

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Предлагаются определяющие соотношения для сред с начально изотропной ползучестью и анизотропной повреждаемостью, обусловленной зависимостью критериальной величины разрушения от вида напряженного состояния при простом нагружении и неравномерностью накопления повреждений в различных физических направлениях при сложном нагружении. Каждому направлению в векторном пространстве напряжений ставится в соответствие своя поврежденность. Её приращение равно приращению скалярной поврежденности, умноженному на значение материальной функции от угла между указанным направлением и вектором действующих в данный момент напряжений. Совокупность одновременных значений поврежденностей на всех направлениях пространства напряжений образует поверхность анизотропной поврежденности. Значение поврежденности в направлении вектора напряжений, действующих в текущий момент времени, принимается в качестве меры поврежденности. Она определяет ускорение ползучести при приближении к моменту разрушения и условие его наступления. Эффективность модели иллюстрируется сравнением с имеющимися в литературе экспериментальными и теоретическими результатами (работы Мураками и Делобеля с соавторами) по ползучести и длительной прочности меди при 250°C и нержавеющей стали при 600°C в условиях совместного действия постоянного растяжения и знакопеременного кручения.

**1. Математическая модель.** В первых работах по феноменологической теории длительного разрушения параметром процесса служил скаляр [1, 2]. Начиная с работы [3], были предложены тензорные и векторные параметры (в частности, [4–8]), призванные отразить анизотропный характер накопления повреждений при ползучести. Поверхность поврежденности, введенная в публикуемой статье, расширяет возможности более точного описания рассматриваемых процессов, что компенсирует затраты на дополнительные базовые опыты и вычисления при решении краевых задач.

Многие металлы в условиях постоянной повышенной температуры и одноосного стационарного растяжения  $\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}^{(0)} H(t)$ ,  $H(t)$  – функция Хевисайда, при достаточно высоком уровне  $\sigma_{11}^{(0)}$  (близком или превышающем предел текучести  $\sigma_s^{(T)}$  для данной температуры) деформируются со значительным преобладанием установившейся и ускоренной ползучести над остальными составляющими – мгновенной и неустановившейся. Тогда можно использовать следующую модель ползучести и длительной прочности:

$$\dot{\varepsilon}_{11} = F(\sigma_{11}, \omega_1) = f(\sigma_{11})/(1 - \omega_1)^m, \quad \varepsilon_{11}(0) = 0 \quad (1.1)$$

$$\dot{\omega}_1 = G(\sigma_{11}, \omega_1) = g(\sigma_{11})\dot{\varepsilon}_{11}^n/A_*, \quad \omega_1(0) = 0, \quad \omega_1(t_*) = 1 \quad (1.2)$$

где  $f(\sigma_{11})$ ,  $g(\sigma_{11})$  и  $m$ ,  $n$ ,  $A_*$  – материальные функции и константы,  $t_*$  – момент разрушения. В случае  $g(\sigma_{11}) \equiv 1$ ,  $n = 1$  получим деформационный параметр поврежденности  $\omega_1 = \varepsilon_{11}/\varepsilon_{11}^*$  ( $\varepsilon_{11}^* = A_*$  – предельная деформация, которая предполагается не зависящей от уровня  $\sigma_{11}^{(0)}$ ), а в случае  $g(\sigma_{11}) = \sigma_{11}$ ,  $n = 1$  – энергетический параметр  $\omega_1 = W/W_*$  ( $W = \sigma_{11}^{(0)} \varepsilon_{11}$  и  $W_* = \sigma_{11}^{(0)} \varepsilon_{11}(t_*) = A_*$  – текущее и предельное значения рассеянной энергии). Заметим, что конкретизация функций  $F$ ,  $G$  при необходимости может отличаться от (1.1), (1.2), это не принципиально для дальнейшего изложения метода построения модели.

Пусть материал изотропен на начальной стадии процесса деформирования (пока поврежденность мала). Обобщение соотношений (1.1), (1.2) на сложное стационарное напряженное состояние  $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^{(0)} H(t)$  примем в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 1.5 f(\sigma_u) (1 - \omega_1)^{-m} S_{ij} / \sigma_u \quad (1.3)$$

$$\dot{\omega}_1 = g(\sigma_u) e_u^n / A_* (q) \quad (1.4)$$

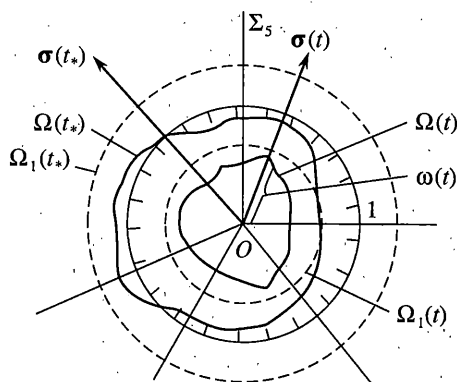
где  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3$  – девиатор напряжений,  $\sigma_u = (1.5 S_{kl} S_{kl})^{1/2}$  и  $e_u = (\dot{\varepsilon}_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} / 1.5)^{1/2}$  – интенсивности напряжений и скоростей деформаций,  $q$  – параметр (параметры) вида напряженного состояния. Если ограничиться случаем плоского напряженного состояния ( $\sigma_{i3} = 0$ ;  $i = 1, 2, 3$ ), то представляется целесообразным использовать в качестве  $q$  величину

$$q_1 = \sigma_{kk} / \sigma_u \quad (1.5)$$

В частности, при двухосном равном сжатии ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} < 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ), одноосном сжатии, чистом сдвиге, одноосном растяжении, двухосном равном растяжении параметр  $q_1$  принимает значения  $-2, -1, 0, 1, 2$  соответственно. Это отражает увеличение жесткости (по отношению к длительной прочности) в указанной последовательности напряженных состояний [9], и можно ожидать, что материальная функция  $A_*(q_1)$ ,  $q_1 \in [-2; 2]$  является монотонно убывающей. Широко используемый параметр  $q_2 = \sigma_1 / \sigma_u$  ( $\sigma_1$  – наибольшее из трех главных напряжений) не вполне обладает этим свойством: соответствующие значения  $q_2$  составляют  $0, 0, 1/\sqrt{3}, 1, 1$ , а максимум  $q_2$ , равный  $2/\sqrt{3}$ , достигается при ( $\sigma_{11} = 2\sigma_{22} > 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ).

В общем случае нестационарного сложного нагружения изменяется направление девиатора  $S_{ij}(t)$ , что приводит к изменению физических направлений действия механизмов повреждения. Основным из них для многих материалов является развитие микротрещин, ориентированных ортогонально максимальному растягивающему напряжению. Для таких материалов скорость роста тензорных и векторных параметров поврежденности [4, 5, 7, 8] имеет направление, соответствующее указанному напряжению. В модель [8], в дополнение к векторному, включен скалярный параметр поврежденности, характеризующий изотропное расширение микропор – второй основной механизм повреждения.

Разумеется, реальные механизмы разрушения при ползучести не исчерпываются двумя упомянутыми. В настоящей работе любому направлению  $\sigma$  в пятимерном изображающем пространстве напряжений  $\Sigma_5$  А.А. Ильюшина [10] ставится в соответствие накапливающаяся поврежденность  $\Omega_\sigma$ . В ходе процесса нагружения (в текущий мо-



Фиг. 1

мент времени  $t$ ) вычисляется значение поврежденности  $\Omega_{\sigma(t)}(t)$  в направлении вектора действующих напряжений  $\sigma(t)$  в предположении, что в предшествующие моменты  $\tau \in [0; t)$  величина  $\Omega_{\sigma(t)}(\tau)$  определялась значением скорости изменения скалярной поврежденности  $\dot{\omega}_1(\tau)$  и углом  $\alpha(t, \tau)$  между векторами  $\sigma(t)$  и  $\sigma(\tau)$ :

$$\Omega_{\sigma(t)}(t) = \int_0^t \varphi(\alpha(t, \tau)) \dot{\omega}_1(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

$$\alpha(t, \tau) \equiv \arccos \left( \frac{\sigma(t) \cdot \sigma(\tau)}{|\sigma(t)| |\sigma(\tau)|} \right) = \arccos \left( \frac{1.5 S_{kl}(t) S_{kl}(\tau)}{\sigma_u(t) \sigma_u(\tau)} \right)$$

Материальная функция  $\varphi(\alpha)$  отражает влияние скорости накопления поврежденности в направлении действующего вектора  $\sigma(t)$  на скорость изменения поврежденности в направлениях, составляющих угол  $\alpha$  с вектором  $\sigma(t)$  (естественно,  $\varphi(0) = 1$ ). Для определения  $\varphi(\alpha)$  целесообразно использовать результаты опытов при двухэтапном кусочно-стационарном нагружении вида

$$S_{ij}(t) = \{S_{ij}^{(1)}, t \in [0; t_1]; S_{ij}^{(2)}, t \in [t_1; t_*]\} \quad (1.7)$$

при этом  $\sigma_u^{(1)} = \sigma_u^{(2)}$ , угол  $\alpha_1 \equiv \alpha(t_1 + 0, t_1 - 0)$  между векторами  $\sigma^{(1)}$  и  $\sigma^{(2)}$  принимает значения, необходимые для аппроксимации функции  $\varphi(\alpha)$  на отрезке  $[0; \pi]$ .

Если в (1.6) заменить действующий вектор напряжений  $\sigma(t)$  на вектор произвольного направления  $\sigma$ , то можно вычислить  $\Omega_{\sigma}(t)$  – текущее значение поврежденности в направлении  $\sigma$ . Совокупность (по всем направлениям  $\sigma \in \Sigma_s$ ) величин  $\Omega_{\sigma}(t)$  можно интерпретировать как поверхность (гиперповерхность)  $\Omega(t) \subset \Sigma_s$ , которая изменяется в процессе нагружения (фиг. 1). Длина радиус-вектора произвольной точки поверхности  $\Omega(t)$  равна  $\Omega_{\sigma}(t)$ , где  $\sigma$  – направление радиус-вектора точки.

Обозначим  $\omega(t) \equiv \Omega_{\sigma(t)}(t)$  и введем  $\omega$  в соотношение (1.3) вместо  $\omega_1$ . Будем считать, что разрушение происходит в "направлении" действующего в момент  $t_*$  вектора напряжений  $\sigma(t_*)$ , поэтому примем условие разрушения в виде  $\omega(t_*) = 1$  (даже если ранее, при  $t < t_*$ , в некотором направлении  $\sigma$ , отличном от направления действовавшего  $\sigma(t)$ , зна-

чение  $\Omega_{\sigma}(t)$  уже превысило единицу). В результате величина  $\omega(t)$  становится мерой поврежденности [3], образованной от параметра анизотропной поврежденности  $\Omega(t)$ .

Рассмотрим эволюцию поверхности  $\Omega(t)$ . В начальный момент  $t = 0$  материал считается неповрежденным, и  $\Omega(0)$  сосредоточена в точке  $O$  начала системы координат в  $\Sigma_5$ . Для начально изотропных материалов, за исключением изотропно повреждающихся ( $\varphi(\alpha) \equiv 1$ ), представляется физически оправданным условие  $\varphi(\alpha) < 1, \forall \alpha \neq 0$  (скорость накопления поврежденности максимальна в направлении вектора действующих напряжений), вследствие чего поверхность  $\Omega(t)$  в течение всего процесса  $t \in (0; t_*]$  располагается внутри сферы  $\Omega_1(t)$  с центром  $O$  и радиусом  $\omega_1(t)$ . Лишь в случае простого нагружения, когда направление вектора  $\sigma(t)$  неизменно, поверхности  $\Omega(t)$  и  $\Omega_1(t)$  касаются в точке, лежащей на этом направлении. Наконец, в момент  $t = t_*$  поверхность  $\Omega(t_*)$  пересекает в направлении действующего вектора напряжений  $\sigma(t_*)$  единичную сферу с центром  $O$  (фиг. 1).

Подчеркнем, что при использовании меры поврежденности  $\omega(t)$  нет необходимости знать эволюцию всей поверхности  $\Omega(t)$ , достаточно вычислять положение ее точки  $\Omega_{\sigma(t)}(t)$  на направлении действующего вектора напряжений  $\sigma(t)$ . Это кардинально сокращает объем вычислений (в важном для приложений случае кусочно-стационарного нагружения с небольшим количеством разных напряженных состояний – до того же порядка, что и в моделях с тензорным или векторным параметром поврежденности типа [4, 8]). Принятие более консервативной меры поврежденности  $\omega_{\max}(t) = \max\{\Omega_{\sigma}(t), \forall \sigma \in \Sigma_5\}$  потребовало бы вычислений  $\Omega_{\sigma}(t)$  для всего дискретизованного набора направлений  $\sigma$  в пространстве  $\Sigma_5$ . Кроме того, мера  $\omega$  представляется физически более оправданной, чем  $\omega_{\max}$ , так как материал, исчерпавший ресурс прочности в одном направлении, может оставаться способным сопротивляться нагружению в других направлениях.

В экспериментах [11–13] отмечено существенное и долговременное замедление ползучести после изменения направления нагружения в процессах вида (1.7). Этот эффект возрастает с увеличением  $t_1$  и приближением  $\alpha_1$  к значению  $\approx \pi/2$ , поэтому в работе [13] в выражение для  $\dot{\epsilon}_{ij}$  введен дополнительный множитель  $Q$  вида

$$Q = 1 - P_0(1 + P_1 \epsilon_u) \sin \chi \quad (P_0, P_1 = \text{const}), \quad \chi \equiv \arccos\left(\frac{\epsilon_{kl} \dot{\epsilon}_{kl}}{1.5 \epsilon_u e_u}\right)$$

Заметим, что одни и те же значения тензора  $\epsilon_{ij}(t_1)$  могут быть достигнуты как при стационарном нагружении  $S_{ij}^{(1)}$ , так и при нестационарном сложном (например, знакопеременном  $\pm S_{ij}^{(1)}$ ) нагружении. Вероятно, замедление ползучести во втором случае будет большим (что, конечно, требуется проверить экспериментально). Будем связывать множитель перед  $\sin \chi$  в выражении для  $Q$  с поврежденностью, а не с интенсивностью деформаций  $\epsilon_u$ . Для этой цели выберем разность  $\omega_1 - \omega$ ; ее значение в момент  $t = t_1$  тем больше, чем больше  $t_1$ , и остается неизменным в течение всего второго этапа нагружения (1.7) (при  $t \in [t_1; t_*]$ ), что удобно при определении констант модели из опытов (1.7). Возьмем для множителя  $Q$  выражение

$$Q = 1 - a(\omega_1 - \omega)^k \sin \chi \quad (a, k = \text{const})$$

Учитывая соосность  $\dot{\epsilon}_{ij}$  и  $S_{ij}$  (1.3), можно вычислять  $\chi$  как

$$\chi = \arccos(S_{kl} \epsilon_{kl} / (\sigma_u \epsilon_u)), \quad \epsilon_u \equiv (\epsilon_{kl} \epsilon_{kl} / 1.5)^{1/2} \quad (1.8)$$

$N_L$	$\sigma_{11}^{(0)}$ [МПа]	$\sqrt{3} \sigma_{12} $ [МПа]	$t_1$ [ч]	$n_r$	$\alpha_1$ [°]	$N_F$
1	50.0	0	—	0	—	2
2	60.6	0	—	0	—	2
3	45.9	22.8	120	1	53	3
4	45.9	22.8	360	1	53	3
5	45.9	22.8	120	4	53	4
6	38.2	38.2	120	1	90	5
7	31.5	47.3	120	1	113	6
8	31.5	47.3	360	1	113	6
9	31.5	47.3	120	6	113	7
10	0	73.1	120	1	180	8
11	0	73.1	360	1	180	8
12	0	73.1	120	4	180	9

Итак, модель ползучести и длительной прочности примем в виде

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 1.5[1 - a(\omega_1 - \omega)^K \sin \chi] f(\sigma_u) (1 - \omega)^{-m} S_{ij} / \sigma_u, \quad \epsilon_{ij}(0) = 0 \quad (1.9)$$

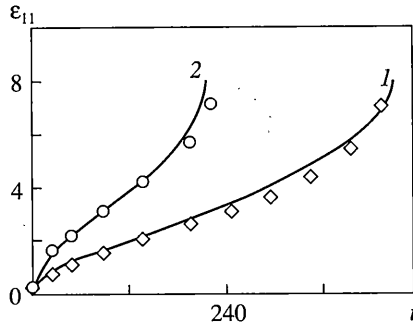
$$\dot{\omega}_1 = g(\sigma_u) e_u^n / A_*(q_1), \quad \omega_1(0) = 0 \quad (1.10)$$

$$\omega = \int_0^t \varphi(\alpha(t, \tau)) \dot{\omega}_1(\tau) d\tau, \quad \omega(t_*) = 1 \quad (1.11)$$

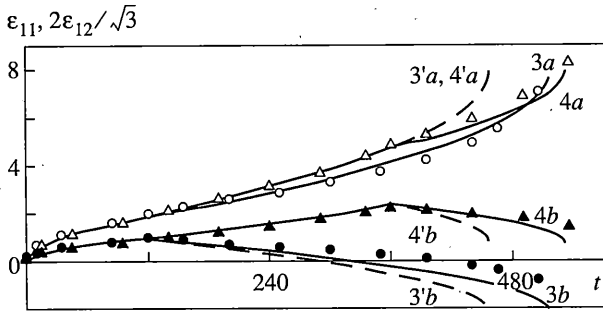
Величины  $q_1$ ,  $\alpha$ ,  $\chi$  определены выражениями (1.5), (1.6), (1.8). Функции  $f$ ,  $g$  и константы  $m$ ,  $n$  можно найти из серии опытов при одноосном стационарном растяжении различной интенсивности, функцию  $A_*(q_1)$  — из опытов при стационарном сложном напряженном состоянии различного вида, функцию  $\varphi(\alpha)$  и константы  $a$ ,  $k$  — из опытов (1.7).

**2. Экспериментальное обоснование модели.** Примером материала с существенно анизотропным накоплением повреждений при ползучести является медь. Обширное исследование поведения медных тонкостенных трубчатых образцов в условиях совместного действия постоянного растяжения и знакопеременного кручения при постоянной температуре 250°C выполнено в работе [13]. Конкретные параметры процессов нагружения приведены в таблице ( $N_L$ ,  $N_F$  — номера нагружения и соответствующей фигуры,  $n_r$  — количество реверсов кручения). Результаты опытов [13] нанесены на фиг. 2–9 светлыми и темными маркерами (деформации  $\epsilon_{11}$  и  $2\epsilon_{12}/\sqrt{3}$  соответственно); последняя по времени экспериментальная точка на каждой из фиг. 2–9 отвечает моменту разрушения образца. На всех графиках настоящей статьи деформации даны в процентах, время — в часах.

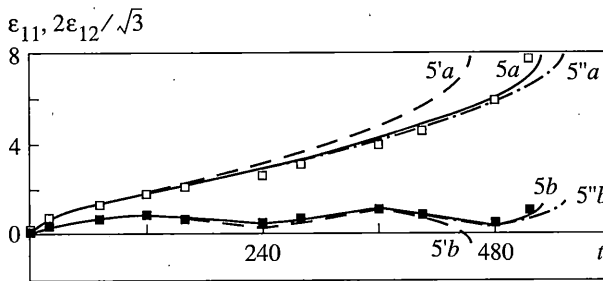
При одноосном стационарном растяжении  $\sigma_{11}^{(0)} = 50, 60.6$  [МПа] (фиг. 2) экспериментальные значения предельной деформации  $\epsilon_{11}^*$  приблизительно одинаковы, поэтому примем (для рассматриваемого интервала напряжений)  $g(\sigma_{11}) \equiv 1$ ,  $n = 1$ . Это



Фиг. 2



Фиг. 3

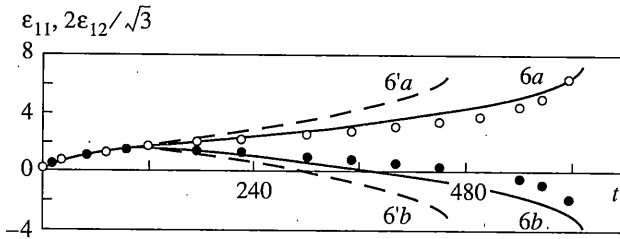


Фиг. 4

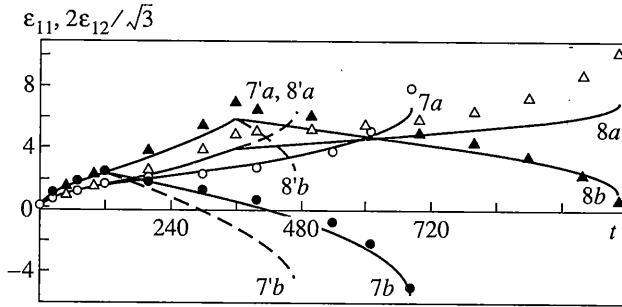
приводит к деформационному параметру  $\omega_1$ , который в общем случае сложного нагружения имеет вид

$$\omega_1 = \int_0^t \frac{e_u(\tau) d\tau}{\epsilon_u^*(q_1(\tau))} \quad (2.1)$$

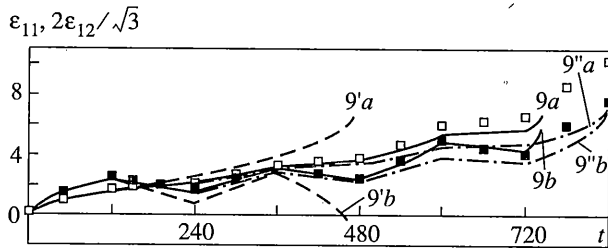
где  $\epsilon_u^*(q_1) = A_*(q_1)$  – предельная интенсивность деформаций при стационарном сложном напряженном состоянии  $\sigma_{ij}^{(0)}$  вида  $q_1$  (предполагается, что  $\epsilon_u^*(q_1)$  не зависит от величины  $\sigma_u^{(0)}$ ).



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Ползучесть меди при 250°C в условиях стационарного нагружения и малой поврежденности вполне изотропна и определяется интенсивностью напряжений [14]. С использованием результатов трех опытов [13] при  $\sigma_{11}^{(0)} = 50, 60.6$  [МПа] (фиг. 2) и  $\sqrt{3}\sigma_{12} = 73.1$  МПа (фиг. 8) определена функция нелинейности  $f(\sigma_u)$  (в интервале  $\sigma_u = 50 - 73.1$  [МПа]) и константа  $m$ :

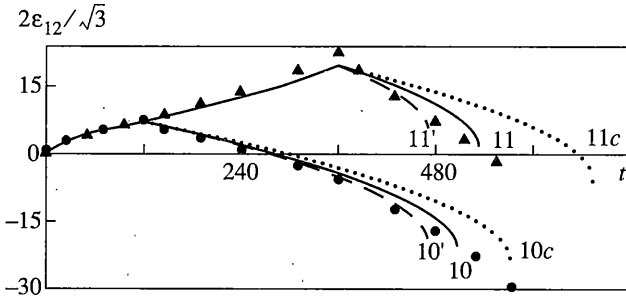
$$f(\sigma_u) = b_1 + b_2 \exp(\sigma_u/b_3) \quad (2.2)$$

$$b_1 = 3.7 \cdot 10^{-5} \text{ ч}^{-1}, \quad b_2 = 6.8 \cdot 10^{-7} \text{ ч}^{-1}, \quad b_3 = 12 \text{ МПа}, \quad m = 0.8$$

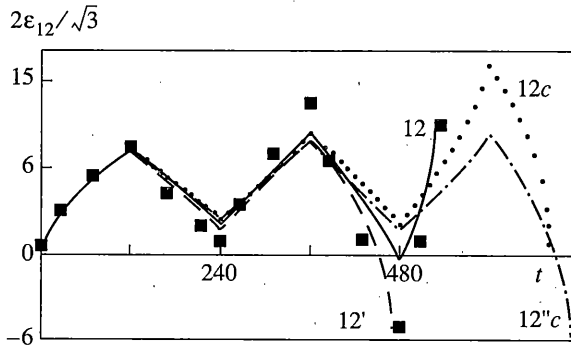
Для лучшего описания ползучести на начальном этапе нагружения ( $\approx 50$  ч) к основной деформации (1.9) прибавим неустановившуюся составляющую:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 1.5 \{ K(t) f_1(\sigma_u) + [1 - a(\omega_1 - \omega)^K \sin \chi] f(\sigma_u) (1 - \omega)^{-m} \} S_{ij} / \sigma_u \quad (2.3)$$

$$t = \int_0^t \psi(\sigma_u(\tau)) d\tau, \quad \psi(\sigma_u) = H(\sigma_u - \sigma_{\min}), \quad 0 < \sigma_{\min} = \text{const} < 50 \text{ МПа}$$



Фиг. 8



Фиг. 9

где  $t$  – приведенное время, учитывающее отсутствие старения (в ненапряженном состоянии) и подобие кривых неустановившейся ползучести в рассматриваемом интервале напряжений. Соотношение (2.3) входит в модель вместо (1.9).

Если не рассматривать поведение материала при малых  $t \sim 10^0$  ч, то для аппроксимации  $K(t)$  достаточно одной экспоненты

$$K(t) = \exp(-t/\mu), \quad \mu = 20 \text{ ч} \quad (2.4)$$

Функция  $f_1(\sigma_u)$  взята в виде

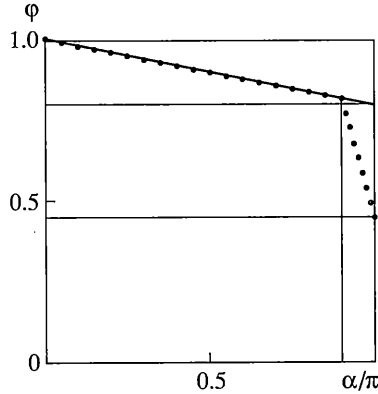
$$f_1(\sigma_u) = (\sigma_u/d_1)^{n_1}, \quad d_1 = 670 \text{ МПа} \cdot \text{ч}^{1/n_1}, \quad n_1 = 3. \quad (2.5)$$

В работе [13] не приведены экспериментальные значения  $\epsilon_u^*$  при стационарных нагрузениях ( $\sigma_{11}^{(0)}, \sqrt{3}\sigma_{12}^{(0)}$ ), величины которых соответствуют строкам 3–12 таблицы, но указано, что в этих опытах  $t_* \approx 470$  ч. Из этого условия определена функция

$$\epsilon_u^*(q_1) = A_1 + A_2 \exp(-A_3 q_1), \quad A_1 = 0.0667, \quad A_2 = 0.263, \quad A_3 = 2.97 \quad (2.6)$$

В частности, при стационарном кручении  $\epsilon_u^*(0) = 2\epsilon_{12}^*/\sqrt{3} = A_1 + A_2 \approx 0.33$ , при стационарном одноосном растяжении  $\epsilon_u^*(1) = \epsilon_{11}^* \approx 0.08$ . Зависимость (2.6) предназначена для  $q_1 \in [0; 1]$ , но если предположить корректность экстраполяции (2.6) в область двух-





Фиг. 10

осного растяжения ( $q_1 \in (1; 2]$ ), то в случае ( $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} > 0, \sigma_{12}^{(0)} = 0$ ) получим значение  $\epsilon_u^*(2) \approx 0.067$ , которое согласуется с небольшим увеличением эквивалентного напряжения при двухосном равном растяжении меди по сравнению с одноосным растяжением [9].

Соотношения (2.1)–(2.6) относятся к интервалу  $\sigma_u = 50 - 73.1$  [МПа]. Значения  $t_*$ , вычисленные согласно (1.11), (2.1)–(2.6) для стационарных нагружений со значениями ( $\sigma_{11}^{(0)}, \sqrt{3}\sigma_{12}^{(0)}$ ) из строк 1, 3–12 таблицы, находятся в интервале 455–470 [ч] (т.е. с ошибкой до 3%).

Для определения функции  $\phi(\alpha)$  и констант  $a, k$  использованы результаты двух нестационарных опытов с  $\alpha_1 = 113^\circ, t_1 = 120, 360$  [ч] (фиг. 6). Выбор значения  $\alpha_1$  обусловлен наибольшим среди опытов [13] эффектом сложного нагружения, а существенное различие  $t_1$  позволяет установить зависимость (2.3) от величины  $\omega_1 - \omega$ . Исходя из линейной аппроксимации для  $\phi(\alpha)$ , определены

$$\phi(\alpha) = 1 - c\alpha, \quad c = 0.2/\pi \tag{2.7}$$

$$a = 4.7, \quad k = 0.68 \tag{2.8}$$

Результаты вычислений по модели (1.11), (2.1)–(2.8) представлены на фиг. 2–9 сплошными линиями; номер линии указывает на номер нагружения, индексы  $a$  и  $b$  – на деформации растяжения и кручения соответственно. Для сравнения штриховыми линиями нанесены результаты простейшей теории со скалярным параметром поврежденности  $\omega = \omega_1$  (соотношения (1.11), (2.1)–(2.6) при  $\phi(\alpha) \equiv 1$ ).

Следует учесть, что в двух опытах при чистом кручении – при нагружениях 11 и 12 (фиг. 8, 9) – разрушение произошло, как указано в [13], на границе рабочей области образца, где имеется некоторая концентрация напряжений. Поэтому указанные опыты следует рассматривать как прерванные до наступления разрушения материала, а их длительности – как нижнюю оценку для  $t_*$  при этих нагружениях.

Как видно из фиг. 8, при нагружении 10 модель (1.11), (2.1)–(2.8) приводит к занижению  $t_*$  на 12% (разрушение в этом опыте – в рабочей части образца [13]). Следовательно,  $\phi(\pi)$  должно быть меньше значения 0.8, задаваемого аппроксимацией (2.7). Правильное значение  $t_*$  для нагружения 10 достигается при  $\phi(\pi) = 0.45$  (пунктирная

линия 10с на фиг. 8). Для выяснения поведения функции  $\varphi(\alpha)$  вблизи  $\alpha = \pi$  использованы результаты опыта [12, фиг. 5, с] с  $\alpha_1 = 157^\circ$  – расчет согласно (1.11), (2.1)–(2.8) дает  $t_* = 1530$  ч, что хорошо согласуется с экспериментальным значением 1500 ч. Материал и температура в [12] те же, что и в [13]; остальные двухосные опыты с  $\sigma_u = 50 - 60$  [МПа] описаны правильно – при стационарных нагружениях  $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{12}^{(0)} = 24.7$  МПа [12, фиг. 3, b] и  $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{12}^{(0)} / 3 = 11.3$  МПа [12, фиг. 3, с] значения  $t_*$  совпадают с экспериментальными и составляют 900 и 785 [ч] соответственно, при сложном нагружении с  $\alpha_1 = 112^\circ$  [12, фиг. 5, b]  $t_* = 1375$  ч, ошибка +25 ч. Таким образом, можно предположить, что лишь при  $\alpha > 0.9\pi$  аппроксимацию (2.7) следует скорректировать, как это показано на фиг. 10 пунктирной линией:

$$\varphi(\alpha) = 1 - c\alpha - c_1(\alpha - 0.9\pi)H(\alpha - 0.9\pi), \quad c = 0.2/\pi, \quad c_1 = 3.5/\pi \quad (2.9)$$

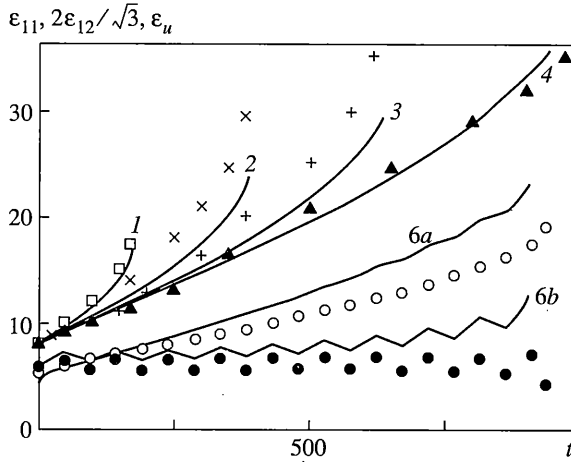
Соответствующие результаты на фиг. 8, 9 также нанесены пунктиром, номер линии снабжен индексом  $c$ .

Предложенная система соотношений (1.11), (2.1)–(2.6), (2.8), (2.9) в целом правильно описывает опыты [13] как по деформациям ползучести, так и по времени до разрушения. Наибольшие погрешности (по  $t_*$  – 11%) относятся к нагружению 9, что будет проанализировано в следующем разделе. Для остальных нестационарных нагружений 3–8, 10 (из опытов 11 и 12 известна лишь нижняя оценка для  $t_*$ ) относительные отклонения по  $t_*$  находятся в пределах 3%, что совпадает с погрешностью аппроксимации стационарных опытов. К ошибкам по  $t_*$  не более 8% (при гораздо больших вычислительных затратах) приводит использование меры поврежденности  $\omega_{\max}(t) = \max\{\Omega_\sigma(t), \forall \sigma \in \Sigma_3\}$  с функцией  $\varphi(\alpha)$  в виде двузвенной ломаной с узловыми значениями  $\{\varphi(0) = 1; \varphi(\pi/3) = 0.9; \varphi(\pi) = 0.35\}$  и с функцией  $Q = 1 - a_1 \omega_1^{\kappa_1} \sin \chi$ ,  $a_1 = 0.96$ ,  $\kappa_1 = 1.26$ . Приведенные в работе [13] графические результаты расчетов по модели с тензорным параметром поврежденности [13] показывают завышение  $t_*$  на 10% в нагружениях 3, 5, 6 и занижение  $t_*$  на 20% в нагружении 8; в нагружениях 4, 7, 9, 10 погрешность по  $t_*$  в пределах 5%. Использование простейшей модели со скалярным параметром поврежденности  $\omega = \omega_1$  приводит к неудовлетворительным результатам: так, в нагружении 8 значение  $t_*$  меньше экспериментального в 2.3 раза.

**3. Дальнейшие уточнения и обобщения.** Выясним возможную причину относительно высокой погрешности системы соотношений (1.11), (2.1)–(2.6), (2.8), (2.9) при нагружении 9 (фиг. 7). Учитывая большое влияние угла  $\chi$  (между векторами  $\sigma$  и  $\varepsilon$  [10]) на скорость ползучести (2.3) при сложном нагружении, логично предположить, что и функция  $\varphi$  может зависеть от  $\chi$  (в дополнение к зависимости от основного аргумента  $\alpha$ ). При двухэтапном кусочно-стационарном нагружении это неявно учтено через константы модели, определяемые из опытов (1.7), чем может объясняться успешное описание двухэтапных опытов 3, 4, 6–8, 10 (фиг. 3, 5, 6, 8). Заметим, что на первом этапе нагружения (1.7)  $\chi(\tau) = 0$ , на втором –  $\alpha(t, \tau) = 0, \forall t, \tau > t_1$ , поэтому найденная функция  $\varphi(\alpha)$  наиболее адекватна в случае  $\alpha\chi = 0$ . При нагружении 9 величина  $\alpha\chi$  больше, чем в нагружениях 3–8. Следовательно, можно предложить уточнение  $\varphi$  в виде

$$\Phi(\alpha, \chi) = \varphi(\alpha)(1 - c_2\alpha\chi), \quad c_2 = 0.11 \quad (3.1)$$

Значение константы  $c_2$  найдено из опыта 9. Результаты расчетов согласно (1.11), (2.1)–(2.6), (2.8), (2.9), (3.1) (в первом уравнении  $\varphi$  заменена на  $\Phi$  и под  $\chi$  понимается  $\chi(\tau)$ )



Фиг. 11

показаны на фиг. 4, 7, 9 штрих-пунктирными линиями; номера линий снабжены двумя штрихами. Для остальных нагружений (фиг. 3, 5, 6, 8)  $\Phi = \varphi$ .

Уточнение (3.1) можно рассматривать как элемент иерархического подхода к построению теории термовязкоупругости, при котором усложнение базовой модели строится в соответствии с классом рассматриваемых процессов нагружения [15]. Укажем на возможные обобщения базовой модели (1.9)–(1.11) – определение параметра  $q$  в случае пространственного напряженного состояния и включение в число аргументов функции  $\Phi$  параметра, характеризующего плоскость векторов  $\sigma(t)$  и  $\sigma(\tau)$  (если эта плоскость изменяется в процессе нагружения и поверхность  $\Omega(t)$  не инвариантна относительно изменения ориентации траектории нагружения в пространстве  $\Sigma_5$ ). Однако для таких построений пока нет достаточных экспериментальных оснований.

Рассмотрим результаты опытов [16] с нержавеющей сталью типа 316 при температуре 600°C; программы нагружения – комбинации стационарных напряжений растяжения  $\sigma_{11}^{(0)} = 320, 200, 100, 0$  [МПа] и кручения  $\sqrt{3}\sigma_{12}^{(0)} = 0, 250, 304, 320$  [МПа] (опыты 1–4 соответственно), а также сложные нагружения при постоянном  $\sigma_{11}^{(0)} = 200, 100, 0$  [МПа] и меняющем каждые 48 ч свой знак  $\sigma_{12}, \sqrt{3}|\sigma_{12}| = 250, 304, 320$  [МПа] (опыты 6–8 соответственно); интенсивность напряжений  $\sigma_u$  во всех указанных нагружениях равна 320 МПа. Светлые маркеры на фиг. 11 обозначают экспериментальные значения деформации  $\epsilon_{11}$ , темные – деформации  $2\epsilon_{12}/\sqrt{3}$ , крестики – интенсивности деформаций  $\epsilon_u$ ; номер зависимости совпадает с номером опыта. Следует учесть существенную начальную пластическую деформацию в этих опытах – к деформации ползучести  $\epsilon_{ij}^{(c)}$ , задаваемой выражением (2.3), прибавим

$$\epsilon_{ij}^{(0)} = 1.5 f_0(\sigma_u^{(0)}) S_{ij}^{(0)} / \sigma_u^{(0)} = 1.5 (\sigma_u^{(0)} / d_0)^{n_0} S_{ij}^{(0)} / \sigma_u^{(0)} \quad (3.2)$$

где  $\sigma_{ij}^{(0)}$  – начальный тензор напряжений. Так как в рассматриваемых опытах  $\sigma_u$  не превышает своего начального значения  $\sigma_u^{(0)}$ , то пластическую составляющую деформации с приемлемой точностью можно считать неизменной и равной  $\epsilon_{ij}^{(0)}$ . Значения

предельной деформации ползучести  $\varepsilon_{11}^{(c)*}$  при одноосном стационарном растяжении  $\sigma_{11}^{(0)} = 275, 320, 373$  [МПа] приблизительно одинаковы ( $\approx 0.12$ ) [16], поэтому примем (для рассматриваемого интервала напряжений)  $g(\sigma_{11}) \equiv 1$ ,  $n = 1$ . Параметр  $\omega_1$  (2.1) с учетом пластической составляющей возьмем в виде

$$\omega_1 = \frac{\varepsilon_u^{(0)}}{\varepsilon_u^{(0)*}(q_1(0))} + \int_0^t \frac{e_u^{(c)}(\tau) d\tau}{\varepsilon_u^{(c)*}(q_1(\tau))} \quad (3.3)$$

где предельные интенсивности деформаций пластичности  $\varepsilon_u^{(0)*}$  и ползучести  $\varepsilon_u^{(c)*}$  определяются соответственно при продолжении (возрастании) начального нагружения и при стационарном напряженном состоянии. В стационарных опытах 1–4 меньшему значению  $q_1$  соответствует более позднее и менее выраженное ускорение ползучести при приближении к  $t_*$ , поэтому величину  $(1 - \omega)^m$  в соотношении (2.3) заменим на

$$z(\omega, q_1) = \min\{1; [1 + m_1(1 - q_1) - \omega]^m\}, \quad q_1 \in [0; 1] \quad (3.4)$$

Из опытов при  $\sigma_{11}^{(0)} = 275, 320, 373$  [МПа] [16] определены входящие в выражения (2.2), (2.4), (2.5), (3.2) константы

$$b_1 = -1.12 \cdot 10^{-4} \text{ ч}^{-1}, \quad b_2 = 3.45 \cdot 10^{-6} \text{ ч}^{-1}, \quad b_3 = 70 \text{ МПа}, \quad m = 1 \quad (3.5)$$

$$\mu = 10 \text{ ч}, \quad d_1 = 6800 \text{ МПа} \cdot \text{ч}^{1/n_1}, \quad d_0 = 1070 \text{ МПа}, \quad n_1 = n_0 = 2.2$$

а из опытов 1, 2, 4 – константы

$$A_1 = -0.288, \quad A_2 = 0.609, \quad A_3 = 0.4, \quad m_1 = 0.35 \quad (3.6)$$

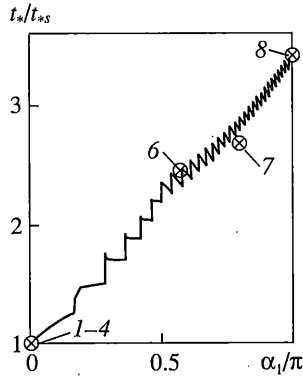
для выражений (2.6), (3.4). Судя по результатам опыта 6 (фиг. 11), замедление ползучести при повороте вектора напряжений незначительно, поэтому принято  $a = 0$ . Функция  $\varphi(\alpha)$  взята в виде двузвенной ломаной с узловыми точками  $\{\varphi(0) = 1; \varphi(\pi/2) = -0.25; \varphi(\pi) = -0.5\}$ , определенными из опытов 6 и 8. Чтобы согласовать частичную "залечиваемость" (при  $\alpha > 0.4\pi$  для данной  $\varphi(\alpha)$ ) с предположением о начальной неповрежденности материала, в (1.11) введено дополнительное условие

$$\dot{\omega}(\tau) = 0, \quad \text{если} \quad \omega(\tau) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\alpha(t, \tau)) < 0 \quad (3.7)$$

Кроме того, принято  $\varepsilon_u^{(0)*}(q_1(0)) \equiv 0.7$  [17]. Результаты расчетов по модели (2.3), (1.10), (1.11) с уточнениями (3.2)–(3.4), (3.7), константами (3.5), (3.6) и указанными  $a$ ,  $\varphi(\alpha)$ ,  $\varepsilon_u^{(0)*}$  показаны линиями на фиг. 11, 12. Для стационарных нагружений 1–4 относительные ошибки по  $t_*$  находятся в пределах  $\pm 3\%$ . Для сложных нагружений 6–8 погрешности  $t_*$  составляют от  $-4\%$  до  $+8\%$ , а отношения  $t_*$  к длительной прочности  $t_{*s}$  при соответствующем стационарном нагружении (без реверсов кручения) найдены с точностью  $\pm 5\%$  (фиг. 12, на которой  $\alpha_1$  – значение угла поворота вектора напряжений при реверсах кручения каждые 48 ч). Приведенные в работе [16] графические результаты расчетов по модели [16], развивающей модель [4] с тензорным параметром поврежденности, показывают погрешности по  $t_*$  от  $-20\%$  до  $+5\%$  для стационарных на-

грузений 1–4 и –33% для нагружения 6, а погрешности величины  $t_*/t_{*s}$  для сложных нагружений 6–8 – соответственно –25%, +5%, +18%.

Анизотропия накопления поврежденности у стали 316 при 600°C [16] больше, чем у меди при 250°C [13] – об этом свидетельствуют значения  $t_*/t_{*s}$  и функции  $\varphi(\alpha)$ . У никелевого сплава Inco 718 при 650°C [16] и алюминийевого сплава 1472 при 150°C [11] поврежденность почти изотропна – значения  $t_*/t_{*s}$  мало отличаются от единицы, и можно использовать скалярный параметр  $\omega = \omega_1$ .



Фиг. 12

Вернемся к анализу основной модели (1.9)–(1.11). В случае стационарной ползучести при напряжении  $S_{ij}^{(2)}$  после нагружения  $S_{ij}^{(1)}$  и последующей разгрузки (нагружение (1.7) с малым временем  $t_1$ ) замедления ползучести, согласно (1.9) или (2.3), нет. Если  $\sigma_u^{(1)} < \sigma_s^{(T)}$ , то, по-видимому, это верно. Если же  $\sigma_u^{(1)} \geq \sigma_s^{(T)}$ , то замедление возможно [17], и в выражение для деформации неустановившейся ползучести надо включить дополнительное к  $K(t)$  экспоненциальное слагаемое  $K_0(t)$  вида (2.4) с малым временем  $\mu_0$ .

В опытах, на которых апробирована предложенная модель, интенсивность напряжений оставалась постоянной (за исключением моментов реверса). Можно ожидать, что в случае неубывания  $\sigma_u(t)$  (в рассматриваемом интервале напряжений) модель останется пригодной. Но, как показывают опыты [16–18], предварительное нагружение выше  $\sigma_s^{(T)}$  сильно замедляет последующую ползучесть при понижении  $\sigma_u$ . Такое упрочнение материала вызвано предшествующей деформацией пластичности и ползучести, поэтому при обобщении модели на случай убывающей  $\sigma_u(t)$  могут быть полезны методы теории деформационно-анизотропной пластичности [19].

Изменение величины квазивязкости  $f(\sigma_u)/e_u$  ( $f$  – функция нелинейности) после резкого изменения направления или интенсивности нагружения указывает на необходимость связанной постановки задачи о деформировании и накоплении поврежденности. Лишь в том случае, когда свойства материала и условия нагружения позволяют пренебрегать такими эффектами, можно рассматривать длительную прочность отдельно от истории деформации [20, 21].

В работе [22] предложено проводить пошаговый подсчет значений поврежденности на всем дискретизированном наборе плоскостей внутри материала. Такой параметр поврежденности  $\Omega_n(t)$  ( $\mathbf{n}$  – вектор нормали к рассматриваемой плоскости) можно ин-

терпретировать как поверхность в реальном пространстве  $R_3$ . Скорость роста поврежденности  $\dot{\Omega}_n$  [22] определяется величиной эквивалентного напряжения на рассматриваемой площадке с помощью соотношений простого нагружения, тогда как в модели (1.9)–(1.11) величина  $\dot{\Omega}_\sigma$  зависит от функции  $\phi$ , определяемой из дополнительных опытов при сложном нагружении. Еще одним различием этих моделей является выбор меры поврежденности –  $\omega_M(t) = \max\{\Omega_n(t), \forall n \in R_3\}$  [22] и  $\omega(t) = \Omega_{\sigma(t)}(t)$ , где  $\sigma(t)$  – действующее напряжение; соответственно в первом случае поврежденность в текущий момент  $t$  необходимо вычислять для всего набора направлений в  $R_3$ , во втором – только в направлении  $\sigma(t)$ .

Укажем также на связь модели (1.9)–(1.11) с эндохронным подходом к ползучести и длительной прочности [23]. Если ввести приведенное время  $t'$ :

$$dt'/dt = [1 - a(\omega_1 - \omega)^k \sin \chi] f(\sigma_u) (1 - \omega)^{-m} / \sigma_u \equiv \Psi(\sigma_u, \chi, \omega, \omega_1)$$

то получим  $de_{ij}/dt' = 1.5S_{ij}$  – квазилинейное вязкое течение. Аргументы функции  $\Psi$  могут оказаться полезными при построении функций приведенного времени для эндохронных моделей.

В заключение отметим, что поверхность поврежденности  $\Omega(t)$ , задаваемая с помощью соотношения (1.6), и соответствующая мера  $\omega(t) = \Omega_{\sigma(t)}(t)$  не связаны с типом уравнения для скалярной поврежденности  $\omega_1(t)$  и могут применяться не только для ползучести металлов при повышенных температурах, но и для других материалов и процессов деформирования.

Автор благодарит профессора Быкова Д.Л. за плодотворные обсуждения работы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты 01-01-00084, 03-01-00667).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
3. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Инж. ж. МТТ. 1967. № 3. С. 21–35.
4. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage // Creep in Structures. Berlin: Springer, 1981. P. 422–444.
5. Leckie F.A., Onat E.T. Tensorial nature of damage measuring internal variables // Physical Non-Linearities in Structural Analysis. Berlin: Springer, 1981. P. 140–155.
6. Астафьев В.И. Описание процесса разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 164–169.
7. Hayhurst D.R., Trampczynski W.A., Leckie F.A. Creep rupture under non-proportional loading // Acta Metal. 1980. V. 28. No. 9. P. 1171–1183.
8. Дачева М.Д., Шестериков С.А., Юмашева М.А. Поврежденность при сложном нестационарном напряженном состоянии // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 44–47.
9. Hayhurst D.R. Creep rupture under multi-axial states of stress // J. Mech. Phys. Solids. 1972. V. 20. No. 6. P. 381–390.
10. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
11. Trampczynski W.A., Hayhurst D.R., Leckie F.A. Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading // J. Mech. Phys. Solids. 1981. V. 29. No. 5/6. P. 353–374.
12. Murakami S., Sanomura Y. Creep and creep damage of copper under multiaxial states of stress // Plasticity Today. London: Pergamon Press, 1985. P. 535–551.

13. *Murakami S., Sanomura Y., Saitoh K.* Formulation of cross-hardening in creep and its effect on the creep damage process of copper// *Trans. ASME. J. Engng. Mater. Technol.* 1986. V. 108. No. 2. P. 167–173.
14. *Johnson A.E., Henderson J., Mathur V.D.* Combined stress creep fracture of a commercial copper at 250° C// *The Engineer.* 1956. V. 202. No. 5248. P. 261–265, No. 5249. P. 299–301.
15. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры// *Изв. РАН. МТТ.* 1999. № 5. С. 189–205.
16. *Trivaudey F., Delobelle P.* High temperature creep damage under biaxial loading// *Trans. ASME. J. Engng. Mater. Technol.* 1990. V.112. No. 4. P.442–455.
17. *Ohashi Y., Kawai M., Momose T.* Effects of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature// *Ibid.* 1986. V. 108. No. 1. P.68–74.
18. *Mroz Z., Trampczynski W.A.* On the creep-hardening rule for metals with a memory of maximal pre-stress// *Intern. J. Solids Struct.* 1984. V. 20. No. 5. P. 467–486.
19. *Пелешко В.А.* Деформационная теория пластичности деформационно-анизотропных тел// *Изв. РАН. МТТ.* 1996. № 6. С. 68–78.
20. *Павлов П.А.* Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. Л.: Машиностроение, 1988. 252 с.
21. *Михалевич В.М.* Тензорные модели длительной прочности// *Проблемы прочности.* 1995. № 8. С. 76–90, 1995. № 9. С. 67–79, 1996. № 3. С. 101–112.
22. *Hayhurst D.R., Storakers B.* Creep rupture of the Andrade shear disk// *Proc. Roy. Soc. London. Ser.A.* 1976. V. 349. No. 1658. P. 369–382.
23. *Быков Д.Л.* Об учете повреждений в наполненных полимерных материалах// *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 1. С. 19–28.

Москва

Поступила в редакцию  
22.01.2001