МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2003

УДК 531.3

© 2003 г. А.В. ДИДИН

О МЕХАНИКЕ В N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Классическая механика создавалась для частного случая – трехмерного пространства. Как следствие, таким ее базовым понятиям, как момент количества движения, момент сил, тензор инерции, угловая скорость, были поставлены в соответствие неадекватные математические объекты. Это, по мнению автора, и привело к вытеснению классической механики из ряда областей другими теориями. Так известно, что момент количества движения, момент сил, тензор инерции и угловая скорость имеют определения, зависящие от размерности пространства. Например, момент количества движения является псевдовектором в трехмерном пространстве, числом в двухмерном пространстве, тензор инерции – матрицей и числом соответственно. Следовательно, нельзя прямо переносить свойства этих объектов, выявленные в пространстве одной размерности, на пространство другой размерности, уже просто потому, что в пространствах разных размерностей эти объекты имеют разную математическую природу, и, значит, другую физическую суть. Оказалось возможным так переопределить эти понятия, чтобы они не зависели от размерности пространства. При этом получилась возможность применять законы, в которых участвуют выше перечисленные понятия, для подпространства любой размерности из N-мерного пространства без выяснения числа N, и с общих позиций, удалось выявить дополнительные свойства момента количества движения.

Целью работы является прояснение физического смысла и свойств понятий классической механики с использованием наиболее простого широко доступного математического аппарата.

Для избежания разночтения постараемся определить или пояснить на конкретных примерах все используемые в дальнейшем термины, которые за рамками трехмерного пространства могут быть поняты некорректно. Определения не претендуют на строгость и служат только для внесения ясности. Многие из них можно найти в [1]. Везде имеется в виду инерциальная система координат, если не оговорено обратное.

Два вектора будем называть ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. Плоскостью будем называть двухмерное подпространство (в отличие от подпространства размерности N–1 [2]). Под плоскостью вращения будем понимать не только одну конкретную плоскость, но и все параллельные ей плоскости. Две плоскости будем называть ортогональными, если для любых двух векторов из разных плоскостей их скалярное произведение равно нулю. Аналогично для подпространств любой размерности. Два подпространства будем называть ортогональными, если для любых двух векторов из разных подпространств их скалярное произведение равно нулю.

Это не совпадает с привычным лексиконом из пространства трех измерений, так, например, часто плоскости OXY и OXZ называют ортогональными, мы про них будем говорить, что они пересекаются под прямым углом или перпендикулярны.

Пусть имеется четырехмерное Евклидово пространство, в котором задан ортогональный базис $OXYZS$. Ось Z этого пространства ортогональна плоскости XY и имеет с ней только одну общую точку. Плоскость XY ортогональна плоскости ZS и имеет с ней только одну общую точку O. Это звучит непривычно, но легко доказывается от противного. Пусть кроме начала координат – точки O, плоскости имеют еще одну общую точку M, тогда вектор ОМ принадлежит обеим плоскостям, в определении ортогональности говорится о любых векторах из разных плоскостей, поэтому мы можем выбрать в обеих плоскостях ОМ, и его скалярное произведение на себя не равно нулю, что противоречит определению ортогональности плоскостей. Отсюда вывод: такой точки M не существует.

Так как в плоскости ZS есть только одна точка, принадлежащая и плоскости XY, то можно говорить о вращении (повороте) в плоскости ZS вокруг плоскости XY как об обычном плоском вращении в плоскости ZS вокруг точки O. В плоскости ZS можно, например, изобразить соответствующую круговую орбиту – окружность с центром в точке O. Аналогично, можно говорить о вращении (повороте) в плоскости вокруг ортогонального ей подпространства любой размерности или принадлежащего ему тела. Все плоскости параллельные плоскости ZS $(0, 0, z, s)$, и являющиеся плоскостями того же вращения, можно получить, изменяя константы $x0$ и $y0$ в описании $(x0, y0, z, s)$. Центрами вращения в них будут точки $(x0, y0, 0, 0)$.

Вместо классических определений, введем новые, универсальные определения для тензора инерции, момента сил и момента количества движения следующим образом.

1. “Тензор инерции” твердого тела:

$$J = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i^T$$

где m_i – масса i-й материальной точки системы (в данном случае твердого тела), $\boldsymbol{r}_i$ – ее радиус-вектор, а знак $\otimes$ в данной работе везде означает прямое произведение векторов (два вектора дают матрицу).

2. Момент сил:

$$M = \sum_i \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{r}_i^T - \left(\sum_i \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{r}_i^T\right)^T$$

где $\boldsymbol{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i-ю материальную точку системы.

3. Момент количества движения твердого тела:

$$H = \Omega \circ J - (\Omega \circ J)^T$$

где Ω – матрица угловой скорости твердого тела [3]. Например, в развернутом матричном виде для четырёхмерного пространства она выглядит так:

$$\Omega = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{21} & \omega_{31} & -\omega_{41} \\ \omega_{21} & 0 & -\omega_{32} & \omega_{42} \\ -\omega_{31} & \omega_{32} & 0 & -\omega_{43} \\ \omega_{41} & -\omega_{42} & \omega_{43} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yz} & \omega_{zx} & -\omega_{sx} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} & \omega_{sy} \\ -\omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 & -\omega_{sz} \\ \omega_{sx} & -\omega_{sy} & \omega_{sz} & 0 \end{Vmatrix}$$

С ними закон изменения момента количества движения в инерциальной системе координат запишется так: $dH/dt = M$.

Перед доказательством приведем еще одно определение момента количества движения для системы материальных точек, через их массы, радиус-вектора и полные скорости

$$H = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{r}_i^T - \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{r}_i^T\right)^T$$

Оно легко получается из приведенного ранее , если учесть, что

$$m_i\mathbf{v}_{ir} = \Omega \circ m_i\mathbf{r}_i$$

где $\mathbf{v}_{ir}$ – составляющая скорости i-й материальной точки системы, ортогональная ее радиус-вектору, и дополнить выражение до полных скоростей материальных точек.

Приведем вывод закона сохранения момента количества движения, непосредственно из законов Ньютона. Пусть имеется система материальных точек в N-мерном пространстве, взаимодействующих между собой посредством центральных сил, на которую действуют внешние силы. Запишем второй закон Ньютона для каждой материальной точки этой системы:

$$\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{j\neq i}\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_i$$

где справа стоит сумма внутренних сил плюс внешняя сила. Второй закон Ньютона для системы материальных точек получают суммированием равенств, для каждой точки системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i\mathbf{v}_i\right) = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Умножим до суммирования левую и правую части равенств на радиус-вектор соответствующей материальной точки (имеется в виду прямое векторное произведение)

$$\left(\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)\right)\otimes\mathbf{r}_i^T = \mathbf{F}_i\otimes\mathbf{r}_i^T + \sum_{j\neq i}\mathbf{F}_j\otimes\mathbf{r}_i^T$$

и затем просуммируем по всем точкам системы:

$$\sum_i\left(\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)\right)\otimes\mathbf{r}_i^T = \sum_i\mathbf{F}_i\otimes\mathbf{r}_i^T + \sum_i\sum_{j\neq i}\mathbf{F}_j\otimes\mathbf{r}_i^T$$

Далее разложим первый член на две части

$$\sum_i\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{r}_i^T) - \sum_i m_i\mathbf{v}_i\otimes\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i^T) = \sum_i\mathbf{F}_i\otimes\mathbf{r}_i^T + \sum_i\sum_{j\neq i}F_j\otimes\mathbf{r}_i^T$$

$$\sum_i\frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{r}_i^T) - \sum_i m_i\mathbf{v}_i\otimes\mathbf{v}_i^T = \sum_i\mathbf{F}_i\otimes\mathbf{r}_i^T + \sum_i\sum_{j\neq i}\mathbf{F}_j\otimes\mathbf{r}_i^T$$

Теперь вычтем из равенства такое же транспонированное равенство. При этом исчезнут второй (он перейдет в себя при транспонировании) и последний члены. Последний член исчезнет при учете третьего закона Ньютона. Для этого надо сгруппировать попарно произведения сил на радиус-вектора для взаимодействующих точек и, учитывая, что силы равны по модулю, но противоположны по направлению, вынести за скобки общие члены. В скобках получатся вектора, соединяющие эти точки и коллинеарные силам, следовательно, они обнулятся при антисимметризации

$$\mathbf{F}_{ij}\otimes\mathbf{r}_i^T + \mathbf{F}_{ji}\otimes\mathbf{r}_j^T = \mathbf{F}_{ij}\otimes(\mathbf{r}_i^T - \mathbf{r}_j^T) = \mathbf{F}_{ij}\otimes\mathbf{r}_{ij}^T = \frac{|F_{ij}|}{|r_{ij}|}\mathbf{r}_{ij}\otimes\mathbf{r}_{ij}^T$$

где $\mathbf{F}_{ij}$ – сила, с которой i-я точка действует на j-ю, а $\mathbf{r}_{ij}$ – вектор от одной точки до другой.

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{r}_i^T) - \left(\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{r}_i^T)\right)^T = \sum_i \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{r}_i^T - \left(\sum_i \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{r}_i^T\right)^T$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i (m_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{r}_i^T) - \left(\sum_i m_i \cdot \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{r}_i^T\right)^T\right) = \sum_i \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{r}_i^T - \left(\sum_i \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{r}_i^T\right)^T$$

Выражение слева под производной по времени – это момент количества движения, а справа – момент сил, что и требовалось доказать.

Нетрудно проверить, что в частных случаях двух- и трехмерного пространства новые определения покомпонентно в точности совпадают с классическими. Так для трехмерного пространства момент количества движения твердого тела будет

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{zx} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{zx} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} \\ -\omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yx}(J_{xx}+J_{yy}) + \omega_{zy}J_{xz} + \omega_{zx}J_{yz} & \omega_{zx}(J_{xx}+J_{zz}) - \omega_{zy}J_{xy} - \omega_{yx}J_{yz} \\ \omega_{yx}(J_{xx}+J_{yy}) - \omega_{zy}J_{xz} - \omega_{zx}J_{yz} & 0 & -\omega_{zy}(J_{yy}+J_{zz}) + \omega_{zx}J_{xy} + \omega_{yx}J_{xz} \\ -\omega_{zx}(J_{xx}+J_{zz}) + \omega_{zy}J_{xy} + \omega_{yx}J_{yz} & \omega_{zy}(J_{yy}+J_{zz}) - \omega_{zx}J_{xy} - \omega_{yx}J_{xz} & 0 \end{Vmatrix}$$

где выражения типа $J_{xx} + J_{yy}$ по определению совпадают с полярными моментами инерции системы. Для двухмерного пространства:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yz} \\ \omega_{yx} & 0 \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{xy} & J_{yy} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{xy} & J_{yy} \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yz} \\ \omega_{yx} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yx}(J_{xx}+J_{yy}) \\ \omega_{yx}(J_{xx}+J_{yy}) & 0 \end{Vmatrix}$$

И, наконец, для одномерного пространства

$$\|0\| \circ \|J_{xx}\| + \|J_{xx}\| \circ \|0\| = \|0\|$$

Теперь проиллюстрируем то, как выглядит в развёрнутом виде момент количества движения твердого тела для четырёхмерного пространства, но так как матрицы большие, то ограничимся первыми двумя столбцами.

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yx} & \omega_{zx} & -\omega_{sx} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} & \omega_{sy} \\ -\omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 & -\omega_{sz} \\ \omega_{sx} & -\omega_{sy} & \omega_{sz} & 0 \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} & J_{xs} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} & J_{ys} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} & J_{zs} \\ J_{xs} & J_{ys} & J_{zs} & J_{ss} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} & J_{xs} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} & J_{ys} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} & J_{zs} \\ J_{xs} & J_{ys} & J_{zs} & J_{ss} \end{Vmatrix} \circ \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yz} & \omega_{zx} & -\omega_{sx} \\ \omega_{yx} & 0 & -\omega_{zy} & \omega_{sy} \\ -\omega_{zx} & \omega_{zy} & 0 & -\omega_{sz} \\ \omega_{sx} & -\omega_{sy} & \omega_{sz} & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{yx}(J_{xx}+J_{yy}) + \omega_{zy}J_{xz} - \omega_{sy}J_{xu} + \omega_{zx}J_{yz} - \omega_{sx}J_{yz} & \\ \omega_{yx}(J_{xx}+J_{yy}) - \omega_{zy}J_{xz} + \omega_{sy}J_{xs} - \omega_{zx}J_{yz} + \omega_{sx}J_{ys} & 0 & \dots \\ -\omega_{zx}(J_{xx}+J_{zz}) + \omega_{zy}J_{xy} - \omega_{sz}J_{xs} + \omega_{yx}J_{yz} - \omega_{sx}J_{zs} & \omega_{zy}(J_{yy}+J_{zz}) - \omega_{zx}J_{xy} - \omega_{sz}J_{ys} - \omega_{yx}J_{xz} - \omega_{sy}J_{zs} & \\ \omega_{sx}(J_{xx}+J_{ss}) - \omega_{sy}J_{xy} + \omega_{sz}J_{xz} + \omega_{yx}J_{ys} - \omega_{zx}J_{zs} & -\omega_{sy}(J_{yy}+J_{ss}) + \omega_{sx}J_{xy} + \omega_{sz}J_{yz} - \omega_{yx}J_{xs} + \omega_{zy}J_{zs} & \end{Vmatrix}$$

Добавились только члены, содержащие центробежные моменты инерции.

Модуль момента количества движения системы определим следующим образом:

$$H = \left(\sum_{\alpha=1}^{\frac{1}{2}N(N-1)} H_\alpha^2\right)^{1/2}$$

где суммирование квадратов компонент момента количества движения производится по всем координатным плоскостям.

Для трехмерного случая формула для модуля момента количества движения совпадает с формулой для длины вектора, и только рассматривая пространство с количеством измерений не равным трем, можно понять различия. Так в четырёхмерном пространстве суммируются квадраты шести компонент, а не четырех, в двухмерном – одной.

Приведем доказательство независимости модуля определенного таким образом момента количества движения системы от системы координат. Это будет доказательством того, что такой момент количества движения является универсальной (для пространства с любым количеством измерений) характеристикой системы, не зависящей от выбора системы координат. На примере двух материальных точек в двухмерном пространстве преобразуем квадрат момента количества движения к независимому от системы координат виду

$$H^2 = (\mathbf{p}_1^2\mathbf{r}_1^2 - (\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1)^2) + (\mathbf{p}_2^2\mathbf{r}_2^2 - (\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2)^2) - 2((\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2) - (\mathbf{p}_1\mathbf{r}_2)(\mathbf{p}_2\mathbf{r}_1))$$

Выражение не зависит от размерности пространства, поэтому результат справедлив для пространства любой размерности, точно так же, как и для скалярного произведения векторов, входящего в формулы. Для большего количества материальных точек будет больше членов типа последнего, содержащих перекрестные скалярные произведения. Поэтому доказательство можно распространить на систему из любого количества материальных точек для пространства любой размерности.

Посмотрим теперь, как может выглядеть матрица угловой скорости или момента количества движения в подходящем базисе (насколько можно упростить матрицу за счёт выбора базиса). В [1] приведена следующая теорема о том, что ортогональную матрицу можно привести к виду

$$\left\| \begin{matrix} A(\varphi_1) & & & & & & \\ & \ldots & & & & & \\ & & A(\varphi_m) & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ldots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ldots \end{matrix} \right\|, \quad A(\varphi) = \left\| \begin{matrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{matrix} \right\|$$

На пустых местах стоят нули.

Если повторить процедуру получения угловой скорости для такой матрицы поворота (в таком базисе), то получим следующее выражение для угловой скорости (и то же самое для момента количества движения):

$$\left\| \begin{matrix} B_1 & & & & & \\ & \ldots & & & & \\ & & B_\sigma & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ldots & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ldots \end{matrix} \right\|, \quad B_i = \left\| \begin{matrix} 0 & -\omega_\alpha \\ \omega_\alpha & 0 \end{matrix} \right\|$$

На пустых местах стоят нули.

Отсюда становится ясным, что в N-мерном пространстве одновременно могут существовать $N/2$ независимых вращений с разными угловыми скоростями или периодами (от $N/2$ конечно же берется только целая часть) в разных ортогональных плоскостях, при этом, за исключением вырожденных случаев, плоскости определяются однозначно и не зависят от выбора системы координат или вообще способа описания.

Другими словами, в N-мерном пространстве любое вращение можно представить в виде суперпозиции максимум $N/2$ независимых плоских вращений в ортогональных плоскостях, плоскости при этом в невырожденном случае определяются однозначно. Будем называть их главными вращениями, а числа ω_α – главными угловыми скоростями. Соответствующие плоскости будем называть главными плоскостями вращений, а соответствующий базис – главным базисом вращения. И, наконец, приведенный выше вид матрицы будем называть главным видом.

Аналогично, можно привести к такому же виду (главному) матрицу момента количества движения, где в качестве B_i будет матрица $\begin{Vmatrix} 0 & -H_\alpha \\ H_\alpha & 0 \end{Vmatrix}$, где H_α главные моменты количества движения. Соответствующие плоскости будем называть главными плоскостями момента количества движения, а соответствующий базис – главным базисом момента количества движения.

Главные плоскости вращений не всегда совпадают с главными плоскостями момента количества движения.

Совокупность $N/2$ чисел – компонентов момента количества движения в его главных плоскостях, является его количественной характеристикой независящей от ориентации (системы координат). Взятые по модулю, они могли бы называться главными моментами количества движения. Эти плоскости однозначно, за исключением вырожденных случаев, задают разбивку пространства на двухмерные подпространства, и полностью определяются движением (вращением) системы независимо от системы координат.

Новые формулировки позволяют легко анализировать возможные формы и размерность тел, поверхностей (пленок), состоящих из притягивающихся между собой элементов, устойчивость которых обеспечивается за счет центробежных сил, так как N-мерную задачу всегда можно свести к нескольким плоским задачам, например, в главных плоскостях момента количества движения. Так же, новые формулировки упрощают создание универсальных функций и алгоритмов на языках программирования для вращения объектов в N-мерном пространстве и интерфейсов с ними. Так, любое из возможных вращений твердого тела можно задать, указав главные плоскости (например, парой векторов, состоящих из комбинации базисных ортов) и плоские вращения в них, при этом не обязательно знать об измерениях, не затрагиваемых данным вращением, или убеждаться в ортогональности матрицы. Это показывает, что в N-мерном случае удобными являются понятия: главные плоскости вращения и момента количества движения, а не оси.

Рассмотрим пример: вращение в четырехмерном пространстве $OXYZS$ двухмерной поверхности, описанной системой уравнений:

$$x = r_{xy}\cos(\varphi_{xy}), \quad y = r_{xy}\sin(\varphi_{xy}) \tag{1}$$

$$z = r_{zs}\cos(\varphi_{zs}), \quad s = r_{zs}\sin(\varphi_{zs}) \tag{2}$$

где φ_{xy} и φ_{zs} – параметризируют всю поверхность, а r_{xy} и r_{zs} – константы, проекции радиус-вектора на соответствующие плоскости.

Если придадим вращение поверхности в плоскости OXY, то координаты z и s изменяться не будут, а изменение координат x и y можно учесть следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= r_{xy}\cos(\omega_{xy}t + \varphi_{xy}) \\ y &= r_{xy}\sin(\omega_{xy}t + \varphi_{xy}) \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда очевидно, что в плоскости OZS тоже можно задать движение, например, с другой угловой скоростью (периодом):

$$\begin{aligned} z &= r_{zs}\cos(\omega_{zs}t + \varphi_{zs}) \\ s &= r_{zs}\sin(\omega_{zs}t + \varphi_{zs}) \end{aligned} \tag{4}$$

На первый взгляд кажется, что при совпадении частот вращения в плоскостях OXY и OZS все движение можно свести к вращению в некой третьей плоскости, делящей углы OXZ и OYS пополам. Достаточно преобразовать систему координат поворотами на угол $\alpha = \pi/4$ в плоскостях OXZ и OYS, чтобы убедиться, что это не так:

$$x' = \cos(\alpha)r_{xy}\cos(\omega_{xy}t + \varphi_{xy}) + \sin(\alpha)r_{zs}\cos(\omega_{zs}t + \varphi_{zs})$$

$$y' = \cos(\alpha)r_{xy}\sin(\omega_{xy}t + \varphi_{xy}) + \sin(\alpha)r_{zs}\sin(\omega_{zs}t + \varphi_{zs})$$

$$z' = \cos(\alpha)r_{zs}\cos(\omega_{zs}t + \varphi_{zs}) - \sin(\alpha)r_{xy}\cos(\omega_{xy}t + \varphi_{xy})$$

$$s' = \cos(\alpha)r_{zs}\sin(\omega_{zs}t + \varphi_{zs}) - \sin(\alpha)r_{xy}\sin(\omega_{xy}t + \varphi_{xy})$$

В главных плоскостях любая точка поверхности совершает равномерное движение по окружностям в OXY и OZS. А в $OX'Y'$ и $OZ'S'$ легко найти точки, которые при $\omega_{xy} = \omega_{zs}$ и $r_{xy} = r_{zs}$ совершают колебания вдоль прямой ($\alpha = \pi/4$, $\varphi_{xy} = \varphi_{zs} + \pi/2$) или движение по эллипсу. И только некоторые подмножества точек поверхности будут совершать движение по окружности ($\alpha = \pi/4$, $\varphi_{xy} = \varphi_{zs}$).

Посмотрим на этот пример с точки зрения динамики. Какие силы могут обеспечить описанное вращение заданной поверхности? Центробежные ускорения любой точки поверхности можно разложить на составляющие $\omega_{xy}^2 r_{xy}$ и $\omega_{zs}^2 r_{zs}$ в ортогональных плоскостях OXY и OZS. Очевидно, что вектор центробежного ускорения будет проходить через начало координат только при $\omega_{xy} = \omega_{zs}$. Далее очевидны два простейших случая при наличии в начале координат центрально симметрично притягивающего центра.

1. Поверхность может состоять из не взаимодействующих между собой материальных точек, движущихся каждая в своей плоскости по окружности. При этом $\omega_{xy} = \omega_{zs}$, а соотношения между r_{xy} и r_{zs} могут быть любыми.

2. Поверхность представляет из себя равномерно натянутую пленку. При этом если $r_{xy} \neq r_{zs}$, то и $\omega_{xy} \neq \omega_{zs}$, так как вклад натяжения пленки в центробежное ускорение по разным плоскостям разный из-за разного радиуса кривизны в этих плоскостях.

В первом случае, из двухмерных поверхностей можно набрать трехмерную поверхность – сферу или любую часть сферы, вращающуюся как одно целое. Для этого достаточно выполнять соотношение:

$$r_{xy} = r\cos(\psi), \quad r_{zs} = r\sin(\psi) \tag{5}$$

где r – радиус сферы, а ψ – параметр пробегающий отрезок в 2π.

Во втором случае, увеличить размерность поверхности вращающейся как целое без введения дополнительных сил (например, напряжений сдвига) невозможно.

Из примера видна интересная особенность вращений в N-мерном пространстве: это возможность получать устойчивые $N/2$-мерные поверхности (пленки) за счет вращения в $N/2$ ортогональных плоскостях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 303 с.
2. *Картан Э.* Теория спиноров. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 223 с.
3. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 319 с.

Королев

Поступила в редакцию
22.01.2001