**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2003**

УДК 531.1

© 2003 г. Н.И. АМЕЛЬКИН

К ТЕОРЕМЕ О ТЕЛЕСНОМ УГЛЕ

Приводится кватернионное решение задачи об определении перемещения твердого тела с неподвижной точкой через начальное и конечное положение некоторой его оси. Полученное решение в качестве одного из следствий дает теорему о телесном угле и некоторые новые ее обобщения.

Теорема о телесном угле и ее обобщения, изложенные в [1–3], в разных постановках решают задачу об определении конечного перемещения твердого тела с неподвижной точкой.

Прямая и сопряженная теоремы, приведенные в [1], рассматривают случаи, когда некоторая связанная с телом ось возвращается в свое начальное положение в пространстве, либо неподвижная в пространстве ось возвращается в свое исходное положение в теле. В этих двух случаях решение сводится к нахождению угла конечного поворота тела, так как положение оси конечного поворота определено самой постановкой задачи.

Обобщение указанных теорем, изложенное в [2], рассматривает задачу в такой постановке, когда произвольно выбранная ось **k** в конечный момент времени возвращается в исходное положение и в пространстве и в теле. В этом случае конечное положение вектора **k** определяет ось конечного поворота тела. Поэтому здесь тоже решается задача определения угла конечного поворота тела, только это решение записывается через параметры движения оси **k** и параметры движения тела относительно этой оси.

В [3] рассматривается общий случай, когда начальное и конечное положение выбранной в теле оси не совпадают. Получаемое в результате решение определяет конечное положение твердого тела, как результат двух поворотов. Первый поворот совмещает вектор начального положения оси с вектором конечного положения и осуществляется в плоскости этих векторов, а вторым является поворот вокруг конечного положения оси. При этом угол второго поворота определяется из теоремы о телесном угле.

В публикуемой работе также рассматривается задача определения конечного перемещения твердого тела в такой постановке, когда известно начальное и конечное положение некоторой оси тела. При этом решение строится без ссылок на теорему о телесном угле, а сама теорема и ее обобщения получаются как следствие решения поставленной задачи. Хотя по лаконичности предлагаемый вариант несколько уступает изложенному в [1–3], он позволяет получить некоторые новые формы решений и новые обобщения, а также представляет интерес с точки зрения используемого математического аппарата и его возможностей.

Рассмотрим произвольное движение твердого тела с неподвижной точкой на промежутке времени $[0, t]$. Конечное перемещение тела будем задавать кватернионом единичной нормы $\Lambda(t) = \cos(\vartheta/2) + \boldsymbol{\xi}\sin(\vartheta/2)$, где $\boldsymbol{\xi}(t)$ – ось конечного поворота тела, а $\vartheta(t)$ – угол конечного поворота. Все используемые оси будут обозначаться единичными векторами.

Предположим, что известно начальное $\mathbf{e}(0) = \mathbf{i}$ и конечное $\mathbf{e}(t)$ положение некоторой оси тела (фиг.1). Тогда $\Lambda(t)$ можно записать в виде

$$\Lambda(t) = N(t) \circ M(t) = M(t) \circ N^*(t) \tag{1}$$

где M – кватернион любого поворота, преобразующего вектор $\mathbf{i}$ в $\mathbf{e}$, т.е. $\mathbf{e} = M \circ \mathbf{i} \circ \overline{M}$, а N – кватернион поворота вокруг оси $\mathbf{e}$ на угол φ

$$N = \cos(\varphi/2) + \mathbf{e}\sin(\varphi/2), \quad N^* = \overline{M} \circ N \circ M = \cos(\varphi/2) + \mathbf{i}\sin(\varphi/2)$$

Отметим, что две формы записи кватерниона $\Lambda(t)$ в выражении (1) иллюстрируют известное правило перестановочности поворотов, в соответствии с которым конечное перемещение тела будет тем же самым, если сначала выполнить поворот вокруг оси $\mathbf{i}$ на угол φ, а затем первый поворот, преобразующий вектор $\mathbf{i}$ в вектор $\mathbf{e}$.

Для определения $\varphi(t)$ запишем вектор угловой скорости тела в виде

$$\boldsymbol{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \overline{\Lambda} = 2\dot{M} \circ \overline{M} + M \circ 2\dot{N}^* \circ \overline{N}^* \circ \overline{M} = 2\dot{M} \circ \overline{M} + \mathbf{e}\dot{\varphi}$$

Проектируя это равенство на направление вектора $\mathbf{e}$, получаем

$$\dot{\varphi} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} - (2\dot{M} \circ \overline{M}) \cdot \mathbf{e} \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}\,d\tau - \int_0^t (2\dot{M} \circ \overline{M}) \cdot \mathbf{e}\,d\tau \tag{2}$$

Угол $\varphi(0)$ определяется начальным значением кватерниона N, который находится из условия $\Lambda(0) = N(0) \circ M(0) = 1$ и имеет вид $N(0) = \overline{M}(0)$.

Ясно, что значение угла φ будет зависеть от выбора первого поворота, совмещающего векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{e}$, а этот выбор не однозначен. Рассмотрим сначала вариант, применяемый в [3], когда первый поворот осуществляется вокруг оси $\boldsymbol{\eta}$, перпендикулярной плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{e}$, на угол θ, равный малой дуге большого круга, соединяющей концы векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{e}$ на единичной сфере (фиг. 1). Кватернион этого поворота задается формулой (см. [4])

$$M(t) = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{\eta}\sin\frac{\theta}{2} = (-\mathbf{e} \circ \mathbf{i})^{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \mathbf{e} \circ \mathbf{i}}{\sqrt{2(1 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{i})}}$$

Для производной этого кватерниона получаем

$$\dot{M} = \frac{-\dot{\mathbf{e}} \circ \mathbf{i}}{\sqrt{2(1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e})}} - \frac{1 - \mathbf{e} \circ \mathbf{i}}{2\sqrt{2(1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e})^3}}(\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{i}) = \frac{-\dot{\mathbf{e}} \circ \mathbf{i}}{\sqrt{2(1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e})}} - \frac{M(\dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{i})}{2(1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e})}$$

а угловая скорость переносного движения определится формулой

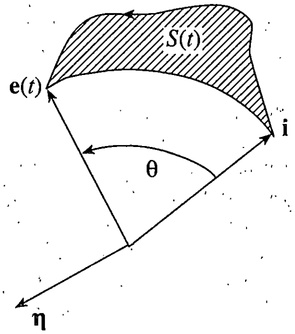
$$2\dot{M} \circ \overline{M} = \frac{-\dot{\mathbf{e}} \circ \mathbf{i} - \dot{\mathbf{e}} \circ \mathbf{e} - \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} = \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{e}) \times \dot{\mathbf{e}}}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} \tag{3}$$

В данном случае $M(0) = 1 \Rightarrow \varphi(0) = 0$, и формула (2) приобретает вид

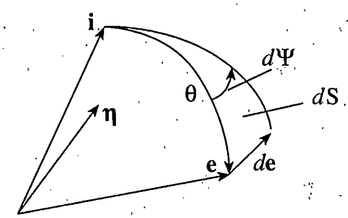
$$\varphi(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}\,d\tau + \int_0^t \frac{(\mathbf{i} \times \mathbf{e}) \cdot \dot{\mathbf{e}}}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}}\,d\tau = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}\,d\tau + S(t) \tag{4}$$

Слагаемое $S(t)$ в выражении (4) допускает геометрическую интерпретацию в виде телесного угла, заметаемого за время t малой дугой большого круга, соединяющей векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{e}$ (фиг. 1). Действительно, выражение dS в соответствии с (4) и фиг.2 можно записать следующим образом:

$$dS = \frac{(\mathbf{i} \times \mathbf{e}) \cdot d\mathbf{e}}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} = \frac{\sin\theta\boldsymbol{\eta} \cdot d\mathbf{e}}{1 + \cos\theta} = \frac{\sin^2\theta\,d\psi}{1 + \cos\theta} = (1 - \cos\theta)d\psi$$



Фиг. 1



Фиг. 2

а это есть площадь сегмента сферы между малыми дугами большого круга, соединяющими начальное положение вектора $\mathbf{e}$ с его положениями в моменты времени τ и $\tau + d\tau$.

Выражение для угла $\varphi(t)$ можно записать и в другой форме, если учесть, что $\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$. Тогда из (4) получаем

$$\varphi(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} d\tau + \int_0^t \frac{(\mathbf{i} \times \mathbf{e}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e})}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} d\tau = \int_0^t \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{i})}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} d\tau \tag{5}$$

Формулу (5) в свою очередь можно разложить на два слагаемых следующим образом

$$\varphi(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i} d\tau - \int_0^t \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{i}) \cdot (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i})}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} d\tau = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i} d\tau - S^*(t) \tag{6}$$

Поскольку выражение $(-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i})$ представляет собой скорость вектора $\mathbf{i}$ относительно тела, то слагаемое $S^*(t)$ по аналогии с (4) интерпретируется как телесный угол, заметаемый в теле малой дугой большого круга, соединяющей вектор $\mathbf{e}$ с неподвижным в пространстве вектором $\mathbf{i}$.

Если конечное положение выбранной в теле оси совпадает с начальным положением, то ось конечного поворота тела совпадает с вектором $\mathbf{i}$, а формулы (4) и (6) определяют угол конечного поворота тела и выражают собой прямую и сопряженную теоремы о телесном угле. При этом сами эти теоремы можно рассматривать как разные способы разложения угла конечного поворота, определяемого формулой (5):

$$\vartheta(t) = \int_0^t \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{i})}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} d\tau = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e} d\tau + S(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i} d\tau - S^*(t)$$

где $S(t)$ – телесный угол конуса, описанного осью $\mathbf{e}$ в пространстве, а $S^*(t)$ – телесный угол конуса, описанного неподвижной осью $\mathbf{i}$ в теле.

Выше было отмечено, что выбор поворота, совмещающего векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{e}$, не является однозначным. Рассмотрим в качестве примера поворот вокруг оси $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{i} + \mathbf{e})/|\mathbf{i} + \mathbf{e}|$ на угол π. Кватернион этого поворота равен

$$M = \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{i} + \mathbf{e})/|\mathbf{i} + \mathbf{e}| = (\mathbf{i} + \mathbf{e})/\sqrt{2(1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e})}$$

а для угловой скорости переносного движения будем иметь

$$2\dot{M} \circ \overline{M} = \frac{-\dot{\mathbf{e}} \circ \mathbf{i} - \dot{\mathbf{e}} \circ \mathbf{e} - \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}} = \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{e}) \times \dot{\mathbf{e}}}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}}$$

Полученное выражение в точности совпадает с (3), поэтому и при данном выборе $M(t)$ угол $\varphi(t)$ будет определяться формулой (4), только с добавлением другого начального значения $\varphi(0) = -\pi$, поскольку

$$M(0) = \mathbf{i} \Rightarrow N(0) = -\mathbf{i} = \cos\frac{\varphi(0)}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\varphi(0)}{2} \Rightarrow \varphi(0) = -\pi$$

Рассмотрим теперь другой вариант решения поставленной задачи. Введем в рассмотрение произвольную ось $\mathbf{k}(t)$ и систему отсчета $\mathbf{I}'$, положение которой относительно неподвижной системы $\mathbf{I}$ определим кватернионом $\Lambda_1(t)$, удовлетворяющим условию $\Lambda_1 \circ \mathbf{i} \circ \overline{\Lambda}_1 = \mathbf{k}$. Угловую скорость этой системы обозначим через $\mathbf{\Omega}$. Вектор $\mathbf{k}$ в системе $\mathbf{I}'$ неподвижен, а тело относительно этой системы вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} - \mathbf{\Omega}$. Тогда положение тела можно задать произведением двух кватернионов: $\Lambda(t) = \Lambda_2(t) \circ \Lambda_1(t)$, где $\Lambda_2(t)$ задает положение тела относительно $\mathbf{I}'$.

Для определения каждого из кватернионов $\Lambda_1(t)$ и $\Lambda_2(t)$ используем решение рассмотренной выше задачи, на основании которого $\Lambda_1(t)$ можно записать так:

$$\Lambda_1(t) = (\cos(\varphi_1/2) + \mathbf{k}\sin(\varphi_1/2)) \circ M_1$$

Здесь $M_1(t)$ – кватернион поворота в плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$, преобразующий вектор $\mathbf{i}$ в вектор $\mathbf{k}$. При этом угол $\varphi_1(t)$ можно представить на основании формулы (4) в виде

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k} d\tau + S(\mathbf{k}, t)$$

где $S(\mathbf{k}, t)$ – телесный угол, заметаемый в пространстве малой дугой большого круга, соединяющей векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$. Этот угол равен площади участка единичной сферы, заключенной между траекторией движения вектора $\mathbf{k}$ и двумя дугами большого круга, соединяющими вектор $\mathbf{i}$ с векторами $\mathbf{k}(0)$ и $\mathbf{k}(t)$ (фиг. 3).

В свою очередь кватернион $\Lambda_2(t)$, задающий движение тела относительно системы $\mathbf{I}'$, можно записать формулой:

$$\Lambda_2(t) = M_2 \circ (\cos(\varphi_2/2) + \mathbf{k}\sin(\varphi_2/2))$$

Здесь $M_2(t)$ – кватернион поворота в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$, преобразующий вектор $\mathbf{k}$ в вектор $\mathbf{e}$, а $\varphi_2(t)$ можно записать на основании формулы (6) в виде

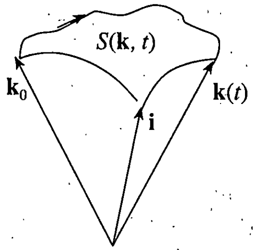
$$\varphi_2(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} d\tau - \int_0^t \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{k} d\tau - S^*(\mathbf{k}, t)$$

где $S^*(\mathbf{k}, t)$ – телесный угол, заметаемый в теле малой дугой большого круга, соединяющей $\mathbf{e}$ и $\mathbf{k}$.

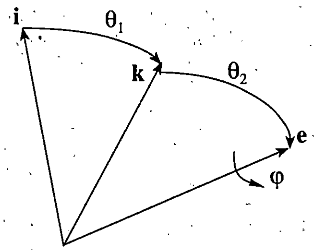
Перемножая полученные кватернионы и используя соотношения $\mathbf{e} = M_2 \circ \mathbf{k} \circ \overline{M}_2$, $\mathbf{k} = M_1 \circ \mathbf{i} \circ \overline{M}_1$, получаем следующие три формулы для искомого кватерниона:

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= M_2 \circ (\cos(\varphi_2/2) + \mathbf{k}\sin(\varphi_2/2)) \circ (\cos(\varphi_1/2) + \mathbf{k}\sin(\varphi_1/2)) \circ M_1 = \\ &= M_2 \circ (\cos(\varphi/2) + \mathbf{k}\sin(\varphi_2/2)) \circ M_1 = (\cos(\varphi/2) + \mathbf{e}\sin(\varphi/2)) \circ M_2 \circ M_1 = \\ &= M_2 \circ M_1 \circ (\cos(\varphi/2) + \mathbf{i}\sin(\varphi/2))\end{aligned} \tag{7}$$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} d\tau + S(\mathbf{k}, t) - S^*(\mathbf{k}, t) \tag{8}$$



Фиг. 3



Фиг. 4

При этом слагаемые $S(\mathbf{k}, t)$ и $S^*(\mathbf{k}, t)$ определяются формулами

$$S(\mathbf{k}, t) = \int_0^t \frac{(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \cdot \dot{\mathbf{k}}}{1 + \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}} d\tau, \quad S^*(\mathbf{k}, t) = \int_0^t \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{k}) \cdot \dot{\mathbf{k}}^*}{1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}} d\tau \tag{9}$$

где $\dot{\mathbf{k}}^* = \dot{\mathbf{k}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$ – скорость вектора $\mathbf{k}$ относительно тела.

Три формулы (7) для $\Lambda(t)$ означают, что положение тела может быть задано любой из трех последовательностей трех поворотов (фиг. 4):

1. Первый поворот в плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$ на угол θ_1. Второй поворот в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$ на угол θ_2. Третий поворот вокруг оси $\mathbf{e}$ на угол $\varphi(t)$.

2. Первый поворот в плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$ на угол θ_1. Второй поворот вокруг оси $\mathbf{k}$ на угол $\varphi(t)$. Третий поворот в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$ на угол θ_2.

3. Первый поворот вокруг оси $\mathbf{i}$ на угол $\varphi(t)$. Второй поворот в плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$ на угол θ_1. Третий поворот в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{e}$ на угол θ_2.

Угол поворота $\varphi(t)$ для всех последовательностей один и тот же и определяется формулой (8).

Приведенное решение обобщает результат, полученный в [2], поскольку в данном случае не ограничиваются начальные и конечные положения оси $\mathbf{k}$ ни в теле, ни в пространстве. Если предположить, что в момент t ось $\mathbf{k}$ вернулась в свое исходное положение и в пространстве и в теле, то получим результат, совпадающий с [2]. В этом случае $S(\mathbf{k}, t)$ и $S^*(\mathbf{k}, t)$ представляют собой, соответственно, телесный угол конуса, описанного осью $\mathbf{k}$ в пространстве, и телесный угол конуса, описанного этой осью в теле.

В заключение обратимся к интегралу, определяемому формулой (5) или эквивалентными ей формулами (4) и (6), и проанализируем зависимость значений этого интеграла от выбираемой в теле оси. Обозначим значение этого интеграла через $\varphi(\mathbf{e}, t)$. Тогда на основании формулы (1) кватернион конечного поворота тела записывается в виде

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \cos(\vartheta/2) + \boldsymbol{\xi}\sin(\vartheta/2) = \\ &= (\cos(\varphi(\mathbf{e}, t)/2) + \mathbf{e}\sin(\varphi(\mathbf{e}, t)/2)) \circ (\cos(\theta/2) + \boldsymbol{\eta}\sin(\theta/2)) \end{aligned} \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\xi}(t)$ – ось конечного поворота тела, θ – угол между начальным и конечным положением оси $\mathbf{e}$, а вектор $\boldsymbol{\eta}$ ортогонален вектору $\mathbf{e}$. Из (10) при условии $\cos(\vartheta/2) \neq 0$ следует равенство: $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{e}\,\mathrm{tg}(\vartheta/2) = \mathrm{tg}(\varphi(\mathbf{e}, t)/2)$. Отсюда для перемещений тела, ограниченных неравенством $|\vartheta(t)| < \pi$, получаем следующие утверждения:

1. Оси тела, расположенные в конечный момент времени под одинаковыми углами к оси конечного поворота, характеризуются одинаковыми значениями интеграла $\varphi(\mathbf{e}, t)$.

2. Для осей тела, расположенных в конечный момент времени в плоскости конечного поворота, выполняется соотношение $\varphi(\mathbf{e}, t) = 0$.

3. Ось конечного поворота совпадает с конечным положением той оси тела, для которой значение интеграла $\varphi(\mathbf{e}, t)$ экстремально (минимально или максимально). При этом максимальное значение этого интеграла определяет величину угла конечного поворота тела $\vartheta(t) = \max\limits_{\mathbf{e}} \varphi(\mathbf{e}, t)$.

Автор выражает благодарность В.Ф. Журавлеву за ценные замечания, сделанные при обсуждении работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (грант ТОО 14.2–1229).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.
2. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 9–14.
3. *Журавлев В.Ф.* Теорема о телесном угле в динамике твердого тела // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 323–326.
4. *Амелькин Н.И.* Кинематика и динамика твердого тела. М.: МФТИ, 2000. 63 с.
5. *Ишлинский А.Ю.* Механика специальных гироскопических систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. 432 с.

Москва

Поступила в редакцию 14.12.2000