

© 2003 г. И.Э. КЕЛЛЕР, П.В. ТРУСОВ

ФРАГМЕНТАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОЙ МОМЕНТНОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

При больших пластических деформациях в нагружаемых квазистатически металлических телах наблюдается разделение зерен на субзерна (области с однородно ориентированной кристаллической решеткой, разделенные границами ее разориентации), т. е. возникает новая пространственно-модулированная структура разориентаций решетки [1, 2]. В работе предлагается модель этого явления, основанная на следующих предположениях: (1) исследуемая деформируемая кристаллическая среда локально представляет собой взаимопроницающую систему материала и решетки, причем материал способен к произвольному аффинному формоизменению за счет кристаллографического скольжения, а решетка допускает только изгибы и кручения [3]; (2) структурный переход в напряженной среде связан с потерей устойчивости материала в смысле Хилла [4, 5], которая вызывается эффектами геометрической нелинейности (геометрического разупрочнения) [6]; (3) в момент потери устойчивости материала нагрузку начинает воспринимать решетка, способная сопротивляться только изгибаясь и закручиваясь, поэтому и появляется пространственно модулированная структура изгибов-кручений решетки.

В результате построены уравнения равновесия кристаллической среды как геометрически-нелинейного континуума Коссера. Континуум Коссера [7] представляет собой среду, частица которой снабжена спином. В настоящей работе этот спин отождествляется со спином решетки и в качестве уравнения для этой переменной служит уравнение равновесия моментов. Построены определяющие уравнения, учитывающие механизмы локального формоизменения кристаллической среды; присутствующие в них константы изгибной жесткости решетки вносят в модель масштаб. Данные уравнения предназначены для исследования бифуркаций равновесия среды и поэтому сформулированы для активного нагружения (без учета возможной разгрузки) [8], кроме того, они геометрически нелинейны и содержат механизм дестабилизации процесса деформирования. Определяющие уравнения и уравнения равновесия записаны в скоростях в терминах текущего лагранжева подхода [9]. Присутствие решеточной, а не яumannовой, коротационной производной в определяющих уравнениях приводит к неконсервативности системы; последняя изучается динамическим методом.

Поставлена модельная задача одноосного сжатия двумерного неограниченного однородного монокристаллического тела вдоль оси кубической симметрии его свойств. В качестве краевых условий потребована ограниченность полей скоростей перемещений и спина решетки на бесконечности. Найдена точка бифуркации, за которой происходит потеря устойчивости с образованием в зависимости от отношения сдвиговых модулей прямоугольной ячеистой либо волнистой (вдоль оси сжатия) структур. При переходе из любой ячейки в соседнюю спин решетки меняет свой знак, что позволяет считать данные ячейки “зародышами” субзерен, еще не имеющими четких гра-

ниц. Тем самым модель описывает тенденции, приводящие впоследствии к образованию субзеренной структуры. В предельном случае безмоментной среды [10], соответствующем нулевому значению изгибной жесткости решетки, эффект вообще не описывается. При фиксированных модулях и надкритическом напряжении размер ячеек растет с увеличением изгибной жесткости решетки. Принципиально важной для образования ячеек является анизотропия среды и напряженное состояние. При действии чисто сдвигового напряжения вдоль осей симметрии свойств среды образуется в зависимости от отношения сдвиговых модулей скошенная ячейчатая или наклоненная под 45° волнистая структура.

1. Уравнения. Элемент кристаллической среды трактуется как материальный объем, снабженный ориентацией (решетки). Локальная аффинная кинематика есть движение материала сквозь решетку (кристаллографическим скольжением) и движение (вращение) самой решетки [3]. Движение материала ориентирует решетку, а вращение решетки вовлекает в свое движение материал. Ниже выводятся геометрически нелинейные уравнения равновесия этих процессов. Данные инкрементально-линейные склерономные уравнения записываются в скоростях.

Рассматривается плоская среда в текущей напряженной конфигурации K . В K рассматривается декартова ортогональная система координат (с ортобазисом $\mathbf{e}_\alpha$)¹, с помощью которых определяются материальные координаты. Среда имеет кристаллическую структуру в виде гексагональной атомной решетки и может деформироваться только кристаллографическим скольжением по трем направлениям, задаваемым единичными векторами $\mathbf{b}_k$ вдоль плотноупакованных атомных линий. Скольжение вдоль любого такого k -го “разрешенного” направления сопровождается тождественной трансляцией решетки и в континуальном представлении описывается простым сдвигом с непрерывным параметром γ_k . Полагается, что в любой точке среды выполнено некоторое критериальное условие одновременного пластического скольжения вдоль трех разрешенных направлений [11]. Три направляющих диады $\mathbf{n}_k \mathbf{b}_k \equiv \mathbf{M}_k \sum_k (\mathbf{n}_k - \text{единичная нормаль к линии скольжения})$ сдвигов вдоль разрешенных направлений образуют базис в трехмерном пространстве X несимметричных девиаторов над двумерным линейным пространством. Принимается аддитивность градиентов скоростей, вызванных одновременно осуществляемым множественным скольжением из одной общей конфигурации K :

$$\nabla' \mathbf{v} = \dot{\gamma}_k \mathbf{M}_k \quad (1.1)$$

где ∇' – набла-вектор в базисе, связанном с решеткой, $\mathbf{v}$ – вектор скорости перемещения материальной частицы. Из (1.1) следует

$$\nabla' \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Принимается, что решетка способна вращаться со спином Ω ($\Omega^T = -\Omega$):

$$\dot{\mathbf{n}}_k = \Omega \cdot \mathbf{n}_k, \quad \dot{\mathbf{b}}_k = \Omega \cdot \mathbf{b}_k \quad (1.3)$$

Градиенты скоростей $\nabla \mathbf{v}$ (∇ – набла-вектор в неподвижном базисе $\mathbf{e}_\alpha$) и $\nabla' \mathbf{v}$ связаны

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla' \mathbf{v} - \Omega \quad (1.4)$$

¹ В работе греческие индексы изменяются по модулю 2, латинские – по модулю 3 и используется соглашение о суммировании.

Движущими силами кристаллографического скольжения являются касательные напряжения τ_k на плоскостях с нормальными $\mathbf{n}_k$ в направлениях $\mathbf{b}_k$:

$$\tau_k = \boldsymbol{\sigma} \circ \mathbf{M}_k \quad (1.5)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши, $\circ$ – скалярное умножение в X , вводимое по правилу $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = A_k B_k$ в ортобазисе $\mathbf{h}_1 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) / \sqrt{2}$, $\mathbf{h}_2 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) / \sqrt{2}$, $\mathbf{h}_3 = (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) / \sqrt{2}$.

Инкрементально-линейные определяющие уравнения для систем скольжения кристалла в предположении активного продолжения процесса (т.е. нагрузки, а не упругой разгрузки), записанные в скоростях, имеют вид $\dot{\tau}_k = H_{kl} \dot{\gamma}_l$ либо

$$\dot{\gamma}_k = C_{kl} \dot{\tau}_l \quad (1.6)$$

где H – положительно определенная матрица модулей сдвиговой жесткости, а $C = H^{-1}$. Из (1.1), (1.3) – (1.6) следует

$$\nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{C} \circ \boldsymbol{\sigma}^\Omega \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\Omega \equiv \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega} + -\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.8)$$

решеточная коротационная производная тензора напряжений Коши, $\mathbf{C} = C_{kl} \mathbf{M}_k \mathbf{M}_l$. Из (1.2) и (1.4) следует несжимаемость среды $\text{sp}(\nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}) = 0$, поэтому соотношение (1.7) связывает $\nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}$ только с девиаторной частью тензора $\boldsymbol{\sigma}^\Omega$. Обращение (1.7) может быть записано в форме

$$\boldsymbol{\sigma}^\Omega = \mathbf{H} \circ (\nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}) - p \mathbf{I} \quad (1.9)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{C}^{-1}$, $p = -\frac{1}{2} \text{sp} \boldsymbol{\sigma}$ – гидростатическое давление, $\mathbf{I} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha$. В (1.9) в обе части равенства добавлена шаровая часть тензора $\boldsymbol{\sigma}^\Omega$, чтобы слева получился полный тензор $\boldsymbol{\sigma}^\Omega$.

Уравнения равновесия в скоростях [9]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla \mathbf{v}^T \circ \nabla \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (1.10)$$

получаются материальным дифференцированием уравнений равновесия $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ с учетом искажения конфигурации, вызванного мгновенным движением материала

$$\dot{\nabla} = -(\nabla \mathbf{v}) \cdot \nabla \quad (1.11)$$

Система (1.2), (1.9), (1.10) должна быть дополнена замыкающим уравнением для спина решетки. С этой целью записывается уравнение равновесия моментов

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} - 2\boldsymbol{\sigma}_\times = \mathbf{0}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – тензор моментов-пар, локально изгибающих решетку, $\boldsymbol{\epsilon}$ – тензор Леви-Чивиты, $\boldsymbol{\sigma}_\times = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}$ – аксиальный вектор тензора $\boldsymbol{\sigma}$, имеющий смысл момента, локально поворачивающего решетку. Из этого уравнения и (1.11) следует запись в скоростях

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} - \nabla \mathbf{v}^T \circ \nabla \boldsymbol{\mu} + 2\boldsymbol{\sigma}_\times = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

Далее необходимо связать скорость изменения моментов-пар, действующих на решетку, со скоростью ее изгибов, описываемой тензором $\nabla \boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \circ \boldsymbol{\Omega}$ – век-

тор угловой скорости решетки, т.е. построить определяющие уравнения для решетки. Полагается [3, 12], что ее локальная кривизна вызывается избытком трансляционных дислокаций одного знака, залегающих в системах скольжения кристалла (в рассматриваемой решетке могут существовать только краевые дислокации),

$$\nabla \omega = \theta_k / l b_k e_3 \quad (1.13)$$

где $\delta \theta_k / l$ – изменение кривизны решетки за счет эволюции избыточной плотности дислокаций k -й системы скольжения, вызывающей изменение момента-пары решетки δm_l согласно инкрементально линейному закону

$$\dot{m}_l = L_{ik} \theta_k / l \quad (1.14)$$

$$m_l = \mu \circ b_l e_3 \quad (1.15)$$

где L – положительно определенная матрица модулей изгибной жесткости решетки. Из (1.3), (1.13) – (1.15) следует

$$\mu^\Omega = L \circ \nabla \omega \quad (1.16)$$

$$L = P^{-1}, \quad P = P_{lk} b_l e_3 b_k e_3, \quad P = L^{-1}$$

В итоге имеем систему уравнений

$$\nabla \cdot \sigma - \nabla v^T \circ \nabla \sigma = 0$$

$$\nabla \cdot \mu - \nabla v^T \circ \nabla \mu - 2\sigma_\times = 0 \quad (1.17)$$

$$\sigma^\Omega = H \circ (\nabla v + \Omega) - pI, \quad \nabla \cdot v = 0$$

$$\mu^\Omega = L \circ \nabla \omega$$

Следует отметить, что определяющие уравнения (1.9), (1.16) независимы от системы отсчета. В целом соотношения (1.17) типичны для континуума Коссера, но записаны в скоростях текущего лагранжева подхода в геометрически нелинейной форме, о чем свидетельствуют коротационные производные в уравнениях состояния и градиенты силовых тензоров в уравнениях равновесия. В систему входят материальные тензоры H , L и поля σ , $\nabla \sigma$, $\nabla \mu$ определенные в K .

2. Бифуркации при одноосном сжатии. Рассматривается неограниченная плоская среда с однородно распределенными материальными свойствами под действием однородного поля сжимающего напряжения $\sigma_{22} \equiv -\sigma$ ($\sigma \geq 0$) вдоль оси e_2 . Тогда $\sigma = \sigma^T$, $\mu = 0$, $\nabla \sigma = \nabla \mu = 0$, e_α – есть собственные векторы тензора σ , сам он имеет ортотропную симметрию с осями вдоль e_α , а уравнения (1.17) становятся линейными с постоянными коэффициентами. Из коммутатора коротационной производной σ^Ω в системе появляется бифуркационный параметр σ ; коммутатор коротационной производной в (1.16) в плоском случае исчезает: $\mu^\Omega = \mu$.

Рассматриваемая решетка имеет третий порядок симметрии и при равенстве сдвиговых модулей вдоль всех трех направлений скольжения тензоры H и L оказываются изотропными. Впоследствии выяснится, что в случае изотропии ячеистые структуры не образуются. Поэтому далее, абстрагируясь от рассмотренного в п. 1 гипотетического кристалла, позволившего установить структуру уравнений состояния, будем счи-

тать эти тензоры обладающими кубической симметрией с осями вдоль $\mathbf{e}_\alpha$. Тензор $\mathbf{H}$ в ортобазисе $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ пространства X имеет компоненты

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

(в частном случае изотропии $\mu_1 = \mu_2$), а тензор $\mathbf{L} = L_{ij}\mathbf{h}_i\mathbf{h}_j$ в ортобазисе $\mathbf{h}_4 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{h}_5 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ принимает вид

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

(для кубической симметрии и изотропии). Тензоры $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ считаются положительно определенными, т. е. $\mu_i, \lambda > 0$.

Балансовые уравнения в рамках наложенных ограничений сводятся к $\dot{\sigma}_{\alpha\beta, \alpha} = 0$, $\dot{\mu}_{13,1} + \dot{\mu}_{23,3} + \dot{\sigma}_{12} - \dot{\sigma}_{21} = 0$. Подстановка в них определяющих уравнений, условия несжимаемости и исключение p приводит к системе

$$(\mu_2 + \sigma)\phi_{,1111} + 2(2\mu_1 - \mu_2)\phi_{,1122} + (\mu_2 - \sigma)\phi_{,2222} + \\ + (2\mu_3 - \sigma)\left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\phi\right)_{,11} + (2\mu_3 + \sigma)\left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\phi\right)_{,22} = 0 \quad (2.1)$$

$$\bar{\lambda}\Delta\omega - \left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\phi\right) = 0$$

где ϕ – функция тока, определяемая как $v_1 = \phi_{,2}, v_2 = -\phi_{,1}, \mathbf{v} = v_\alpha\mathbf{e}_\alpha, \omega \equiv \omega_3, \Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$, $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\lambda/\mu_3$ – относительная изгибная жесткость решетки, имеющая размерность $[m^2]$ и определяющая характерный масштаб пространственно-модулированных решений системы.

При $\bar{\lambda} = 0$ спин решетки сводится к материальному вихрю, а определяющие уравнения (1.9) – к

$$\sigma^J = \mathbf{H} \circ \mathbf{D} - p\mathbf{I} \quad (2.2)$$

где $\sigma^J = \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \sigma$ – яуманнова коротационная производная симметричного тензора напряжений Коши, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)$ – девиатор симметричного тензора деформации скорости, $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\nabla - \nabla\mathbf{v})$ – антисимметричный тензор материального вихря. Система (2.1) сводится к уравнению

$$[\mu_2 + \sigma]\phi_{,1111} + 2[2\mu_1 - \mu_2]\phi_{,1122} + [\mu_2 - \sigma]\phi_{,2222} = 0 \quad (2.3)$$

полученному и исследованному в [10]. Левая сторона (2.3) представляет собой аффинную часть оператора (2.1), способную к потере строгой эллиптичности.

Полагается, что тело в текущей конфигурации имеет не только однородно распределенные свойства, но и однородные поля ориентации решетки и перемещений час-

тиц, находящиеся в равновесии под действием приложенного напряжения. Уравнения (2.1) следует воспринимать как уравнения равновесия возмущений этих полей в K , записанные в скоростях, или как линеаризацию уравнений равновесия тела. Тривиальные решения (2.1) соответствуют “основному”, невозмущенному состоянию тела, но здесь интерес представляют нетривиальные, “отклоненные” решения и условие их появления, означающего бифуркацию.

Возмущения берутся в “стандартной” форме, соответствующей ограниченным на бесконечности решениям системы (2.1) линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, в виде гармонических функций

$$\phi = \text{Re}[\phi_0 \exp(ik \cdot x)], \quad \omega = \text{Re}[\omega_0 \exp(ik \cdot x)] \quad (2.4)$$

где k – вещественный волновой вектор, i – мнимая единица, ϕ_0, ω_0 – комплексные амплитуды. Линии $k \cdot x = k \text{const}$, $k = |k|$ являются характеристиками аффинной части оператора (2.1). Вектор $k = k_\alpha e_\alpha$ представляется как $k_\alpha = k\{-\sin\delta, \cos\delta\}$ ($\alpha = 1, 2$), где δ – угол наклона характеристики относительно e_1 . Обозначим $\cos 2\delta \equiv x$, причем $0 < x \leq 1$ в силу симметрии задачи.

Подстановка (2.4) в (2.1) ведет к системе

$$\begin{aligned} Ak^4 \phi_0 - Bk^2 \omega_0 &= 0 \\ \frac{1}{2} k^2 \phi_0 - (1 + \bar{\lambda} k^2) \omega_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$A = \mu_1 + \mu_3 + (\mu_2 - \mu_1)x, \quad B = 2(\mu_3 + \sigma x)$$

Ненулевые ϕ_0, ω_0 существуют, когда

$$A \bar{\lambda} k^2 + \left(A - \frac{1}{2} B\right) = 0 \quad (2.6)$$

или $k^2 = 0$. Последнее при условии ограниченности решения на бесконечности соответствует жесткому движению, и если его запретить, то $k^2 = 0$ следует отнести к основному состоянию. Равенство (2.6) равносильно

$$\sigma = (\mu_2 - \mu_1)(1 + \bar{\lambda} k^2)x + (\mu_1 + (\mu_3 + \mu_1)\bar{\lambda} k^2)/x \quad (2.7)$$

Функция (2.7) представима в виде $y = A \bar{\lambda} k^2 + B$, $y \geq 0$, где $A, B > 0$ при $0 < x \leq 1$, и ее минимум по $k^2 \geq 0$ достигается при $k^2 = 0$ и равен $y = ax + b/x$, $a = \mu_2 - \mu_1$, $b = \mu_1 > 0$. Положительный минимум у по $-1 \leq x \leq 1$ находится в интервале $0 < x \leq 1$ и при $a \geq b$ соответствует значению $y_0 = 2\sqrt{ab}$ в точке $x_0 = \sqrt{b/a}$, а при $a < b$ – значению $y_0 = a + b$ в точке $x_0 = 1$.

В результате при $\mu_2 \leq 2\mu_1$ (сюда входит и случай изотропии $\mu_2 = \mu_1$) в момент $\sigma_0 = \mu_2$ аффинная часть оператора (2.1) теряет строгую эллиптичность с переходом в параболический режим с образованием характеристики под углом $\delta_0 = 0$. При $\mu_2 > 2\mu_1$ в момент $\sigma_0 = 2\sqrt{(\mu_2 - \mu_1)\mu_1}$ аффинная часть оператора (2.1) теряет строгую эллиптичность с переходом в гиперболический режим с образованием пары характеристик под углами $\pm\delta_0$, где $\delta_0 = \frac{1}{2} \arccos \sqrt{\mu_1/(\mu_2 - \mu_1)} \leq \pi/4$. Таким образом, условие бифуркации и симметрия решений уравнений (2.1) определяются только аффинной частью (2.1). Ортогональная симметрия расположения характеристик относительно осей e_α определяет

ся пересечением групп симметрии тензоров $\mathbf{H}$ и $\boldsymbol{\sigma}$. В момент бифуркации $\bar{\lambda}k^2 = 0$, и если $\bar{\lambda} \neq 0$, то $k = 0$, т.е. имеет место тривиальное решение.

Нетривиальные решения появляются сразу за критическим напряжением, а их параметры зависят от надкритичности $\sigma - \sigma_0 \equiv \Delta\sigma > 0$. При $\mu_2 \leq 2\mu_1$ получаем интервал x

$\in (x_-, 1]$, а при $\mu_2 > 2\mu_1$ интервал $x \in (x_-, x_+)$, где $x_{\pm} = \frac{1}{2}[\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4(\mu_2 - \mu_1)\mu_1}]/(\mu_2 - \mu_1)$.

При $\Delta\sigma \rightarrow 0$ эти интервалы непрерывно стягиваются к точкам $x_0 = 1$ и $x_0 = \cos 2\delta_0$. Это означает, что при малом превышении критического напряжения наклон характеристик изменяется также мало. Любому x из соответствующих интервалов соответствует свое волновое число k . Предполагается, что из множества допустимых реализуется волновой вектор, обладающий некоторым экстремальным свойством.

3. Энергетический смысл структурного перехода. Можно убедиться, что не существует квадратичной функции U , уравнения Эйлера–Лагранжа для которой

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial U}{\partial \phi_{,11}} + \frac{d^2}{dx dy} \frac{\partial U}{\partial \phi_{,12}} + \frac{d^2}{dy^2} \frac{\partial U}{\partial \phi_{,22}} = 0, \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial \omega_{,1}} + \frac{d}{dy} \frac{\partial U}{\partial \omega_{,2}} - \frac{\partial U}{\partial \omega} = 0 \quad (3.1)$$

давали бы линейные уравнения (2.1). Для этого достаточно увидеть, что слагаемое $\sigma\omega_{,11}$ в первом уравнении (2.1) может появиться только из слагаемого $\sigma\phi_{,11}$ в функции U , но тогда во втором уравнении (3.1) возникнет добавка $\sigma\phi_{,11}$, которой нет во втором уравнении (2.1).

Отсутствие лагранжиана U построенной модели не позволяет использовать экстремальные принципы энергетической природы для нахождения волнового вектора сразу за точкой бифуркации. Неконсервативность не редкость для систем с вращательными степенями свободы, которые в таком случае обычно исследуются динамическим методом [13]. Он и будет использован в п. 4 для нахождения волнового вектора, обладающего наивысшей скоростью роста и определяющего форму решения в рамках метода линейных возмущений.

Причина неконсервативности системы заключается в природе спина коротационной производной определяющих уравнений (1.9). Единственной коротационной производной, допустимой в инкрементально-линейных соотношениях, связывающих скорости энергетически сопряженных тензоров аффинных деформаций и напряжений в терминах текущего лагранжева подхода, является яуманнова производная [14]. Если бы в (1.9) в качестве спина коротационной производной был использован тензор материального вихря $\mathbf{W}$, решеточная производная σ^{Ω} свелась бы к яуманновой σ^J , а система (2.1) приняла вид

$$(\mu_2 + \sigma)\phi_{,1111} + 2(2\mu_1 - \mu_2)\phi_{,1122} + (\mu_2 - \sigma)\phi_{,2222} + 2\mu_3\Delta\left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\phi\right) = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{\lambda}\Delta\omega - \left(\omega + \frac{1}{2}\Delta\phi\right) = 0$$

Для (3.2) лагранжиан существует $2U = 2U_0 + \frac{1}{2}\mu_3(2\omega + \Delta\phi)^2 + \lambda(\nabla\omega)^2$, где

$$2U_0 = \frac{1}{2}[\mu_2 + \sigma]\phi_{,11}^2 - [\mu_2 + \sigma]\phi_{,11}\phi_{,22} + \frac{1}{2}[\mu_2 - \sigma]\phi_{,22}^2 + [2\mu_1 + \sigma]\phi_{,12}^2 \quad (3.3)$$

есть лагранжиан системы (2.3), являющейся предельным случаем и консервативной (3.2), и неконсервативной (2.1) моделей при $\bar{\lambda} \rightarrow 0$. Функция (3.3) в общем записывает

ся как $2U_0 = \sigma^H \circ \nabla v$ ($\sigma^H \equiv \sigma - v \nabla \cdot \sigma$ – производная Хилла тензора напряжений Коши для несжимаемого материала), а неравенство

$$\sigma^H \circ \nabla v > 0 \quad (3.4)$$

исключает бифуркации в задаче Дирихле для (2.3) и означает условие устойчивости материала [4, 5]. Неравенство (3.3) обобщает известный в пластичности постулат Друкера [15] на геометрически нелинейные материалы, способные дестабилизироваться за счет геометрического разупрочнения. Для моделей (2.1) и (3.2) при переходе через критическую точку значение U_0 меняет свой знак с положительного на отрицательный, т.е. до этой точки аффинные деформации энергию усваивают, а за ней – выделяют. В момент изоляции аффинных мод выделяемую ими энергию начинают усваивать неаффинные моды деформации независимо от наличия или отсутствия свойства консервативности системы.

Исследуемая деформируемая среда представляет собой взаимопроникающую систему материала и решетки. В момент бифуркации нарушается условие (3.4) устойчивости материала и нагрузку воспринимает решетка, в рамках модели способная сопротивляться только изгибам. Поэтому после бифуркации и появляется пространственно-модулированная структура изгибов решетки. Изгибная жесткость решетки профилирует решение вдоль нормалей к характеристикам аффинной части оператора равновесия. В случае же $\bar{\lambda} = 0$ такие профили могут быть произвольными [5].

4. Определение волнового вектора. Динамику построенной склерономной системы свяжем с ее инерционностью и в правые части уравнений (2.1) добавим соответственно $\rho \Delta \ddot{\phi}$ и $\bar{J} \ddot{\omega}$ (ρ – плотность массы, $\bar{J}$ – плотность момента инерции, отнесенная к $2\mu_3$). Решения разыскиваются в виде:

$$\phi = \text{Re}[\phi_0 \exp(ik \cdot x + wt)], \quad \omega = \text{Re}[\omega_0 \exp(ik \cdot x + wt)] \quad (4.1)$$

где w – комплексная скорость, а уравнения (2.5) принимают вид

$$\begin{cases} (Ak^4 + \rho w^2 k^2) \phi_0 - Bk^2 \omega_0 = 0 \\ \frac{1}{2} k^2 \phi_0 - (1 + \bar{\lambda} k^2 + \bar{J} w^2) \omega_0 = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

Условие существования нетривиальных решений

$$\rho \bar{J} w^4 + [\rho(1 + \bar{\lambda} k^2) + \bar{J} A k^2] w^2 + (1 + \bar{\lambda} k^2) A k^2 - (\sigma x + \mu_3) k^2 = 0 \quad (4.3)$$

представляет собой биквадратное уравнение, корни которого

$$w_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (-c \pm \sqrt{c^2 - 4\rho \bar{J} d}) / (\rho \bar{J})$$

$$c = \rho(1 + \bar{\lambda} k^2) + \bar{J} A k^2 > 0 \quad (4.4)$$

$$d = [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 - \sigma x]k^2 + [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3]\bar{\lambda} k^4$$

Знак d меняется с положительного на отрицательный при условии (2.7), т.е. переходе бифуркационного параметра σ через критическое значение. Независимо от значения σ

$$c^2 - 4\rho \bar{J} d = \{\rho(\bar{\lambda} k^2 + 2\mu_3) - \bar{J} k^2 [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 + \mu_3]\}^2 + 8\rho \bar{J} v_3 (\sigma x + \mu_3) k^2 > 0$$

При переходе σ через критическое значение одна пара сопряженных корней $\pm\sqrt{w_+}$ движется по мнимой оси комплексной плоскости к нулю и, встретившись в нуле, уходит от него вдоль вещественной оси; вторая пара сопряженных мнимых корней $\pm\sqrt{w_-}$ при этом постоянно удаляется от нуля. Это означает [13], что сразу после критической точки развивается дивергентная (статическая) форма потери устойчивости. При докритических σ корни $w_{\pm}^2 < 0$ и единственное тривиальное продолжение процесса устойчиво. При критическом σ корни $w_+^2 = 0$, $w_-^2 = -J^{-1}$ и при наложенных ограничениях, запрещающих жесткое движение, имеем аналогичный результат. Наконец, при надкритическом σ корни $w_+^2 > 0$, $w_-^2 < 0$ и развивается потеря устойчивости в форме отклоненного решения.

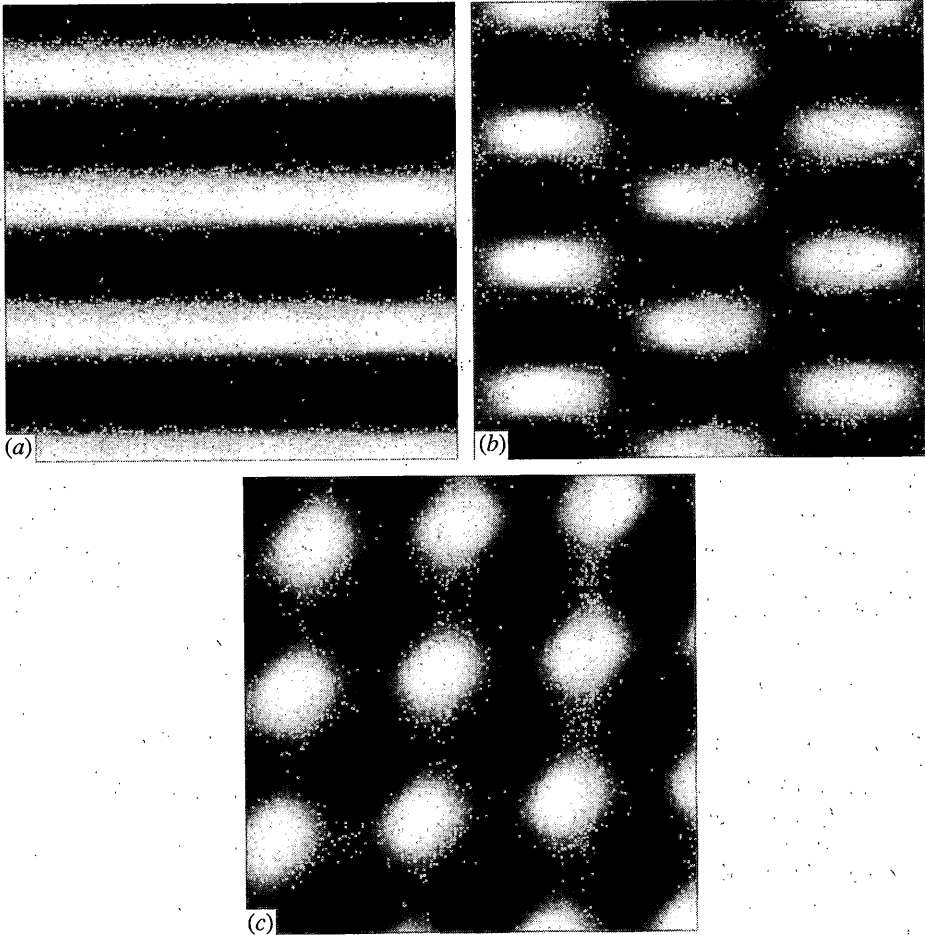
Отклоненное решение при малом $\Delta\sigma$ образуют волновые векторы с параметрами k_* и $\pm\delta_*$, соответствующими максимальной скорости роста $|w_+|$. Используя малость $\Delta\sigma$,

$\sqrt{c^2 - 4\rho Jd} \approx c - 2\rho Jd/c$, $w_+^2 \approx -d/c$, а поскольку $|d| \ll c$ и $c > 2\rho\mu_4 > 0$ при $k^2 \geq 0$, максимум функции $w_+^2(k, x)$ приближенно соответствует максимуму функции $-d(k, x)$ или $-d(k^2, x)$. Если в выражении $d(k^2, x)$ дополнительно пренебречь слагаемым, содержащим $x^2 k^4$ (k^2 мал), задача сведется к максимизации $d = [(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 - \sigma x]k^2 + (\mu_1 + \mu_3)\bar{\lambda} k^4$ в области $d(x, k^2) < 0$ полосы $0 < x \leq 1$, $k^2 > 0$. Из этих неравенств следует $(\mu_2 - \mu_1)x^2 + \mu_1 - \sigma x + \mu_1 < 0$, откуда для $\sigma > \sigma_0$ получаем интервалы изменения x , совпадающие с полными в п. 2. Для $\mu_2 \leq 2\mu_1$ имеем $x_* = x_0 = 1$, $k_*^2 = \frac{1}{2} \Delta\sigma(\mu_2 + \mu_3)^{-1} \bar{\lambda}^{-1}$, а для $\mu_2 > 2\mu_1 - x_* =$
 $= x_0 + \frac{1}{2} \Delta\sigma(\mu_2 + \mu_3)^{-1}$, $k_*^2 = x_0 \Delta\sigma(\mu_1 + \mu_3)^{-1} \bar{\lambda}^{-1}$. Видно, что изгибная жесткость решет-

ки $\bar{\lambda}$ не влияет на наклон линии с экстремальными свойствами, а определяет волновое число k , уменьшающееся с ростом $\bar{\lambda}$.

При $\mu_2 \leq 2\mu_1$ и любом напряжении σ сразу за критической точкой происходит образование стоячей волны вдоль оси сжатия с волновым числом k_* (фиг., а). При $\mu_2 > 2\mu_1$ решение представляет собой суперпозицию двух стоячих волн нормально к характеристикам с параметрами x_* , k_* , приводящую к ячеистому профилю (фиг., б). При переходе из любой ячейки в соседнюю спин решетки меняет свой знак, что позволяет считать данные ячейки "зародышами" субзерен. Бифуркация приводит к разориентации кристаллической решетки этих ячеек, то есть к фрагментации интересующего нас типа. В изотропной среде ($\mu_2 = \mu_1$) ячеистые решения отсутствуют. В данной модели механизм неустойчивости материала не связан с изменением его анизотропии и последняя отвечает только за симметрию решения. Характерный размер ячеек k^{-1} растет с увеличением изгибной жесткости решетки и малой надкритичности напряжения. Анализ выражения для x_* показывает тенденцию сплющивания ячеек вдоль оси сжатия с увеличением $\Delta\sigma$. Напряжение σ входит в касательные модули, связывающие тензоры σ^H и D , его рост изменяет степень анизотропии материала и ведет к плавному изменению пропорций ячеек.

При исчезновении изгибной жесткости мода потери устойчивости имеет бесконечно большое количество полуволн нормально к характеристикам и дивергентный тип. Это означает, что в момент бифуркации точки среды становятся изолированными и начинают свободно уходить от основного состояния со своими начальными скоростями.



ми. Природа такого решения кроется в ограниченности безмоментной модели (2.3), исследованной в [10].

5. Образование скошенных ячеистых структур. При действии на рассматриваемую среду в K произвольного симметричного напряженного состояния аффинная часть оператора равновесия, определяющая, как выяснено выше, точку бифуркации, наклон характеристик и симметрию образующейся структуры, принимает вид

$$\mu_2 \phi_{,1111} + 2[2\mu_1 - \mu_2] \phi_{,1122} + \mu_2 \phi_{,2222} - \sigma(\phi_{,2222} - \phi_{,1111}) + 2\tau(\phi_{,1112} + \phi_{,1222}) = 0 \quad (5.1)$$

где $\sigma \equiv \sigma_{11} - \sigma_{22}$, $\tau \equiv \tau_{12}$ будут без уменьшения общности полагаться положительными. В случае $\tau = 0$ условие бифуркации принимает вид

$$\sigma = (\mu_2 - \mu_1) \cos 2\delta + \mu_1 / \cos 2\delta \quad (5.2)$$

а в случае $\sigma = 0$:

$$\tau = (\mu_1 - \mu_2) \sin 2\delta + \mu_2 / \sin 2\delta \quad (5.3)$$

Видно, что значения τ_0 , σ_0 для (5.3) могут быть получены из уже найденных значений σ_0 , δ_0 для (5.2) заменой $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ и $\cos \leftrightarrow \sin$. В результате при $\mu_1 \leq 2\mu_2$ (сюда входит и случай изотропии $\mu_2 = \mu_1$) в момент $\tau_0 = \mu_1$ оператор (5.1) теряет строгую эллиптичность

с переходом в параболический режим с образованием характеристики под углом $\delta_0 = \pi/4$. При $\mu_1 > 2\mu_2$ в момент $\tau_0 = 2\sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2}$ этот оператор теряет строгую эллиптичность с переходом в гиперболический режим с образованием пары характеристик под углами δ_0 и $\pi/2 - \delta_0$, где $\delta_0 = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\mu_2/(\mu_1 - \mu_2)} \leq \pi/4$. Последний случай соответствует образованию скошенной ячеистой структуры (фиг., с). Такие структуры разориентаций кристаллической решетки типа скошенной шахматной доски часто наблюдают в экспериментах [1, 2].

Естественной основой для предпринятого в работе описания явления возникновения пространственно-модулированных ротационных структур явился континуум Коссера, содержащий и ротации, и масштаб. Неопределенность амплитуды образующегося профиля и размытость границ фрагментов очевидно вызвана использованием линейаризованной постановки. Для приближения же характерного размера структуры (в модели зависящего от $\Delta\sigma$, т.е. также неопределенного) к экспериментально наблюдаемой величине, необходимо задать по возможности близкий к реальному способ нагружения фрагментируемого кристаллического объема.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98-01-00125, 01-01-00440) и конкурсного центра "Фундаментальные исследования в области естественных и точных наук" Минобразования (проект 97-0-4.3-9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.
2. Bay B., Hansen N., Hughes D.A., Kuhlmann-Wilsdorf D. Evolution of F.C.C. deformation structures in polyslip // Acta Metall. Mater. 1992. V. 40. № 2. P. 205–219.
3. Forest S., Cailletaud G., Sievert R. A Cosserat theory for elastoviscoplastic single crystals at finite deformation // Arch. Mech. 1997. V. 49. № 4. P. 705–736.
4. Hill R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids // J. Mech. Phys. Solids. 1958. V. 6. № 3. P. 236–249.
5. Hill R. Acceleration waves in solids // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10. № 1. P. 1–16.
6. Asaro R.J. Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals // Acta Metall. 1979. V. 27. № 3. P. 445–453.
7. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
9. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации. М.: Наука, 1986. 232 с.
10. Hill R., Hutchinson J.W. Bifurcation phenomena in the plane tension test // J. Mech. Phys. Solids. 1975. V. 23. № 4/5. P. 239–264.
11. Келлер И.Э., Трусов П.В. Обобщение теории Бишопа – Хилла пластического формоизменения монокристалла // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 93–102.
12. Kröner E. On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // Intern. J. Engng. Sci. 1963. V. 1. № 2. P. 261–278.
13. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
14. Hill R. On constitutive inequalities for simple materials I // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 4. P. 229–242.
15. Drucker D.C. A definition of stable inelastic material // J. Appl. Mech. 1959. V. 26. № 1. P. 101–106.