

УДК 624.07.534.1

© 2003 г. И.В. МИШУСТИН, Л.С. РЫБАКОВ

КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ФЕРМ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

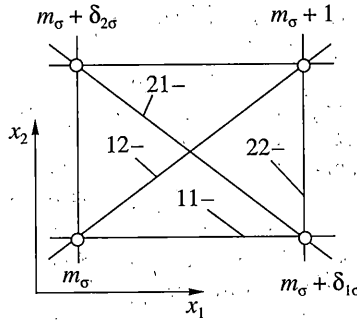
В [1–4] с помощью метода “склейки” построены строгие замкнутые структурные теории ряда плоских регулярных и квазирегулярных стержневых систем ферменного типа, позволяющие ставить и решать широкий круг задач статики таких систем.

В настоящей статье указанный выше подход распространяется на задачи о малых колебаниях плоских упругих ферм ортогональной структуры с учетом внутреннего трения по модели Фойхта. Основное внимание уделено изучению колебаний фермы с элементарной ячейкой в форме прямоугольника из стержней с двумя не взаимодействующими между собой на пересечении диагональными стержнями. Путем удаления из такой фермы соответствующей группы стержней образуется достаточно широкий класс регулярных, квазирегулярных и даже нерегулярных ферм ортогональной структуры. Данная в начале общая строгая постановка задачи о малых колебаниях исходной фермы детально реализована для проблемы собственных ее колебаний без учета внутреннего трения и проблемы вынужденных колебаний с учетом внутреннего трения. Обе проблемы проиллюстрированы числовыми примерами.

1. Общая постановка задачи. Рассмотрим плоскую стержневую систему, представляющую собой периодическое повторение вдоль осей x_1, x_2 фрагмента ортогональной структуры, показанного на фиг. 1. Как видно, система состоит из четырех семейств различных, вообще говоря, стержней, а именно, горизонтальных, вертикальных и восходящих и нисходящих диагональных стержней, которые условимся называть соответственно 11-, 22-, 12- и 21-стержнями, и узлов, расположенных на пересечении стержней первых двух семейств. По предположению стержни упругие, однородные и соединены между собой в узлах шарнирно; диагональные стержни разных семейств вне узлов между собой не взаимодействуют.

В силу дискретной двумерности структуры для нумерации любых ее элементов (узлов и $\alpha\beta$ -стержней; $\alpha, \beta = 1, 2$) требуются два целочисленных параметра, играющие для вводимых ниже переменных величин роль дискретных аргументов. Обозначим их символами m_1, m_2 или кратко m_σ (здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2), и будем считать, что они изменяются (растут) в направлении осей x_σ соответственно. Условимся текущему узлу и исходящим из него $\alpha\beta$ -стержням присваивать один и тот же номер (m_1, m_2) или кратко (m_σ) (на фиг. 1 указана сокращенная нумерация узлов). В таком случае $\alpha\alpha$ -стержень с номером (m_σ) будет соединять узлы (m_σ), ($m_\sigma + \delta_{\alpha\sigma}$), а диагональные 12- и 21-стержни опять же с номером (m_σ) – соответственно узлы (m_σ), ($m_\sigma + 1$) и (m_σ), ($m_\sigma + \delta_{1\sigma} - \delta_{2\sigma}$) (здесь и далее $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера).

Области изменения параметров m_σ для элементов фермы зависят от ее внешней формы. Если граница фермы – прямоугольник, то для узлов фермы можно принять $m_\sigma = 0, 1, 2, \dots, M_\sigma$, для $\alpha\alpha$ -стержней $m_\sigma = 0, 1, 2, \dots, M_\sigma - \delta_{\alpha\sigma}$, а для диагональных 12- и 21-стержней соответственно $m_\sigma = 0, 1, 2, \dots, M_\sigma - 1$ и $m_\sigma - \delta_{2\sigma} = 0, 1, 2, \dots, M_\sigma - 1$. Здесь $M_\sigma > 0$ – заданные целые числа. При иных конфигурациях границы фермы начальные и конечные значения параметров m_σ будут, вообще говоря, иными. Более того, граничные значения одного из параметров могут оказаться функциями другого параметра.



Фиг. 1

Нетрудно видеть, что путем исключения из описанной структуры отдельных стержней можно получить различные частные регулярные, квазирегулярные и даже нерегулярные фермы. К регулярной структуре приводит исключение всего какого-либо семейства стержней, а к квазирегулярной – упорядоченного подмножества стержней одного или нескольких семейств. При этом удаление стержней не должно приводить к геометрической изменчивости системы.

Ниже используются линейные операторы сдвига ∇_{α}^{\pm} и $\nabla_{12}^{\pm\pm}$, $\nabla_{12}^{\pm\mp}$ смысл которых на примере отвлеченной функции $\psi[m_1, m_2] = \psi[m_{\sigma}]$ дискретных аргументов m_{σ} поясняют равенства (здесь и далее суммирование по повторяющемуся индексу не предполагается)

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}^{\pm} \psi[m_{\sigma}] &= \psi[m_{\sigma} \pm \delta_{\alpha\sigma}], \quad \nabla_{\alpha}^{+} \nabla_{\alpha}^{-} = 1, \quad \nabla_{12}^{\pm\pm} \psi[m_{\sigma}] = \psi[m_{\sigma} \pm 1] \\ \nabla_{12}^{\pm\mp} \psi[m_{\sigma}] &= \psi[m_{\sigma} \pm \delta_{1\sigma} \mp \delta_{2\sigma}], \quad \nabla_{12}^{\pm\pm} = \nabla_{21}^{\pm\pm} = \nabla_1^{\pm} \nabla_2^{\pm}, \quad \nabla_{12}^{\pm\mp} = \nabla_{21}^{\mp\pm} = \nabla_1^{\pm} \nabla_2^{\mp} \end{aligned} \quad (1.1)$$

С их помощью образуются частные разностные операторы первого порядка

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha}^{\pm} \psi[m_{\sigma}] &= \pm \psi[m_{\sigma} \pm \delta_{\alpha\sigma}] \mp \psi[m_{\sigma}], \quad \Delta_{\alpha}^{\pm} = \pm \nabla_{\alpha}^{\pm} \mp 1 \\ \Delta_{(12)}^{\pm} \psi[m_{\sigma}] &= \pm \psi[m_{\sigma} \pm 1] \mp \psi[m_{\sigma}], \quad \Delta_{(12)}^{\pm} = \Delta_{(21)}^{\pm} = \pm \nabla_{12}^{\pm\pm} \mp 1 \\ \Delta_{[12]}^{\pm} \psi[m_{\sigma}] &= \pm \psi[m_{\sigma} \pm \delta_{1\sigma} \mp \delta_{2\sigma}] \mp \psi[m_{\sigma}], \quad \Delta_{[12]}^{\pm} = -\Delta_{[21]}^{\mp} = \pm \nabla_{12}^{\pm\mp} \mp 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

посредством которых могут быть сформированы и разностные операторы более высокого порядка. Так, например, для разностных операторов второго порядка, определяемых равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha}^2 \psi[m_{\sigma}] &= \psi[m_{\sigma} + \delta_{\alpha\sigma}] - 2\psi[m_{\sigma}] + \psi[m_{\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}] \\ \Delta_{(12)}^2 \psi[m_{\sigma}] &= \psi[m_{\sigma} + 1] - 2\psi[m_{\sigma}] + \psi[m_{\sigma} - 1] \\ \Delta_{[12]}^2 \psi[m_{\sigma}] &= \psi[m_{\sigma} + \delta_{1\sigma} - \delta_{2\sigma}] - 2\psi[m_{\sigma}] + \psi[m_{\sigma} - \delta_{1\sigma} + \delta_{2\sigma}] \end{aligned}$$

справедливы тождества (см. (1.1), (1.2)):

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha}^2 &= \Delta_{\alpha}^{+} \Delta_{\alpha}^{-} = \Delta_{\alpha}^{+} - \Delta_{\alpha}^{-} = \nabla_{\alpha}^{+} - 2 + \nabla_{\alpha}^{-} \\ \Delta_{(12)}^2 &= \Delta_{(12)}^{+} \Delta_{(12)}^{-} = \Delta_{(12)}^{+} - \Delta_{(12)}^{-} = \nabla_{12}^{++} - 2 + \nabla_{12}^{-} \\ \Delta_{[12]}^2 &= \Delta_{[12]}^{+} \Delta_{[12]}^{-} = \Delta_{[12]}^{+} - \Delta_{[12]}^{-} = \nabla_{12}^{+-} - 2 + \nabla_{12}^{+} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Введенные операторы позволяют записывать формулы и уравнения в переменных с несмещенными текущими значениями дискретных аргументов, отказываясь ради краткости от явного указания этих аргументов при символах самих переменных.

Формирование динамической модели упругой системы сводится к моделированию ее инерционных свойств и сил внутреннего трения.

Что касается моделирования инерционных свойств, то здесь можно идти двумя путями.

Первый из них приближенный и самый простой. Он основан на методе сосредоточенных масс в версии, предполагающей сведение погонных масс стержней к сосредоточенным узловым массам. При таком подходе можно вполне ограничиться учетом только осевого деформирования упругих стержней, как это обычно и делается при статическом анализе деформирования ферм. Соответствующий вариант теории малых колебаний фермы получается из ее статической структурной теории [2] с помощью принципа Даламбера путем внесения в уравнения равновесия узлов их приведенных инерционных сил.

Второй путь наиболее строгий и потому более сложный. В основе его лежит учет реального распределения инерционных свойств элементов упругой системы, и именно он положен в основу последующих исследований. На этом пути уже нельзя ограничиться рассмотрением только осевого деформирования стержней, ибо влияние локальных изгибных деформаций стержней оказывается существенным для точного воспроизведения упругих и, что не менее важно, инерционных сил системы в целом. Это в полной мере относится и к тому варианту метода сосредоточенных масс, когда распределенные массы стержней заменяются внеузловыми сосредоточенными массами на их упругих осях.

В свете сказанного геометрические, упругие и инерционные свойства рассматриваемой фермы описываются длинами $l_{\alpha\beta}$, жесткостями $g_{\alpha\beta}$ на растяжение–сжатие и $\gamma_{\alpha\beta} = i_{\alpha\beta}^2 l_{\alpha\beta}^2 g_{\alpha\beta}$ на изгиб и погонными $\rho_{\alpha\beta}$ массами $\alpha\beta$ -стержней ($i_{\alpha\beta}$ – отнесенные к $l_{\alpha\beta}$ радиусы инерции их поперечных сечений), а также собственными (сосредоточенными) массами узлов M , если, конечно, таковые имеются в наличии. Регулярность структуры фермы в широком смысле предполагает неизменность перечисленных параметров в пределах фиксированного семейства ее элементов.

Будем считать, что ферма изготовлена из одного материала, силы внутреннего трения в котором пропорциональны скоростям деформаций. В рамках модели Бернулли, принимаемой для всех стержней, это предположение можно выразить формулой $\sigma_{\alpha\beta} = E(\epsilon_{\alpha\beta} + \xi \dot{\epsilon}_{\alpha\beta})$, где $\sigma_{\alpha\beta}$ – нормальное напряжение в поперечном сечении $\alpha\beta$ -стержня, $\epsilon_{\alpha\beta}$ – деформация удлинения его продольных волокон, E и ξ – соответственно модуль Юнга и коэффициент затухания материала; точкой сверху обозначена производная по времени t .

Следуя методу склейки, расчленим рассматриваемую упругую систему на изолированные элементы – узлы и расположенные между ними стержни и проведем их динамический анализ с учетом сил взаимодействия и геометрических условий сопряжения с соседними элементами.

Пусть l – некоторый параметр с размерностью длины, за который можно принять любой геометрический параметр фермы (например, l_{12}), и будем полагать, что искомые переменные величины с размерностью длины отнесены к l , а локальная осевая координата $\alpha\beta$ -стержня $x \in [0, 1]$ – к $l_{\alpha\beta}$.

Введем для произвольной точки упругой линии $\alpha\beta$ -стержня следующие обозначения: $u_{\alpha\beta}(x, t)$ и $v_{\alpha\beta}(x, t)$ – соответственно осевое смещение и прогиб; $n_{\alpha\beta}(x, t)$ и $q_{\alpha\beta}(x, t)$ – осевая и перерезывающая силы; $m_{\alpha\beta}(x, t)$ – изгибающий момент; $p_{\alpha\beta}(x, t)$ и $r_{\alpha\beta}(x, t)$ – заданные погонные осевая и поперечная нагрузки. Смещение узла в направлении оси x_{α} и действующую на него (узел) в том же направлении внешнюю сосредоточенную силу обозначим символами $U_{\alpha}(t)$ и $P_{\alpha}(t)$.

Заметим, что введенные переменные величины являются к тому же функциями дискретных аргументов m_{σ} , так что следовало бы, например, писать $v_{\alpha\beta}(x, t; m_1, m_2)$, $U_{\alpha}(t; m_1, m_2)$

или более кратко $v_{\alpha\beta}(x, t; m_{\sigma}), U_{\alpha}(t; m_{\gamma})$. Однако в соответствии с принятым выше соглашением эти аргументы там, где это не может привести к недоразумению, явно не указываются. Этого же соглашения будем придерживаться и в отношении локальной переменной x и времени t .

Уравнения динамического равновесия изолированного $\alpha\beta$ -стержня в проекциях на его ось и поперечное к ней направление (без учета инерции вращения) имеют вид (производные по x и t обозначаются сверху соответственно штрихами и точками):

$$l_{\alpha\beta}^{-1} n'_{\alpha\beta} - l\rho_{\alpha\beta} \ddot{u}_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta} = 0, \quad l_{\alpha\beta}^{-1} q'_{\alpha\beta} - l\rho_{\alpha\beta} \ddot{v}_{\alpha\beta} + r_{\alpha\beta} = 0$$

Подставляя в них зависимости

$$n_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^*(u'_{\alpha\beta} + \xi u'_{\alpha\beta}), \quad m_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}^* l_{\alpha\beta} (v''_{\alpha\beta} + \xi v''_{\alpha\beta}) \quad (1.4)$$

$$q_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}^{-1} m'_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}^* (v'''_{\alpha\beta} + \xi v'''_{\alpha\beta}), \quad g_{\alpha\beta}^* = g_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}^{-1}, \quad \gamma_{\alpha\beta}^* = \gamma_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}^{-3}$$

приходим к уравнениям движения изолированного $\alpha\beta$ -стержня

$$g_{\alpha\beta}^* (v''_{\alpha\beta} + \xi v''_{\alpha\beta}) - l_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} \ddot{u}_{\alpha\beta} + l_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.5)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^* (v'''_{\alpha\beta} + \xi v'''_{\alpha\beta}) + l_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} \ddot{v}_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.6)$$

Геометрические условия сопряжения стержней и узлов записываются следующим образом (в формулах (1.7)–(1.10) в круглых скобках за переменной величиной указаны значения x , $c_{\alpha} = l_{\alpha\alpha} l_{12}^{-1}$):

$$u_{\alpha\alpha}(0) = U_{\alpha}, \quad u_{12}(0) = c_1 U_1 + c_2 U_2, \quad u_{21}(0) = c_1 U_1 - c_2 U_2 \quad (1.7)$$

$$v_{\alpha\alpha}(0) = U_{3-\alpha}, \quad v_{12}(0) = -c_2 U_1 + c_1 U_2, \quad v_{21}(0) = c_2 U_1 + c_1 U_2$$

$$u_{\alpha\alpha}(1) = \nabla_{\alpha}^{+} U_{\alpha}, \quad u_{12}(1) = \nabla_{12}^{++} (c_1 U_1 + c_2 U_2), \quad u_{21}(1) = \nabla_{12}^{+} (c_1 U_1 - c_2 U_2) \quad (1.8)$$

$$v_{\alpha\alpha}(1) = \nabla_{\alpha}^{+} U_{3-\alpha}, \quad v_{12}(1) = \nabla_{12}^{++} (-c_2 U_1 + c_1 U_2), \quad v_{21}(1) = \nabla_{12}^{+} (c_2 U_1 + c_1 U_2)$$

Уравнения динамического равновесия изолированных внутренних узлов структуры в проекциях на оси x_{α} имеют вид

$$N_{\alpha\alpha} - \nabla_{\alpha}^{-} n_{\alpha\alpha}(1) + Q_{3-\alpha, 3-\alpha} - \nabla_{3-\alpha}^{-} q_{3-\alpha, 3-\alpha}(1) + c_{\alpha} \{ N_{12} - \nabla_{12}^{-} n_{12}(1) - (-1)^{\alpha} [N_{21} - \nabla_{12}^{+} n_{21}(1)] \} + \quad (1.9)$$

$$+ c_{3-\alpha} \{ (-1)^{\alpha} [Q_{12} - \nabla_{12}^{-} q_{12}(q)] + Q_{21} - \nabla_{12}^{+} q_{21}(1) \} - l M \ddot{U}_{\alpha} + P_{\alpha} = 0$$

где $N_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta}(0)$ и $Q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}(0)$ – начальные значения осевой и перерезывающей сил $\alpha\beta$ -стержня. Эти уравнения следует дополнить уравнениями равновесия свободных изолированных граничных узлов, выполняющих здесь роль статических граничных условий. Они получаются из равенств (1.9), записанных для соответствующих граничных значений m_{σ} , путем отбрасывания в них величин, указывающих на несуществующие стержни. Если же на граничные узлы наложены геометрические связи, предписывающие им смещения $U_{\alpha}^*(t)$, то отвечающие этим узлам уравнения равновесия заменяются геометрическими граничными условиями вида $U_{\alpha}(t) = U_{\alpha}^*(t)$, где, в частности, может оказаться, что все или отдельные $U_{\alpha}^*(t) \equiv 0$. В дальнейшем, говоря об уравнениях равновесия внутренних и свободных граничных узлов, будем ссылаться на уравнения (1.9) и их аналоги, полагая, что они уже дополнены статическими граничными условиями.

Заметим еще, что для всех стержней должны выполняться условия

$$v''_{\alpha\beta}(0) = v''_{\alpha\beta}(1) = 0 \quad (1.10)$$

шарнирно соединения их в узлах между собой. Кроме того, должны быть заданы начальные условия

$$\begin{aligned} U_{\alpha}(0) &= U_{\alpha}^0, & u_{\alpha\beta}(x, 0) &= u_{\alpha\beta}^0(x), & v_{\alpha\beta}(x, 0) &= v_{\alpha\beta}^0(x) \\ \dot{U}_{\alpha}(0) &= \dot{U}_{\alpha}^0, & \dot{u}_{\alpha\beta}(x, 0) &= \dot{u}_{\alpha\beta}^0(x), & \dot{v}_{\alpha\beta}(x, 0) &= \dot{v}_{\alpha\beta}^0(x) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где, подчеркнем, стоящие справа известные величины обязаны удовлетворять геометрическим условиям сопряжения (1.7), (1.8).

Итак, в строгой постановке общая задача о динамической поведении изучаемой фермы описывается уравнениями (1.4)–(1.11), непосредственное решение которых затруднительно. Весьма актуальным в связи с этим представляется применение метода главных координат, опирающегося на решение задачи о собственных колебаниях рассматриваемой упругой системы.

Прежде чем приступить к детальному изучению названных проблем, заметим, что поставленная выше динамическая задача допускает различные обобщения. Выделим среди них лишь то, которое связано с заменой в уравнениях (1.7), (1.8) величин $u_{\alpha\beta}(0)$, $v_{\alpha\beta}(0)$, $u_{\alpha\beta}(1)$, $v_{\alpha\beta}(1)$ на $u_{\alpha\beta}(0) - d_{\alpha\beta}^{(0)}$, $v_{\alpha\beta}(0) - e_{\alpha\beta}^{(0)}$, $u_{\alpha\beta}(1) + d_{\alpha\beta}^{(1)}$, $v_{\alpha\beta}(1) + e_{\alpha\beta}^{(1)}$ соответственно, где $d_{\alpha\beta}^{(0)}$, $e_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $d_{\alpha\beta}^{(1)}$, $e_{\alpha\beta}^{(1)}$ – допускаемые взаимные смещения начал и концов $\alpha\beta$ -стержней и прилежащих к ним узлов. Такие искусственно вводимые несовместности смещений дают возможность влиять на взаимодействие элементов системы либо до, либо в процессе, либо же после решения задачи. В последнем случае из уже построенного аналитического решения одной общей задачи удастся извлечь готовые, по существу, решения других частных задач.

Постоянные или изменяющиеся во времени несовместности могут выступать и как задаваемые, и как искомые величины. Как задаваемые они предстают, например, при имитации полных предварительных деформаций стержней различного происхождения. Типичная ситуация с искомыми несовместностями имеет место при динамическом анализе поврежденной системы – системы, в которой отсутствует какой-либо стержень. В этом случае в исходной неповрежденной системе вводятся несовместности для исключаемого стержня, которые затем разыскиваются из условия равенства нулю его внутренних сил на концах.

2. Собственные колебания консервативной системы. Чтобы получить уравнения собственных колебаний рассматриваемой упругой системы без учета внутреннего трения, достаточно опустить в уравнениях предыдущего пункта все внешние воздействия, положить равным нулю коэффициент затухания и отбросить начальные условия.

С целью формулировки соответствующей дискретно-континуальной задачи на собственные значения воспользуемся стандартной процедурой метода разделения переменных, в данном случае времени t и остальных аргументов x, m_{σ} . Пусть $\Phi_{\alpha\beta}(t)$, $\Psi_{\alpha\beta}(t)$ и $\Phi_{\alpha}(t)$ описывают предполагаемый в этой процедуре закон изменения во времени смещений $u_{\alpha\beta}(x, t, m_{\sigma})$, $v_{\alpha\beta}(x, t, m_{\sigma})$ и $U_{\alpha}(t, m_{\sigma})$ соответственно. В силу геометрических условий сопряжения (1.7), (1.8) и гармонического характера собственных колебаний

$$\Phi_{\alpha\beta}(t) = \Psi_{\alpha\beta}(t) = \Phi_{\alpha}(t) = f(t) = -\omega^{-2} \ddot{f}(t)$$

где ω – параметр собственной частоты. Если для амплитудных значений всех зависимых переменных использовать прежние обозначения самих переменных, то указанное раз-

деление приводит к дифференциально-разностной задаче на собственные значения

$$u''_{\alpha\beta}(x) + \omega_{\alpha\beta}^2 u_{\alpha\beta}(x) = 0, \quad \omega_{\alpha\beta}^2 = \omega^2 \rho_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}^2 / g_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

$$v_{\alpha\beta}''''(x) - \eta_{\alpha\beta}^4 v_{\alpha\beta}(x) = 0, \quad \eta_{\alpha\beta}^4 = \omega^2 \rho_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}^4 / \gamma_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}^2 l_{\alpha\beta}^{-2} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha} - \nabla_{\alpha}^- n_{\alpha\alpha}(1) + Q_{3-\alpha, 3-\alpha} - \nabla_{3-\alpha}^- q_{3-\alpha, 3-\alpha}(1) + \\ + c_{\alpha} \{ N_{12} - \nabla_{12}^- n_{12}(1) - (-1)^{\alpha} [N_{21} - \nabla_{12}^+ n_{21}(1)] \} + \\ + c_{3-\alpha} \{ (-1)^{\alpha} [Q_{12} - \nabla_{12}^- q_{12}(1)] + Q_{21} - \nabla_{12}^+ q_{21}(1) \} + \omega^2 l m U_{\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

с дополнительными зависимостями

$$\dot{n}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^* u'_{\alpha\beta}, \quad q_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}^* v_{\alpha\beta}'''' \quad (2.4)$$

и условиями (1.7), (1.8) и (1.10). Сведем эту задачу к обобщенной дискретной (разностной) задаче на собственные значения.

С помощью общего решения уравнения (2.1):

$$u_{\alpha\beta}(x) = u_{\alpha\beta}(0) \tilde{c}_{\alpha\beta}(x) + (g_{\alpha\beta}^*)^{-1} N_{\alpha\beta} \tilde{s}_{\alpha\beta}(x) \quad (2.5)$$

$$\tilde{c}_{\alpha\beta}(x) = \cos \omega_{\alpha\beta} x, \quad \tilde{s}_{\alpha\beta}(x) = \omega_{\alpha\beta}^{-1} \sin \omega_{\alpha\beta} x$$

первой формулы (2.4) и соответствующих геометрических условий сопряжения (1.7), (1.8) приходим к зависимостям

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}^* \tilde{\Delta}_{\alpha}^+ U_{\alpha}, \quad n_{\alpha\alpha}(1) = g_{\alpha\alpha}^* \nabla_{\alpha}^+ \tilde{\Delta}_{\alpha}^- U_{\alpha} \\ N_{12} = g_{12}^* \tilde{\Delta}_{(12)}^+(c_1 U_1 + c_2 U_2), \quad n_{12}(1) = g_{12}^* \nabla_{12}^{++} \tilde{\Delta}_{(12)}^-(c_1 U_1 + c_2 U_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} N_{21} = g_{21}^* \tilde{\Delta}_{[12]}^+(c_1 U_1 - c_2 U_2), \quad n_{21}(1) = g_{21}^* \nabla_{12}^{+-} \tilde{\Delta}_{[12]}^-(c_1 U_1 - c_2 U_2) \\ \tilde{\Delta}_{\alpha}^{\pm} = \tilde{S}_{\alpha}^{-1} (\pm \nabla_{\alpha}^{\pm} \mp \tilde{C}_{\alpha\alpha}), \quad \tilde{\Delta}_{(12)}^{\pm} = \tilde{S}_{12}^{-1} (\pm \nabla_{12}^{\pm\pm} \mp \tilde{C}_{12}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\tilde{\Delta}_{[12]}^{\pm} = \tilde{S}_{21}^{-1} (\pm \nabla_{12}^{\pm\mp} \mp \tilde{C}_{21}), \quad \tilde{C}_{\alpha\beta} = \tilde{c}_{\alpha\beta}(1), \quad \tilde{S}_{\alpha\beta} = \tilde{s}_{\alpha\beta}(1)$$

где предполагается, что $\sin \omega_{\alpha\beta} \neq 0$.

Подчиненное условиям (1.10) общее решение уравнения (2.2):

$$\begin{aligned} v_{\alpha\beta}(x) = v_{\alpha\beta}(0) \tilde{c}_{\alpha\beta}(x) + (\gamma_{\alpha\beta}^*)^{-1} Q_{\alpha\beta} \tilde{s}_{\alpha\beta}(x) \\ \tilde{c}_{\alpha\beta}(x) = k_{\alpha\beta}^{(1)} - k_{\alpha\beta}^{(2)} K_{\alpha\beta}^{(3)} (K_{\alpha\beta}^{(4)})^{-1}, \quad \tilde{s}_{\alpha\beta}(x) = -\eta_{\alpha\beta}^{-3} [k_{\alpha\beta}^{(4)} - k_{\alpha\beta}^{(2)} K_{\alpha\beta}^{(2)} (K_{\alpha\beta}^{(4)})^{-1}] \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$k_{\alpha\beta}^{(s)} = k_{\alpha\beta}^{(s)}(x) = k^{(s)}(\eta_{\alpha\beta} x), \quad 2k^{(1)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x, \quad 2k^{(2)}(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$$

$$2k^{(3)}(x) = \operatorname{ch} x - \cos x, \quad 2k^{(4)}(x) = \operatorname{sh} x - \sin x, \quad K_{\alpha\beta}^{(s)} = k_{\alpha\beta}^{(s)}(1) = k^{(s)}(\eta_{\alpha\beta})$$

где $k^{(s)}(x)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) – функции Крылова, позволяет найти выражения (см. формулы (2.4), (1.7), (1.8)):

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\alpha} = \gamma_{\alpha\alpha}^* \tilde{\Delta}_{\alpha}^+ U_{3-\alpha}, \quad q_{\alpha\alpha}(1) = \gamma_{\alpha\alpha}^* \nabla_{\alpha}^+ \tilde{\Delta}_{\alpha}^- U_{3-\alpha} \\ Q_{12} = -\gamma_{12}^* \tilde{\Delta}_{(12)}^+(c_2 U_1 - c_1 U_2), \quad q_{12}(1) = -\gamma_{12}^* \nabla_{12}^{++} \tilde{\Delta}_{(12)}^-(c_2 U_1 - c_1 U_2) \\ Q_{21} = \gamma_{21}^* \tilde{\Delta}_{[12]}^+(c_2 U_1 + c_1 U_2), \quad q_{21}(1) = \gamma_{21}^* \nabla_{12}^{+-} \tilde{\Delta}_{[12]}^-(c_2 U_1 + c_1 U_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_\alpha^\pm &= \bar{S}_{\alpha\alpha}^{-1}(\pm \nabla_\alpha^\pm \mp \bar{C}_{\alpha\alpha}), \quad \bar{\Delta}_{(12)}^\pm = \bar{S}_{12}^{-1}(\pm \nabla_{12}^{\pm\pm} \mp \bar{C}_{12}) \\ \bar{\Delta}_{[12]}^\pm &= \bar{S}_{21}^{-1}(\pm \nabla_{12}^{\mp\mp} \mp \bar{C}_{21}), \quad \bar{C}_{\alpha\beta} = \bar{c}_{\alpha\beta}(1), \quad \bar{S}_{\alpha\beta} = \bar{s}_{\alpha\beta}(1)\end{aligned}\quad (2.10)$$

где предполагается, что $\sin \eta_{\alpha\beta} \neq 0$.

Подставляя зависимости (2.6), (2.9) в уравнения равновесия узлов (2.3) приходим к однородной системе уравнений в частных разностях

$$(D_\alpha + \omega^2 l M) U_\alpha + c_1 c_2 D U_{3-\alpha} = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}D_\alpha &= g_{\alpha\alpha}^* \tilde{\Delta}_\alpha^2 + \gamma_{3-\alpha, 3-\alpha}^* \bar{\Delta}_{3-\alpha}^2 + c_\alpha^2 (g_{12}^* \tilde{\Delta}_{(12)}^2 + g_{21}^* \tilde{\Delta}_{[12]}^2) + c_{3-\alpha}^2 (\gamma_{12}^* \bar{\Delta}_{(12)}^2 + \gamma_{21}^* \bar{\Delta}_{[12]}^2) \\ D &= g_{12}^* \tilde{\Delta}_{(12)}^2 - g_{21}^* \tilde{\Delta}_{[12]}^2 - \gamma_{12}^* \bar{\Delta}_{(12)}^2 + \gamma_{21}^* \bar{\Delta}_{[12]}^2\end{aligned}\quad (2.12)$$

в которых фигурируют разностные операторы второго порядка

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_\alpha^2 &= \tilde{\Delta}_\alpha^+ - \tilde{\Delta}_\alpha^- = \tilde{S}_{\alpha\alpha}^{-1}(\Delta_\alpha^2 + 2 - 2\tilde{C}_{\alpha\alpha}), \quad \bar{\Delta}_\alpha^2 = \bar{\Delta}_\alpha^+ - \bar{\Delta}_\alpha^- = \bar{S}_{\alpha\alpha}^{-1}(\Delta_\alpha^2 + 2 - 2\bar{C}_{\alpha\alpha}) \\ \tilde{\Delta}_{(12)}^2 &= \tilde{\Delta}_{(12)}^+ - \tilde{\Delta}_{(12)}^- = \tilde{S}_{12}^{-1}(\Delta_{(12)}^2 + 2 - 2\tilde{C}_{12}), \\ \bar{\Delta}_{(12)}^2 &= (\bar{\Delta}_{(12)}^+ - \bar{\Delta}_{(12)}^-) = \bar{S}_{12}^{-1}(\Delta_{(12)}^2 + 2 - 2\bar{C}_{12}) \\ \tilde{\Delta}_{[12]}^2 &= \tilde{\Delta}_{[12]}^+ - \tilde{\Delta}_{[12]}^- = \tilde{S}_{21}^{-1}(\Delta_{[12]}^2 + 2 - 2\tilde{C}_{21}), \quad \bar{\Delta}_{[12]}^2 = \bar{\Delta}_{[12]}^+ - \bar{\Delta}_{[12]}^- = \bar{S}_{21}^{-1}(\Delta_{[12]}^2 + 2 - 2\bar{C}_{21})\end{aligned}\quad (2.13)$$

Подчеркнем, что уравнения (2.11) в том виде, как они выписаны, имеют место только для внутренних узлов. Для свободных граничных узлов по иному будут выглядеть операторы (2.12), которые здесь явно не приводятся. В связи с этим заметим, что в случае переменных жесткостей стержней в пределах каждого семейства, когда $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}[m_\sigma]$ и $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}[m_\sigma]$, разностные операторы (2.12) в уравнениях (2.11) примут вид

$$\begin{aligned}D_\alpha &= g_{\alpha\alpha}^* \tilde{\Delta}_\alpha^+ - \nabla_\alpha^- g_{\alpha\alpha}^* \nabla_\alpha^+ \tilde{\Delta}_\alpha^- + \gamma_{3-\alpha, 3-\alpha}^* \bar{\Delta}_{3-\alpha}^+ - \nabla_{3-\alpha}^- \gamma_{3-\alpha, 3-\alpha}^* \nabla_{3-\alpha}^+ \bar{\Delta}_{3-\alpha}^- + \\ &+ c_\alpha^2 (g_{12}^* \tilde{\Delta}_{(12)}^+ - \nabla_{12}^- g_{12}^* \nabla_{12}^{++} \tilde{\Delta}_{(12)}^- + g_{21}^* \tilde{\Delta}_{[12]}^+ - \nabla_{12}^- g_{21}^* \nabla_{12}^{++} \tilde{\Delta}_{[12]}^-) + \\ &+ c_{3-\alpha}^2 (\gamma_{12}^* \bar{\Delta}_{(12)}^+ - \nabla_{12}^- \gamma_{12}^* \nabla_{12}^{++} \bar{\Delta}_{(12)}^- + \gamma_{21}^* \bar{\Delta}_{[12]}^+ - \nabla_{12}^- \gamma_{21}^* \nabla_{12}^{++} \bar{\Delta}_{[12]}^-) \\ D &= g_{12}^* \tilde{\Delta}_{(12)}^+ - \nabla_{12}^- g_{12}^* \nabla_{12}^{++} \tilde{\Delta}_{(12)}^- - g_{21}^* \tilde{\Delta}_{[12]}^+ + \nabla_{12}^- g_{21}^* \nabla_{12}^{++} \tilde{\Delta}_{[12]}^- - \\ &- \gamma_{12}^* \bar{\Delta}_{(12)}^+ + \nabla_{12}^- \gamma_{12}^* \nabla_{12}^{++} \bar{\Delta}_{(12)}^- + \gamma_{21}^* \bar{\Delta}_{[12]}^+ - \nabla_{12}^- \gamma_{21}^* \nabla_{12}^{++} \bar{\Delta}_{[12]}^- \end{aligned}$$

Теперь чтобы получить статические граничные условия в узловых перемещениях в явном виде, достаточно записать уравнения (2.11) для свободных граничных узлов, раскрыть последние разностные операторы и положить равными нулю жесткости несуществующих стержней. Этой же процедурой удаления стержней можно воспользоваться и с целью описания собственных колебаний ферм иных ортогональных структур.

Итак, задача о собственных колебаниях фермы сведена к обобщенной дискретной (разностной) задаче на собственные значения, представленной уравнениями (2.11). Они равносильны однородной системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{D}(\omega)\mathbf{U} = [\mathbf{G}(\omega) + \omega^2 l \mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

где $\mathbf{D}(\omega)$ и $\mathbf{G}(\omega)$ – квадратные матрицы с элементами, зависящими от искомого параметра ω собственной частоты, порядок которых равен числу независимых смещений подвижных узлов, \mathbf{M} – квадратная матрица того же порядка, элементами которой являются

ся узловые массы, а \mathbf{U} – вектор-столбец, составленный из упомянутых выше смещений. Частоты собственных колебаний фермы являются корнями уравнения $|\mathbf{D}(\omega)| = 0$, а отвечающие им узловые смещения – соответствующими решениями системы (2.14). Структура перечисленных матриц предопределена видом уравнений системы (2.11), но также зависит и от того, как сформирован вектор-столбец искомого узловых смещений \mathbf{U} .

Формы собственных колебаний фермы описываются совокупностью узловых смещений U_α и смещений $\alpha\beta$ -стержней, выражаемых опосредованно через узловые смещения формулами (см. (1.7), (1.8), (2.5), (2.7), (2.8), (2.10)):

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}(x) &= [\tilde{c}_{\alpha\beta}(x) - \tilde{s}_{\alpha\beta}(x)\tilde{S}_{\alpha\beta}^{-1}\tilde{C}_{\alpha\beta}]u_{\alpha\beta}(0) + \tilde{s}_{\alpha\beta}(x)\tilde{S}_{\alpha\beta}^{-1}u_{\alpha\beta}(1) \\ v_{\alpha\beta}(x) &= [\bar{c}_{\alpha\beta}(x) - \bar{s}_{\alpha\beta}(x)\bar{S}_{\alpha\beta}^{-1}\bar{C}_{\alpha\beta}]v_{\alpha\beta}(0) + \bar{s}_{\alpha\beta}(x)\bar{S}_{\alpha\beta}^{-1}v_{\alpha\beta}(1) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что из строгой задачи о собственных колебаниях, описываемой уравнениями (2.11) или системой (2.14), можно извлечь и упоминавшуюся выше приближенную задачу, связанную с применением простейшего варианта метода сосредоточенных масс. Для этого достаточно устремить в упомянутых уравнениях к нулю все погонные массы $\rho_{\alpha\beta}$ и добавить к узловым массам, например, полумассы примыкающих стержней. При обнулении погонных масс стержней обращаются в нуль параметры $\omega_{\alpha\beta}$, $\eta_{\alpha\beta}$ и $\bar{S}_{\alpha\beta}^{-1}$ (см. (2.1), (2.2), (2.8), (2.10)), в результате чего разностные операторы, помеченные сверху чертой (см. (2.10), (2.13)), становятся нулевыми, а операторы, помеченные сверху тильдой (см. (2.7), (2.13)), переходят в породившие их операторы (1.2), (1.3). Таким образом, чтобы получить соответствующие уравнения обсуждаемой приближенной задачи, достаточно опустить в уравнениях обобщенной задачи на собственные значения члены с множителями $\gamma_{\alpha\beta}^*$ и убрать у всех оставшихся разностных операторов надсимвольные знаки. В итоге обобщенная задача на собственные значения (2.14) вырождается в обычную задачу на собственные значения вида

$$[\mathbf{G}(0) + \omega^2 \mathbf{M}^*] \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

где \mathbf{M}^* – матрица приведенных узловых масс, а $\mathbf{G}(0)$ – матрица жесткости системы. При этом для форм оказываются справедливыми выражения (см. (2.15) при $\omega_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta} \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}(x) &= u_{\alpha\beta}(0) + [u_{\alpha\beta}(1) - u_{\alpha\beta}(0)]x \\ v_{\alpha\beta}(x) &= v_{\alpha\beta}(0) + [v_{\alpha\beta}(1) - v_{\alpha\beta}(0)]x \end{aligned}$$

показывающие, что здесь $\alpha\beta$ -стержни не испытывают изгиба и допускают только одно-родную осевую деформацию.

Примечательно, что к этой же задаче приводит и конечно-элементный подход, если за конечные элементы принять $\alpha\beta$ -стержни с полиномиальной аппроксимацией их смещений, подчиненной, конечно, условиям (1.10). Уточнение в рамках этого подхода моделей деформирования $\alpha\beta$ -стержней (например, с целью учета их изгиба) возможно путем разбиения этих стержней на конечные подэлементы, что неизбежно ведет к росту размерности задачи, если только не прибегать к процедуре конденсации.

Данная выше строгая постановка задачи о собственных колебаниях фермы, как и рассматриваемая ниже задача о вынужденных колебаниях, всегда имеет наименьшую размерность и лишена указанных недостатков, присущих методу конечных элементов.

3. Некоторые свойства частот и форм собственных колебаний. Покажем, прежде всего, что частоты собственных колебаний образуют бесконечное счетное множество чисел с точкой сгущения на бесконечности. Для этого достаточно убедиться в том, что $|\mathbf{D}(\omega)|$ – целая функция собственного параметра ω [5]. Нетрудно видеть, что коэффици-

енты уравнений (2.11) после умножения каждого из них на соответствующее произведение $\sin \omega_{\alpha\beta} \sin \eta_{\alpha\beta}$ (напомним, что пока $\sin \omega_{\alpha\beta} \neq 0$ и $\sin \eta_{\alpha\beta} \neq 0$) становятся целыми функциями ω . Поэтому элементы определителя $|\mathbf{D}(\omega)|$, являясь линейными комбинациями этих коэффициентов, а, следовательно, и сам определитель будут целыми функциями ω .

Обратимся теперь к выводу условия ортогональности форм. Пусть ω_i и ω_j – два различных, не равных между собой, собственных значения задачи (2.11), которым отвечают формы, описываемые совокупностями величин $u_{\alpha\beta}^{(i)}, v_{\alpha\beta}^{(i)}, U_{\alpha}^{(i)}$ и $u_{\alpha\beta}^{(j)}, v_{\alpha\beta}^{(j)}, U_{\alpha}^{(j)}$ соответственно. Они, как нетрудно понять, удовлетворяют равенствам (см. (2.1), (2.2), (2.3)):

$$g_{\alpha\beta}^*(u_{\alpha\beta}^{(i)})'' + \omega_i^2 \rho_{\alpha\beta} l l_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}^{(i)} = 0, \quad g_{\alpha\beta}^*(u_{\alpha\beta}^{(j)})'' + \omega_j^2 \rho_{\alpha\beta} l l_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}^{(j)} = 0 \quad (3.1)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^*(v_{\alpha\beta}^{(i)})'''' - \omega_i^2 \rho_{\alpha\beta} l l_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(i)} = 0, \quad \gamma_{\alpha\beta}^*(v_{\alpha\beta}^{(j)})'''' - \omega_j^2 \rho_{\alpha\beta} l l_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(j)} = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & N_{\alpha\alpha}^{(i)} - \nabla_{\alpha\alpha}^- n_{\alpha\alpha}^{(i)}(1) + Q_{3-\alpha, 3-\alpha}^{(i)} - \nabla_{3-\alpha}^- q_{3-\alpha, 3-\alpha}^{(i)}(1) + \\ & + c_{\alpha} \{ N_{12}^{(i)} - \nabla_{12}^- n_{12}^{(i)}(1) - (-1)^{\alpha} [N_{21}^{(i)} - \nabla_{12}^+ n_{21}^{(i)}(1)] \} + \\ & + c_{3-\alpha} \{ (-1)^{\alpha} [Q_{12}^{(i)} - \nabla_{12}^- q_{12}^{(i)}(1)] + Q_{21}^{(i)} - \nabla_{12}^+ q_{21}^{(i)}(1) \} + \omega_i^2 l M U_{\alpha}^{(i)} = 0 \\ & N_{\alpha\alpha}^{(j)} - \nabla_{\alpha\alpha}^- n_{\alpha\alpha}^{(j)}(1) + Q_{3-\alpha, 3-\alpha}^{(j)} - \nabla_{3-\alpha}^- q_{3-\alpha, 3-\alpha}^{(j)}(1) + \\ & + c_{\alpha} \{ N_{12}^{(j)} - \nabla_{12}^- n_{12}^{(j)}(1) - (-1)^{\alpha} [N_{21}^{(j)} - \nabla_{12}^+ n_{21}^{(j)}(1)] \} + \\ & + c_{3-\alpha} \{ (-1)^{\alpha} [Q_{12}^{(j)} - \nabla_{12}^- q_{12}^{(j)}(1)] + Q_{21}^{(j)} - \nabla_{12}^+ q_{21}^{(j)}(1) \} + \omega_j^2 l M U_{\alpha}^{(j)} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где верхние индексы (i) и (j) указывают на принадлежность величин соответствующим формам колебаний. Умножим первое уравнение (3.1) на $u_{\alpha\beta}^{(j)}$, а второе – на $u_{\alpha\beta}^{(i)}$, после чего проинтегрируем обе их части по x в пределах от 0 до 1 и вычтем одно из другого. Поступим аналогично и со второй парой уравнений (3.2), помножая их, в отличие от первой пары (3.1), на $v_{\alpha\beta}^{(j)}$ и $v_{\alpha\beta}^{(i)}$. Тогда, принимая во внимание тождества

$$\int_0^1 g_{\alpha\beta}^*(u_{\alpha\beta}^{(i)})'' u_{\alpha\beta}^{(j)} dx = (n_{\alpha\beta}^{(i)} u_{\alpha\beta}^{(j)}) \Big|_0^1 - \int_0^1 g_{\alpha\beta}^*(u_{\alpha\beta}^{(i)})' (u_{\alpha\beta}^{(j)})' dx$$

$$\int_0^1 \gamma_{\alpha\beta}^*(v_{\alpha\beta}^{(i)})'''' v_{\alpha\beta}^{(j)} dx = -(q_{\alpha\beta}^{(i)} v_{\alpha\beta}^{(j)}) \Big|_0^1 + \int_0^1 \gamma_{\alpha\beta}^*(v_{\alpha\beta}^{(i)})'' (v_{\alpha\beta}^{(j)})'' dx$$

(при выводе последнего использованы условия (1.10)), в итоге получим равенства

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) l l_{\alpha\beta} \int_0^1 \rho_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}^{(i)} u_{\alpha\beta}^{(j)} dx = -(n_{\alpha\beta}^{(i)} u_{\alpha\beta}^{(j)} - n_{\alpha\beta}^{(j)} u_{\alpha\beta}^{(i)}) \Big|_0^1$$

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) l l_{\alpha\beta} \int_0^1 \rho_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(i)} v_{\alpha\beta}^{(j)} dx = -(q_{\alpha\beta}^{(i)} v_{\alpha\beta}^{(j)} - q_{\alpha\beta}^{(j)} v_{\alpha\beta}^{(i)}) \Big|_0^1$$

Суммируя их по всем стержням, после преобразований с учетом геометрических условий сопряжения (1.7), (1.8) и равенств (3.3) приходим к искомому условию ортогональности форм (см. (1.1)):

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{m_{\sigma}=0}^1 l_{\alpha\beta} \int_0^1 \rho_{\alpha\beta} (u_{\alpha\beta}^{(i)} u_{\alpha\beta}^{(j)} + v_{\alpha\beta}^{(i)} v_{\alpha\beta}^{(j)}) dx + \sum_{m_{\sigma}} M \sum_{\alpha=1}^2 U_{\alpha}^{(i)} U_{\alpha}^{(j)} = 0 \quad (i \neq j) \quad (3.4)$$

где первая и вторая суммы слева с индексом суммирования m_{σ} указывают на суммирование соответственно по всем стержням и всем подвижным узлам.

Аналогичные рассуждения над уравнениями (3.1), (3.2), предварительно поделенными на квадрат соответствующей собственной частоты, приводят к условию ортогональности вида

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{m_{\sigma}=0}^1 \int [g_{\alpha\beta}^* (u_{\alpha\beta}^{(i)})' (u_{\alpha\beta}^{(j)})' + \gamma_{\alpha\beta}^* (v_{\alpha\beta}^{(i)})' (v_{\alpha\beta}^{(j)})'] dx = 0 \quad (i \neq j) \quad (3.5)$$

в котором сумма с индексом суммирования m_{σ} распространяется на все стержни системы.

В силу регулярности изучаемой фермы упруго-массовые характеристики $g_{\alpha\beta}^*$, $\gamma_{\alpha\beta}^*$, $\rho_{\alpha\beta}$ могут быть вынесены за знаки интегралов и даже за пределы стоящих перед ними сумм с индексом суммирования m_{σ} (вместе с длинами $l_{\alpha\beta}$). Однако это не сделано намеренно с тем, чтобы подчеркнуть общность условий ортогональности (3.4), (3.5), которые, как можно показать, справедливы и для нерегулярной фермы, когда все стержни неоднородны и различны даже в пределах одного семейства, т.е. когда $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x; m_{\sigma})$, $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(x; m_{\sigma})$, $\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}(x; m_{\sigma})$ и $l_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}[m_{\sigma}]$.

Как уже неоднократно подчеркивалось, все полученные выше для собственных колебаний фермы результаты справедливы, когда $\sin \omega_{\alpha\beta} \neq 0$ и $\sin \eta_{\alpha\beta} \neq 0$. Остановимся теперь на вырожденных случаях, когда либо $\sin \omega_{\alpha\beta} = 0$, либо $\sin \eta_{\alpha\beta} = 0$ (при фиксированных значениях $\alpha, \beta, m_{\sigma}$ одновременно эти равенства выполняются при $i_{\alpha\beta} = 1$, что для модели стержня недопустимо). Как станет ясным из последующих рассуждений, в этих случаях частоты собственных колебаний определяются не всеми геометрическими, упругими и массовыми характеристиками фермы. Для простоты рассуждений будем считать, что стержни фермы однородные, но, вообще говоря, разные даже в пределах одного семейства.

Пусть, например, для какого-то фиксированного стержня (фиксированных значений $\alpha, \beta, m_{\sigma}$) $\sin \omega_{\alpha\beta} = 0$. Тогда

$$\omega = \omega_j = \frac{j\pi}{l_{\alpha\beta}} \sqrt{\frac{g_{\alpha\beta}}{\rho_{\alpha\beta}}} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

т.е. собственный параметр зависит от соотношения длины, жесткости на растяжение-сжатие и погонной массы только фиксированного стержня и, более того, принимает значения частот собственных продольных колебаний такого изолированного стержня с закрепленными концами. Посмотрим, могут ли такие собственные значения быть частотами собственных колебаний изучаемой упругой системы. Из выражений (2.4), (2.5) видно, что для фиксированного стержня

$$u_{\alpha\beta}(1) = (-1)^j u_{\alpha\beta}(0), \quad n_{\alpha\beta}(1) = (-1)^j N_{\alpha\beta} \quad (3.6)$$

Первое из этих равенств говорит о том, что концы фиксированного стержня, а следовательно, и примыкающие к ним узлы при нечетных значениях j сближаются или расходятся на одну и ту же величину вдоль оси стержня, а при четных j смещаются одина-

ково вдоль той же оси. Второе равенство (3.6), устанавливая связь между концевыми значениями осевого стержня, исключает возможность выразить их через узловые смещения (зависимостью вида (2.6)). Это обстоятельство вынуждает при построении дискретной задачи на собственные значения сохранить в соответствующих уравнениях равновесия узлов в качестве самостоятельной искомой величины, например, начальное значение осевого усилия $N_{\alpha\beta}$ и выразить через него конечное значение $n_{\alpha\beta}(1)$ по второй формуле (3.6). Наблюдаемое при этом, казалось бы, превышение числа неизвестных над числом располагаемых уравнений компенсируется первым соотношением (3.6). Оно после преобразований с помощью соответствующих геометрических условий сопряжения (1.7), (1.8), устанавливает жесткую зависимость между смещениями смежных узлов, тем самым указывая, как бы, на наличие в ферме независимых от свойств ее элементов дополнительных внутренних связей. Например, если $\alpha = \beta$, то дополнительное соотношение имеет вид $U_{\alpha} = (-1)^j \nabla_{\alpha}^+ U_{\alpha}$. Получаемая в итоге однородная система линейных алгебраических уравнений относительно узловых смещений U_{α} и усилия $N_{\alpha\beta}$ может иметь как тривиальное, так и нетривиальное решение, что зависит от соотношения геометрических, упругих и массовых параметров всех других стержней, а также условий закрепления фермы.

Подобным же образом анализируется и второй вид вырожденного случая, когда для какого-то стержня имеет место равенство $\sin \eta_{\alpha\beta} = 0$, и параметр собственной частоты, равный

$$\omega = \omega_j = \frac{j^2 \pi^2}{l_{\alpha\beta}^2} \sqrt{\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\rho_{\alpha\beta}}} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

зависит уже от соотношения длины, изгибной жесткости и погонной массы фиксированного стержня и совпадает с частотами собственных изгибных колебаний такого изолированного шарнирно опертого на концах стержня. Теперь из выражений (2.4), (2.8) для фиксированного стержня следуют зависимости

$$v_{\alpha\beta}(1) = (-1)^j v_{\alpha\beta}(0), \quad q_{\alpha\beta}(1) = \gamma_{\alpha\beta}^* j^3 \pi^3 \frac{1 - (-1)^j \operatorname{ch} j\pi}{\operatorname{sh} j\pi} v_{\alpha\beta}(0) + (-1)^j Q_{\alpha\beta} \quad (3.7)$$

роль новой свободной искомой будет играть, например, перерезывающая сила $Q_{\alpha\beta}$ в начале фиксированного стержня, а роль недостающего уравнения – первое соотношение (3.7), преобразованное с помощью геометрических условий сопряжения (1.7), (1.8).

Заметим, что в регулярной ферме условия вырожденности выполняются для всех одинаковых стержней независимо от того, к какому семейству они принадлежат. Может случиться и так, что оба условия вырожденности будут реализовываться в ферме одновременно, но для стержней разных семейств. Все сказанное выше сохраняет силу и здесь с той лишь разницей, что во всех таких случаях увеличивается число новых свободных неизвестных типа $N_{\alpha\beta}$ и (или) $Q_{\alpha\beta}$ и число дополнительных соотношений вида первых равенств (3.6), (3.7).

Вырожденные случаи осуществимы в фермах со специально подобранными связями, геометрическими, упругими и массовыми характеристиками ее элементов и, вообще говоря, исключать их нельзя. В реальных ферменных конструкциях такие случаи маловероятны. Однако близкие к ним ситуации вполне реализуемы и в рамках невырожденных случаев.

4. Вырожденные колебания фермы. Для решения задачи о вынужденных колебаниях фермы воспользуемся методом главных координат. Пусть собственные частоты ω_i ($i = 1, 2, \dots$) упорядочены по нарастанию и пусть им отвечают формы, описываемые, как отме-

чалось, совокупностью переменных $u_{\alpha\beta}^{(i)}(x; m_\sigma)$, $v_{\alpha\beta}^{(i)}(x; m_\sigma)$, $U_\alpha^{(i)}[m_\sigma]$. Принимая во внимание геометрические условия сопряжения (1.7), (1.8), представим искомые смещения $u_{\alpha\beta}(x, t; m_\sigma)$, $v_{\alpha\beta}(x, t; m_\sigma)$, $U_\alpha(t; m_\sigma)$ в виде разложений по формам собственных колебаний

$$u_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}^{(i)} f_i, \quad v_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} v_{\alpha\beta}^{(i)} f_i, \quad U_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} U_\alpha^{(i)} f_i \quad (4.1)$$

где $f_i = f_i(t)$ – неизвестные функции времени. Подставляя эти разложения соответственно в уравнения (1.5), (1.6) и (1.9) и преобразуя их с помощью зависимостей (3.1)–(3.3), приходим к равенствам

$$l \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}^{(i)} (\ddot{f}_i + \xi \omega_i^2 \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i) = p_{\alpha\beta}, \quad l \sum_{i=1}^{\infty} \rho_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(i)} (\ddot{f}_i + \xi \omega_i^2 \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i) = r_{\alpha\beta}$$

$$l \sum_{i=1}^{\infty} M U_\alpha^{(i)} (\ddot{f}_i + \xi \omega_i^2 \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i) = P_\alpha$$

Умножим первые два из них на $l_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}^{(j)}$ и $l_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^{(j)}$ соответственно, после чего проинтегрируем их по x в пределах от 0 до 1. Затем просуммируем все полученные равенства вместе с третьими уравнениями, предварительно помноженными на $U_\alpha^{(j)}$. В итоге с учетом условий ортогональности (3.4) получим традиционное для метода главных координат дифференциальное уравнение

$$\ddot{f}_i(t) + \xi \omega_i^2 \dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = p_i(t) \quad (4.2)$$

$$p_i(t) u_i^2 l = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{m_\sigma}^1 l_{\alpha\beta} \int_0^1 [p_{\alpha\beta}(x, t) u_{\alpha\beta}^{(i)}(x) + r_{\alpha\beta}(x, t) v_{\alpha\beta}^{(i)}(x)] dx + \sum_{m_\sigma}^2 \sum_{\alpha=1}^2 P_\alpha(t) U_\alpha^{(i)} \quad (4.3)$$

$$u_i^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{m_\sigma}^1 l_{\alpha\beta} \int_0^1 \rho_{\alpha\beta} (u_{\alpha\beta}^{(i)2} + v_{\alpha\beta}^{(i)2}) dx + \sum_{m_\sigma}^2 M \sum_{\alpha=1}^2 U_\alpha^{(i)2}$$

с начальными условиями вида

$$f_i(0) = f_i^0, \quad \dot{f}_i(0) = \dot{f}_i^0$$

$$f_i^0 u_i^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{m_\sigma}^1 l_{\alpha\beta} \int_0^1 \rho_{\alpha\beta} (u_{\alpha\beta}^0 u_{\alpha\beta}^{(i)} + v_{\alpha\beta}^0 v_{\alpha\beta}^{(i)}) dx + \sum_{m_\sigma}^2 M \sum_{\alpha=1}^2 U_\alpha^0 U_\alpha^{(i)}$$

$$\dot{f}_i^0 u_i^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{m_\sigma}^1 l_{\alpha\beta} \int_0^1 \rho_{\alpha\beta} (\dot{u}_{\alpha\beta}^0 u_{\alpha\beta}^{(i)} + \dot{v}_{\alpha\beta}^0 v_{\alpha\beta}^{(i)}) dx + \sum_{m_\sigma}^2 M \sum_{\alpha=1}^2 \dot{U}_\alpha^0 U_\alpha^{(i)}$$

вытекающими после аналогичных преобразований из условий (1.11). Решение уравнения (4.2) известно и поэтому здесь в общем виде не приводится.

При действии гармонической нагрузки

$$p_{\alpha\beta}(x, t) = \bar{p}_{\alpha\beta}(x) \sin vt, \quad r_{\alpha\beta}(x, t) = \bar{r}_{\alpha\beta}(x) \sin vt, \quad P_\alpha(t) = \bar{P}_\alpha \sin vt$$

с круговой частотой ν стационарная часть решения уравнения (4.2) имеет вид (см. (4.3)):

$$f_i(t) = \bar{p}_i \beta_i \sin(\nu t - \alpha_i), \quad \beta_i = [(\omega_i^2 - \nu^2)^2 + \xi^2 \nu^2 \omega_i^4]^{-1/2}, \quad \alpha_i = \arctg \frac{\xi \nu \omega_i^2}{\omega_i^2 - \nu^2}$$

$$\bar{p}_i u_i^2 l = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{m_\alpha}^1 l_{\alpha\beta} \int_0^1 [\bar{p}_{\alpha\beta}(x) u_{\alpha\beta}^{(i)}(x) + \bar{r}_{\alpha\beta}(x) v_{\alpha\beta}^{(i)}(x)] dx + \sum_{m_\alpha}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \bar{P}_\alpha U_\alpha^{(i)}$$

В соответствии с этим решением в ферме со временем устанавливаются колебания (см. (4.1)):

$$u_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}^{(i)} \bar{p}_i \beta_i \sin(\nu t - \alpha_i), \quad v_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\infty} v_{\alpha\beta}^{(i)} \bar{p}_i \beta_i \sin(\nu t - \alpha_i), \quad U_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} U_\alpha^{(i)} \bar{p}_i \beta_i \sin(\nu t - \alpha_i).$$

свидетельствующие о том, что явление резонанса может наблюдаться на тех собственных частотах, формы которых не ортогональны с амплитудами внешней нагрузки ($\bar{p}_i \neq 0$).

Альтернативой методу главных координат при исследовании стационарных гармонических колебаний фермы является метод комплексных амплитуд, позволяющий отказаться от того, что все стержни фермы изготовлены из одного материала. Ограничимся рассмотрением частного случая, когда на ферму действуют только узловые нагрузки ($p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} = 0$). Заменяя $u_{\alpha\beta}(x, t)$, $v_{\alpha\beta}(x, t)$, $U_\alpha(t)$, $P_\alpha(t)$ соответственно на $u_{\alpha\beta}^c(x) e^{i\nu t}$, $v_{\alpha\beta}^c(x) e^{i\nu t}$, $U_\alpha^c e^{i\nu t}$, $P_\alpha^c e^{i\nu t}$ ($i = \sqrt{-1}$), где $u_{\alpha\beta}^c(x)$, $v_{\alpha\beta}^c(x)$, U_α^c , P_α^c – комплексные амплитуды, (аналогичные замены необходимы для внутренних сил стержней и их начальных значений) и воспроизводя рассуждения п. 2, начиная с уравнения (2.1), с корректировкой их на действие узловых сил и сил внутреннего трения, приходим к разностной задаче

$$(D_\alpha + \nu^2 l M) U_\alpha^c + c_1 c_2 D U_{3-\alpha}^c + P_\alpha^c = 0$$

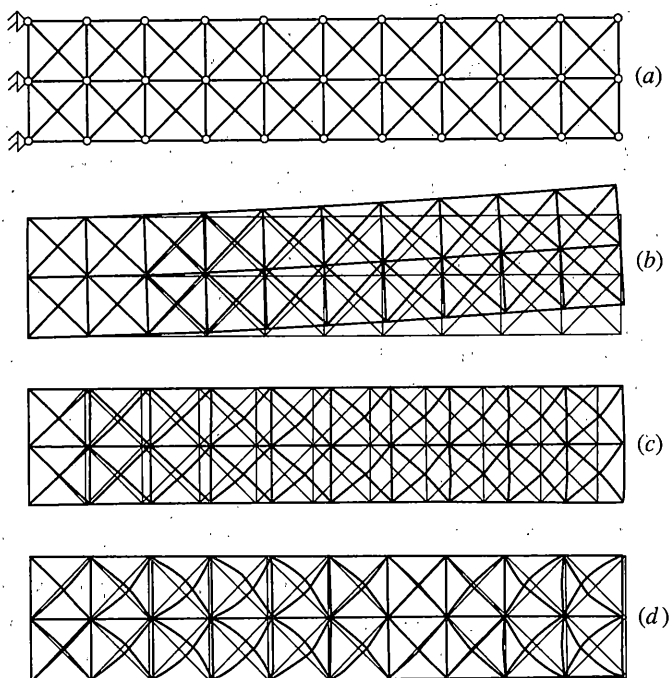
равновесной неоднородной системе линейных алгебраических уравнений

$$[G(\nu) + \nu^2 l M] U^c + P^c = 0 \tag{4.4}$$

Здесь U^c – вектор-столбец комплексных амплитуд узловых смещений, а P^c – сформированный по образцу U^c вектор-столбец комплексных же амплитуд узловых внешних сил. Во всех формулах п. 2, сопутствующих этим уравнениям, следует ω заменить на ν , а каждое $g_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}^*$, $\gamma_{\alpha\beta}^*$ домножить на $1 + i\nu \xi_{\alpha\beta}$, где $\xi_{\alpha\beta}$ – коэффициент затухания материала $\alpha\beta$ -стержня. Истинные амплитуды смещений элементов фермы $\bar{u}_{\alpha\beta}(x)$, $\bar{v}_{\alpha\beta}(x)$, \bar{U}_α находятся как модули соответствующих комплексных амплитуд.

5. Числовые результаты. Проиллюстрируем полученные выше теоретические результаты на примере регулярной фермы с одним рядом внутренних узлов ($M_2 = 2$). Ферма консольно закреплена на левом краю ($U_\alpha = 0$ при $m_1 = 0$ и $m_2 = 0, 1, 2$) и содержит в горизонтальном направлении 10 ячеек (см. фиг. 2, а).

Некоторые результаты численного решения обобщенной дискретной задачи на собственные значения вида (2.14) представлены в таблице. В первом ее столбце приведены первые восемь безразмерных собственных частот $\bar{\omega}_i = \omega_i l(\rho/g)^{1/2}$ ($i = 1, 2, \dots, 8$), вычисленные по самой строгой модели для значений $l_{\alpha\alpha} = l$, $\rho_{\alpha\beta} = \rho$, $g_{\alpha\beta} = g$, $i_{\alpha\alpha} = 0.05$, $i_{\alpha, 3-\alpha} = 0.025 \sqrt{2}$, $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma = 0.0025 g l^2$, $M = 0$.

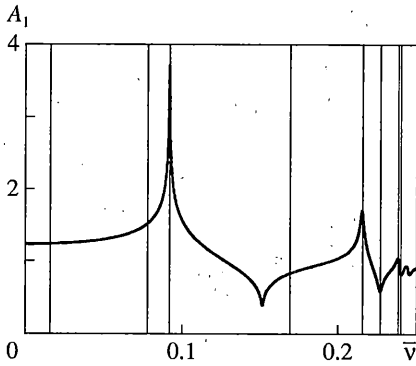


Фиг.2

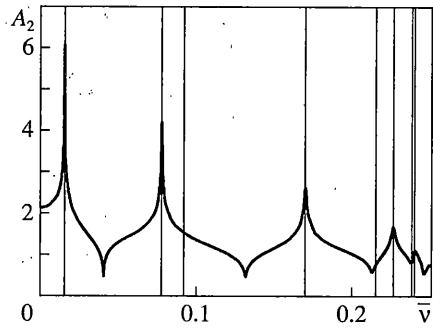
Во втором столбце содержатся аналогичные данные для фермы с абсолютно жесткими на изгиб стержнями (предельный случай предыдущей задачи при $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma \rightarrow \infty$), а в третьем столбце – данные, полученные с помощью метода сосредоточенных параметров ($\rho_{\alpha\beta} = 0$), когда за узловые массы M принимались суммы полумасс прилежащих к узлам стержней. Некоторое представление о влиянии неодинаковой жесткости стержней можно составить по последующим трем столбцам, в которых представлены данные, аналогичные первым трем столбцам, при $g_{11} = 0.2g$ и прежних значениях всех других параметров.

Таблица

1	2	3	4	5	6
0.01511	0.01512	0.01504	0.00821	0.00821	0.00816
0.07757	0.07856	0.07640	0.04691	0.04728	0.04574
0.09200	0.09382	0.09367	0.05745	0.05786	0.05776
0.16979	0.18407	0.17468	0.11464	0.12037	0.11287
0.21579	0.27925	0.27499	0.16061	0.17367	0.17108
0.22642	0.30363	0.27897	0.18000	0.21308	0.19299
0.23914	0.43109	0.38212	0.21032	0.28913	0.27721
0.24009	0.45513	0.43310	0.21382	0.31926	0.27935



Фиг. 3



Фиг. 4

Что касается форм собственных колебаний, описываемых узловыми смещениями $U_{\alpha}^{(i)}$ и определяемыми по ним величинам $u_{\alpha\beta}^{(i)}$, $v_{\alpha\beta}^{(i)}$ (см. (2.15)), то среди них в рамках строгой модели наблюдаются следующие вполне предсказуемые закономерности. Первая и вторая формы фермы напоминают первую и вторую формы изгибных колебаний консольной балки, а третья – первую форму продольных колебаний консольного стержня (первая и третья формы показаны на фиг. 2, b, c). Поскольку в них смещения узлов существенно превышают максимальные прогибы и полные удлинения стержневых элементов фермы, то эти формы можно отнести к разряду глобальных форм. В отличие от них уже в четвертой форме, напоминающей третью форму изгибных колебаний консольной балки, узловые смещения сопоставимы с прогибами наиболее протяженных диагональных стержневых элементов, но существенно превосходят их полные удлинения. Начиная с пятой формы (см. фиг. 2, d), максимальные прогибы диагональных стержней значительно превышают узловые смещения, и далее эта тенденция прогрессирует.

Следует, наконец, отметить, что в спектре собственных частот фермы обнаруживаются группы близких, но не равных между собой частот, располагающихся в окрестности частот собственных продольных или изгибных колебаний отдельных изолированных стержней с шарнирно закрепленными концами. Впервые такая ситуация наблюдается в окрестности нижней частоты $\bar{\omega}_1^{(12)} = 0.24674$ собственных изгибных колебаний изолированного диагонального стержня с шарнирно опертыми концами. Формы колебаний, отвечающие близким к ней частотам фермы, характеризуются очень малой подвижностью узлов и отличаются друг от друга взаимными фазами деформирования стержневых элементов системы. Группы близких частот и отвечающие им формы колебаний сходны с соответствующими вырожденными случаями, но точно с ними не совпадают.

Установившиеся гармонические колебания фермы проиллюстрируем двумя случаями внешних воздействий.

Первый случай – это, когда на ферму действует единственная сила $P_1(t; 10, 1) = P \sin \nu t$. Частичное представление об установившихся колебаниях регулярной фермы дает фиг. 3. На ней изображена зависимость $A_1 = (\bar{U}_1 [10, 1] g P^{-1})^{1/5}$, ($\bar{U}_2 [10, 1] \equiv 0$) от безразмерной частоты $\bar{\nu} = \nu l(\rho/g)^{1/2}$, полученная путем решения уравнения (4.4) для тех же значений исходных параметров ($g_{\alpha\beta} = g$, $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma$, $\xi_{\alpha\beta} = \xi = 0.00001$). Как видно, резонансные пики наблюдаются вблизи собственных частот консервативной системы (на фиг. 3 они отме-

чены вертикальными линиями), связанных с продольными колебаниями фермы как составного стержня. Вычисления показывают, что с ростом коэффициента затухания резонансные пики сглаживаются, а в области близких частот сливаются вплоть до образования одного пика.

Второй случай гармонического воздействия обусловлен действием двух сил $P_1(t; 10, 0) = -P_1(t; 10, 2) = P \sin vt$. Зависимость $A_2 = (\bar{U}_2 [10, 1] g P^{-1})^{1/5}$ ($\bar{U}_1 [10, 1] \equiv 0$) от безразмерной частоты внешнего возмущения \bar{v} , также полученная путем решения уравнения (4.4), представлена на фиг. 4. В отличие от первого вида нагружения здесь резонансные пики наблюдаются вблизи собственных частот консервативной системы, связанных с изгибными колебаниями фермы как составного стержня. Остальные закономерности остаются прежними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбаков Л.С. О теории одной плоской регулярной упругой структуры ферменного типа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 171–179.
2. Рыбаков Л.С. Упругий анализ одной плоской регулярной стержневой структуры // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 198–207.
3. Рыбаков Л.С., Мишустин И.В. О теории одной плоской квазирегулярной в одном направлении структуры ферменного типа // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 1. С. 41–50.
4. Рыбаков Л.С., Мишустин И.В. Теория одной плоской квазирегулярной в двух направлениях структуры ферменного типа // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 3–4. С. 88–98.
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.09.2000