^* полную совокупность вариантов неоднородных структур, доставляющих минимальное значение критерию качества (1.3) для случая гармонического воздействия с частотой ω^*. Поскольку предельно-достижимое значение энергетического коэффициента пропускания при частоте $\omega = \omega^*$ достигается для случая гармонической акустической волны с этой частотой, то соответствующее множество всех вариантов неоднородных структур U^* в задаче оптимального синтеза в рассматриваемой постановке (1.2), (1.3), (4.1) будет являться подмножеством множества U_0^*:

$$U^* = \left\{ u^* \in U_0^* : J(u^*) = \min_{u \in U_0^*} J(u) \right\} \tag{4.2}$$

Таким образом, в рассматриваемой постановке задача оптимального синтеза может быть полностью решена.

Перейдем к рассмотрению общего случая.

Для достаточно широкого круга задач оптимального синтеза может быть выделена такая частота $\omega^* \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$, в которой значение энергетического коэффициента пропускания слоистой структуры должно отличаться от предельно достижимого значения на достаточно малую величину δ. Предельно же достижимое значение энергетического коэффициента пропускания при частоте ω^* соответствует предельно-достижимому значению энергетического коэффициента пропускания $g^*_{\omega^*}(\omega^*)$ для случая гармонического воздействия с этой частотой. Поэтому сформулированное условие может быть записано в виде

$$\left| g(\omega^*) - g^*_{\omega^*}(\omega^*) \right| \le \delta \tag{4.3}$$

Рассмотрим задачу оптимального синтеза (1.2), (1.3) с дополнительным условием вида (4.3). Пусть $V_\delta^*(\omega^*)$ совокупность решений, реализующих предельные возможности по достижению заданного комплекса свойств в задаче оптимального синтеза (1.2), (1.3) с дополнительным условием вида (4.3). Основываясь на результатах работ [12, 13] по теории многозначных отображений, можно показать, что для любого $\alpha_0 > 0$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что для всех $0 \le \delta < \delta_0$ будет выполнено включение

$$\begin{gathered} V_\delta^*(\omega^*) \subset S_{\alpha_0}(V_0^*(\omega^*)) \\ S_{\alpha_0}(V_0^*(\omega^*)) = \{u(\cdot) : \rho_U(u(\cdot), V_0^*(\omega^*)) \le \alpha_0\} \\ \rho_U(u(\cdot), V_0^*(\omega^*)) = \inf_{v(\cdot) \in V_0^*(\omega^*)} \rho_U(u(\cdot), v(\cdot)) \end{gathered} \tag{4.4}$$

где в соответствии с введенным обозначением $V_0^*(\omega^*)$ – совокупность решений, реализующих предельные возможности в задаче оптимального синтеза (1.2), (1.3) с ограничением вида (4.3), соответствующим случаю $\delta = 0$.

Таким образом, множества $V_0^*(\omega^*)$ и $V_\delta^*(\omega^*)$ при достаточно малом δ имеют близкую структуру. Установление свойства (4.4) позволяет эффективно построить множество $V_\delta^*(\omega^*)$ на основе знания множества $V_0^*(\omega^*)$. На основе теории многозначных отображений для рассматриваемого класса задач может быть эффективно выделена полная совокупность решений, реализующих предельные возможности, если известна полная совокупность решений, реализующих предельные возможности, для случая гармонической акустической волны.

5. При решении разнообразных задач, возникающих в физике и приборостроении существенный интерес представляет проблема исследования предельных возможностей по управлению энергетикой волновых процессов, которых можно достичь на основе направленного выбора структуры неоднородной конструкции (физических свойств материалов слоев, толщин слоев, числа слоев, а также порядка взаимного сочленения слоев с различными физическими свойствами в конструкции). При этом решить данную проблему на основе полного перебора и сравнения друг с другом всех допустимых вариантов конструкций не удается даже с применением высокобыстродействующих компьютеров. Альтернативы же полному перебору в настоящее время нет.

Качественный анализ необходимых условия оптимальности, связанных с нелокальными вариациями управляющих параметров, позволил установить в акустических задачах оптимального синтеза существование экстремальных соотношений во взаимосвязи параметров в оптимальных структурах. Полученные экстремальные соотношения позволяют исследовать влияние различных параметров на структуру оптимальной конструкции, а также разработать на их основе эффективные методы исследования предельных возможностей неоднородных структур по управлению энергетическими характеристиками акустических волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коротяев Е.Л.* Распространение волн в одномерной периодической среде // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 2. С. 171–174.
2. *Иманалиев М.И., Ханов Р.К., Шамгунов Ш.Д.* Взаимодействие волн нагрузки в упругой среде со слоистыми преградами // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 2. С. 167–169.
3. *Hesthaven J.S.* On the analysis and construction of perfectly matched layers for the line arized Euler eguations // J. Comput. Phys. 1998. V. 142. No. 1. P. 129–147.
4. *Michael E.-R.* Simplifed models of transient elastic waves in finite axisymmetric layered media // J. Acoust. Soc. Amer. 1998. V. 104. No. 6. P. 3369–3384.
5. *Shupikov A.N., Smetankina N.V., Sheludko H.A.* Selection of optimal parameters of nultilayer plates at nonstationary loading // Meccanica. 1998. V. 33. No. 6. P. 553–564.
6. *Thompson J.K.* Optimization of vehicle interior noise treatment // Sound and Vibration. 1999. V. 33. No. 6. P. 12–15.
7. *Russel S.Y., Lin W., Han-Pin Kan, Deo R.B.* Composite sandvich panel design // Aerosp. Eng. 1995. V. 15. No. 4. P. 33–37.
8. *Smetankina N.V., Sotrikhin S.Y., Shupikov A.N.* Theoretical and experimental investigation of vibration of multilayer plates under the action of impulse and impact loads // Int. J. Solids and Struct. 1995. V. 32. No. 8–9. P. 1247–1258.
9. *Huang C., Kroplin B.* On the optimization of composite laminated plates // Eng. Comput. 1995. V. 12. No. 5. P. 403–414.
10. *Hagiwara I., Nagamatsu A.* Review of optimum design in dynamics // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. 1995. V. 61. No. 587. P. 2645–2652.
11. *Гусев Е.Л.* Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993. 262 с.
12. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. 1963. Т. 61. № 2. С. 211–224.
13. *Лисковец О.А.* Некорректные задачи с замкнутым необратимым оператором // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 4. С. 636–646.

Якутск

Поступила в редакцию
16.04.2001