

© 2003 г. В.И. ОСТРИК, А.Ф. УЛИТКО

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖЕСТКОГО КЛИНА С УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЬЮ С УЧЕТОМ ЗОН СЦЕПЛЕНИЯ И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Задачи о контактном взаимодействии жесткого конуса или клина с упругим полупространством без учета сил трения, возникающих в области контакта, рассматривались еще в [1–3]. Контакт жесткого и упругого клиньев или первоначально точечном касании в их общей вершине исследовался в [4].

При контакте с трением двух упругих тел (или упругого и жесткого тела) в центральной части области контакта может возникать зона полного сцепления, где отношение касательных усилий к нормальному давлению не превышает коэффициента трения. На оставшейся же части области контакта, примыкающей к ее границе, наблюдается проскальзывание поверхностей контактирующих тел. При этом касательные усилия и нормальное давление связаны законом Амонтона (Кулона).

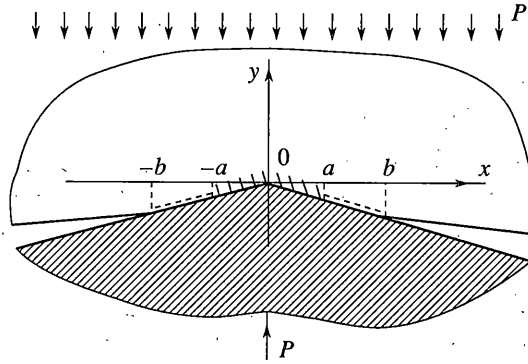
При изучении контакта с трением и частичным сцеплением в [5, 6] был предложен инкрементальный подход, согласно которому расчет напряженного состояния производится пошагово при увеличении участка контакта с возрастанием нагрузки в предположении статического равновесия на каждой стадии. В противояс инкрементальному подходу в [7] предложен путь непосредственного решения задачи, основываясь на том, что во все моменты нагружения сохраняется подобие поля напряжений и размеры областей сцепления и проскальзывания находятся в постоянном отношении. Соображения подобия дают возможность сформулировать граничное условие для тангенциальных перемещений в зоне сцепления.

В [8] решена контактная задача о вдавлении в упругое полупространство индектора полиномиального профиля, в частности конуса, с учетом сил трения, а также зон сцепления и проскальзывания в области контакта. При этом получено приближенное решение при условии, что касательные усилия, в силу своей малости, не оказывают влияния на распределение нормального давления в области контакта.

1. Постановка задачи. Пусть жесткий клин с углом полураствора $\pi/2 - \varepsilon$, близким к $\pi/2$, до нагружения касается своей вершиной границы $y = 0$ упругой полуплоскости $y \geq 0$ в точке $x = 0, y = 0$; ось клина перпендикулярна границе полуплоскости. Пусть клин под действием силы P , направленной вдоль оси клина, вдавливается в упругую полуплоскость. При этом в упругой полуплоскости на бесконечности приложена нагрузка с главным вектором P , направленным перпендикулярно к границе полуплоскости, и главным моментом, равным нулю. Систему координат xOy будем считать связанной с жестким клином (фиг. 1).

В результате нагружения берега клина входят в соприкосновение с упругой полуплоскостью в малой окрестности вершины клина. Размер $2b$ области контакта заранее неизвестен и может быть найден в процессе решения задачи. Будем предполагать, что на части $[-a, a]$ области контакта $[-b, b]$, где $0 < a < b, y = 0$, возникает зона сцепления границ полуплоскости и клина. В зонах проскальзывания $[-b, -a], [a, b]$ нормальные и касательные усилия связаны законом трения Амонтона. Отношение a/b размера зоны сцепления к размеру всей области контакта при постановке задачи остается неизвестным. Чтобы иметь возможность использовать уравнения линейной теории упругости, будем считать угол ε зазора между клином и полуплоскостью достаточно малым.

При указанном нагружении в полуплоскости возникает состояние плоской деформации, симметричное относительно оси Oy .



Фиг. 1

Смешанные граничные условия сформулируем для зоны сцепления $|x| \leq a$, зоны проскальзывания $a < |x| \leq b$ и зоны $|x| > b$ свободной от нагрузки границы $y = 0$ упругой полуплоскости:

$$u_y|_{y=0} = -|x| \operatorname{tg} \varepsilon \quad (|x| \leq b) \quad (1.1)$$

$$u_x|_{y=0} = C_0 x \quad (|x| \leq a) \quad (1.2)$$

$$|\tau_{xy}|_{y=0} < \mu_0 |\sigma_y|_{y=0} \quad (|x| < a) \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \operatorname{sign} x \mu_0 \sigma_y|_{y=0} \quad (a < |x| \leq b) \quad (1.4)$$

$$\sigma_y|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad (|x| > b) \quad (1.5)$$

где μ_0 – коэффициент трения, C_0 – неизвестная постоянная.

Вид условия (1.2) вызван требованием подобия получаемого ниже решения. При постановке задачи предполагается, что в области контакта нормальное напряжение $\sigma_y|_{y=0}$ ($|x| < b$) отрицательно, это соответствует давлению клина на полуплоскость, за исключением крайних точек $x = \pm b$ области контакта, где, согласно принципу Буссинеска [9], напряжения обращаются в нуль. В зоне проскальзывания точки границы полуплоскости скользят в направлении к вершине клина, т.е.

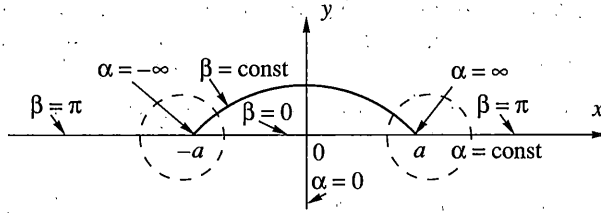
$$\operatorname{sign} u_x|_{y=0} < 0 \quad (a < |x| \leq b) \quad (1.6)$$

Направление движения граничных точек полуплоскости подсказано решением соответствующей задачи без учета сил трения [3]. Вторым предположением продиктовано наличие множителя $\operatorname{sign} x$, в граничном условии (1.4). Ввиду непрерывности перемещения u_x можно заключить, что при выполнении условия (1.6) постоянная C_0 будет отрицательной.

2. Определяющие соотношения. Представим решение (при $y = 0$) через две гармонические функции Φ_2, Φ_3 [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(3 - 4\nu)\Phi_2 - \Phi_3] \\ \frac{1}{2G} \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} [2(1 - \nu)\Phi_2 - \Phi_3], \quad \frac{1}{2G} \tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} [(1 - 2\nu)\Phi_2 - \Phi_3] \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига упругой полуплоскости.



Фиг. 2

Перейдем к биполярным координатам α, β (фиг. 2); при этом

$$x = a \frac{\text{sh } \alpha}{\text{ch } \alpha + \cos \beta}, \quad y = a \frac{\sin \beta}{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \quad (2.2)$$

Интегральные представления для гармонических функций Φ_2, Φ_3 в биполярных координатах имеют вид [10]:

$$\Phi_2(\alpha, \beta) = C_2 \ln \frac{\text{ch}(\alpha/2) + \sin(\beta/2)}{\cos(\alpha/2) - \sin(\beta/2)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(\lambda) \text{ch } \lambda \beta + B_2(\lambda) \text{sh } \lambda \beta] e^{-i\lambda \alpha} d\lambda \quad (2.3)$$

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = (1 - 2\nu) C_2 \ln \frac{\cos(\alpha/2) + \sin(\beta/2)}{\text{ch}(\alpha/2) - \sin(\beta/2)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [A_3(\lambda) \text{ch } \lambda \beta + B_2(\lambda) \text{sh } \lambda \beta] e^{-i\lambda \alpha} d\lambda$$

где C_2 – неизвестная постоянная, $A_2(\lambda), B_2(\lambda), A_3(\lambda), B_3(\lambda)$ – неизвестные функции.

После дифференцирования соотношений (1.1), (1.2), граничные условия (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [(3 - 4\nu)\Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\substack{\beta = 0, -\infty < \alpha < \infty \\ \beta = \pi, |\alpha| > \alpha_0}} = -\frac{a \text{tg } \varepsilon}{1 \pm \text{ch } \alpha} \text{sign } \alpha$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta = 0} = \frac{C_0 a}{\cos \alpha + 1} \quad (-\infty < \alpha < \infty)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [2(1 - \nu)\Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta = \pi} = \begin{cases} \frac{a \sigma(\alpha)}{\text{ch } \alpha - 1}, & |\alpha| \geq \alpha_0 \\ 0, & |\alpha| < \alpha_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [2(1 - \nu)\Phi_2 - \Phi_3] \Big|_{\beta = \pi} = \begin{cases} \mu_0 \frac{a \sigma(\alpha)}{\text{ch } \alpha - 1} \text{sign } \alpha, & |\alpha| \geq \alpha_0 \\ 0, & |\alpha| < \alpha_0 \end{cases}$$

При этом введено обозначение неизвестной функции

$$\sigma(\alpha) = -\frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=0} \quad (|\alpha| \geq \alpha_0, a < |x| \leq b, \sigma(-\alpha) = \sigma(\alpha)) \quad (2.5)$$

значение $\alpha_0 = \ln[(b + a)/(b - a)]$ соответствует точке $x = b$.

Первое условие (2.4) удовлетворим пока только в зоне сцепления ($|x| < a, \beta = 0$). С помощью интегральных представлений (2.3) граничные условия (2.4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda [(3-4\nu)A_2(\lambda) - A_3(\lambda)] e^{-i\lambda\alpha} d\lambda &= -\frac{ia \operatorname{tg} \varepsilon}{1 + \operatorname{ch} \alpha} \operatorname{sign} \alpha \quad (-\infty < \alpha < \infty) \\ (1-2\nu)C_2 \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda B_3(\lambda) e^{-i\lambda\alpha} d\lambda &= \frac{C_0 a}{\operatorname{ch} \alpha + 1} \quad (-\infty < \alpha < \infty) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \{2(1-\nu)[A_2(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda + B_2(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda] - A_3(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda - B_3(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda\} e^{-i\lambda\alpha} d\lambda &= \\ = \begin{cases} \frac{a\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1}, & |\alpha| \geq \alpha_0 \\ 0, & |\alpha| < \alpha_0 \end{cases} & \quad (2.6) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \{(1-2\nu)[A_2(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda] - A_3(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda - B_3(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda\} e^{-i\lambda\alpha} d\lambda &= \\ = \begin{cases} \mu_0 \frac{a\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1} \operatorname{sign} \alpha, & |\alpha| \geq \alpha_0 \\ 0, & |\alpha| < \alpha_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Обращая соотношения (2.6), получаем систему алгебраических уравнений для определения неизвестных функций $A_2(\lambda), A_3(\lambda), B_3(\lambda)$:

$$\begin{aligned} (3-4\nu)A_2(\lambda) - A_3(\lambda) &= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{tg} \varepsilon \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \varepsilon}{\operatorname{ch} \alpha + 1} d\alpha \\ B_3(\lambda) &= \sqrt{2\pi} \left[C_0 a \frac{1}{\operatorname{sh} \pi\lambda} - (1-2\nu)C_2 \frac{1}{\lambda \operatorname{ch} \pi\lambda} \right] \\ 2(1-\nu)[A_2(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda + B_2(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda] - A_3(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda - B_3(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda &= a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \int_{\alpha_0}^{\infty} \sigma(\alpha) \frac{\cos \lambda \alpha}{\cos \alpha - 1} d\alpha \quad (2.7) \\ (1-2\nu)[A_2(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda + B_2(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda] - A_3(\lambda) \operatorname{ch} \pi\lambda - B_3(\lambda) \operatorname{sh} \pi\lambda &= \\ = -a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu_0 \frac{1}{\lambda} \int_{\alpha_0}^{\infty} \sigma(\alpha) \frac{\sin \lambda \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha \end{aligned}$$

Напряжения в зоне сцепления принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{a} \left\{ \frac{C_2}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda [2(1-\nu)B_2(\lambda) - B_3(\lambda)] e^{-i\lambda\alpha} d\lambda \right\} \\ \frac{\tau_{xy}}{2G} \Big|_{\beta=0} &= \frac{\operatorname{ch} \alpha + 1}{ia} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda [(1-2\nu)A_2(\lambda) - A_3(\lambda)] e^{-i\lambda\alpha} d\lambda \quad (-\infty < \alpha < \infty) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Решая систему уравнений (2.7), с помощью соотношений (2.8) получим комплексную комбинацию напряжений в зоне сцепления:

$$\frac{1}{2G}(\sigma_y + i\tau_{xy})|_{\beta=0} = (\operatorname{ch}\alpha + 1) \left\{ \frac{1-\nu}{\sqrt{3-4\nu}} (1+i\mu_0) \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch}\xi - 1} \frac{e^{i\theta(\alpha-\xi)}}{\operatorname{ch}((\alpha-\xi)/2)} d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{\sqrt{3-4\nu}} (1-i\mu_0) \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch}\xi - 1} \frac{e^{i\theta(\alpha+\xi)}}{\operatorname{ch}((\alpha+\xi)/2)} d\xi + \frac{iC_0}{\sqrt{3-4\nu}} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{e^{i\theta\alpha}}{\operatorname{ch}(\alpha/2)} \right) + \right. \quad (2.9)$$

$$\left. + \frac{2(1-\nu)C_2}{\sqrt{3-4\nu}} \frac{e^{i\theta\alpha}}{a \cos(\alpha/2)} - i \frac{1-2\nu}{3-4\nu} \operatorname{tg}\varepsilon \frac{\operatorname{sign}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + 1} - \frac{1-\nu}{3-4\nu} \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\pi} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{i\theta(\alpha+\eta)}}{\operatorname{sh}((\alpha+\eta)/2)} - \frac{e^{i\theta(\alpha-\eta)}}{\operatorname{sh}((\alpha-\eta)/2)} \right) \frac{d\eta}{\operatorname{ch}\eta + 1} \right\} \\ \theta = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu) \quad (2.10)$$

Граничное условие (1.1), или первое условие (2.4) в зоне проскальзывания ($a < |x| < b$; $\beta = \pi$, $|\alpha| = \alpha_0$) служит интегральным уравнением для определения неизвестной плотности $\sigma(\alpha)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \{ [(3-4\nu)A_2(\lambda) - A_3(\lambda)] \operatorname{ch}\pi\lambda + [(3-4\nu)B_2(\lambda) - B_3(\lambda)] \operatorname{ch}\pi\lambda \} e^{-i\lambda\alpha} d\lambda = \\ = - \frac{ia \operatorname{tg}\varepsilon}{1-\operatorname{ch}\alpha} \operatorname{sign}\alpha + 2i(1-\nu)C_2 \frac{1}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} \quad (|\alpha| > \alpha_0) \quad (2.11)$$

Подставляя в (2.11) функции $A_2(\lambda)$, $B_2(\lambda)$, $A_3(\lambda)$, $B_3(\lambda)$, найденные из системы уравнений (2.7), и производя замены

$$\xi = \alpha_0 + \tau, \quad \alpha = \alpha_0 + t, \quad \frac{\sigma(\alpha_0 + \tau)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 + \tau) - 1} = \varphi(\tau) \quad (2.12)$$

получаем интегральное уравнение относительно функции $\varphi(\tau)$:

$$\int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t) \quad (0 \leq t < \infty) \quad (2.13)$$

$$k(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\pi\lambda \operatorname{ch}\pi(\lambda - i\gamma)}{\operatorname{ch}\pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch}\pi(\lambda - \theta)} e^{-i\lambda(t-\tau)} d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\pi\lambda \operatorname{ch}\pi(\lambda + i\gamma)}{\operatorname{ch}\pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch}\pi(\lambda - \theta)} e^{-i\lambda(2\alpha_0 + t + \tau)} d\lambda \\ f(t) = \frac{i}{D} \left\{ -C_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin\theta(\alpha_0 + t)}{\operatorname{sh}((\alpha_0 + t)/2)} \right) + 2(1-\nu) \frac{C_2 \cos\theta(\alpha_0 + t)}{a \operatorname{sh}((\alpha_0 + t)/2)} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\cos(\alpha_0 + t) - 1} + \right. \quad (2.14) \\ \left. + \frac{1-\nu}{\sqrt{3-4\nu}} \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\cos\theta(\alpha_0 + t - \eta)}{\operatorname{ch}((\alpha_0 + t - \eta)/2)} - \frac{\cos\theta(\alpha_0 + t + \eta)}{\operatorname{ch}((\alpha_0 + t + \eta)/2)} \right) \frac{d\eta}{\operatorname{ch}\eta + 1} \right\}$$

$$D = \sqrt{4(1-\nu)^2 + \mu_0^2(1-2\nu)^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1-2\nu)\mu_0}{2(1-\nu)}$$

3. Сведение интегрального уравнения (2.13) к бесконечной системе алгебраических уравнений. Распространим уравнение (2.13) на всю числовую ось, $\varphi(t) = 0$ при $t < 0$:

$$\int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau - \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ \int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Применим к уравнению (3.1) интегральное преобразование Фурье. Вводя функции

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{izt} dt, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{izt} \int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

аналитические соответственно в верхней ($\text{Im}z \geq 0$) и нижней ($\text{Im}z \leq 0$) полуплоскостях комплексной плоскости, приходим к краевой задаче Римана [11]:

$$K(z)\Phi^+(z) = \Phi^-(z) + F(z) \quad (-\infty < \text{Re}z < \infty, \text{Im}z = 0)$$

$$K(z) = \frac{\text{sh}\pi z \text{ch}\pi(z - i\gamma)}{\text{ch}\pi(z + \theta) \text{ch}\pi(z - \theta)} \quad (3.3)$$

$$F(z) = -\overline{K(z)} e^{-2i\alpha_0 z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-izt} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) e^{izt} dt$$

Для решения задачи Римана (3.3) применим метод Винера – Хопфа [12]. Факторизуем функцию $K(z)/z$:

$$\frac{K(z)}{z} = \frac{K^+(z)}{K^-(z)} \quad (3.4)$$

$$K^+(z) = \frac{\Gamma(1/2 - iz - i\theta)\Gamma(1/2 - iz + i\theta)}{\Gamma(1 - iz)\Gamma(1/2 - iz - \gamma)}, \quad K^-(z) = \frac{\Gamma(1 + iz)\Gamma(1/2 + iz + \gamma)}{\Gamma(1/2 + iz + i\theta)\Gamma(1/2 + iz - i\theta)}$$

где $K^+(z), K^-(z)$ – функции, аналитические и не обращающиеся в нуль соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Тогда соотношение (3.3) можно записать следующим образом:

$$zK^+(z)\Phi^+(z) = K^-(z)\Phi^-(z) + F(z)K^-(z) \quad (3.5)$$

Представим

$$F(z)K^-(z) = f^+(z) - f^-(z) \quad (3.6)$$

где $f^+(z), f^-(z)$ – предельные значения на действительной оси сверху и снизу функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\zeta)K^-(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.7)$$

аналитической вне действительной оси. Вычисляя интеграл в (3.7) по теории вычетов, получим

$$f^+(z) = -\frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \left(e^{-(1/2 - i\theta)\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{z + \theta + i(k + 1/2)} + e^{-(1/2 + i\theta)\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{L}_k}{z - \theta + i(k + 1/2)} \right)$$

$$L_k = \frac{\Gamma(k + 3/2 - i\theta)\Gamma(k + 1 + \gamma - i\theta)e^{-k\alpha_0}}{\Gamma(k + 1 - 2i\theta)k!} \left\{ -iC_0(k + 1/2 - i\theta) + 2(1 - \nu)\frac{C_2}{a} + \right. \\ \left. + \operatorname{tg}\varepsilon \left[k + 1/2 - i\theta + \frac{2(1 - \nu)}{\pi\sqrt{3 - 4\nu}} (-1)^k (2(k + 1/2 - i\theta)S(k + 3/2 - i\theta) - 1) \right] + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu)(1 - i\mu_0)e^{-(k + 1/2 - i\theta)\alpha_0} z_k \right\} \quad (3.8)$$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+z}, \quad z_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(k + 1/2 - i\theta)\tau} d\tau \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Соотношение (3.5), с учетом (3.6), принимает вид

$$zK^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = K^-(z)\Phi^-(z) - f^-(z) \quad (-\infty < \operatorname{Re}z < \infty, \operatorname{Im}z = 0) \quad (3.9)$$

Функции, представляющие собой левую и правую части равенства (3.9), являются аналитическим продолжением друг друга на всю комплексную плоскость. Следовательно,

$$zK^+(z)\Phi^+(z) - f^+(z) = P(z) \quad (3.10)$$

где $P(z)$ – произвольная аналитическая во всей комплексной плоскости функция. Отсюда находим общее решение задачи Римана (3.3):

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z) + P(z)}{zK^+(z)} \quad (3.11)$$

Для получения частного решения задачи Римана, соответствующего рассматриваемой физической задаче, определим функцию $P(z)$. Ввиду того, что функция $\Phi^+(z)$, определяемая первой формулой (3.2), исчезает на бесконечности, с помощью оценок

$$zK^+(z) \sim i(-iz)^{1/2+\gamma}, \quad f^+(z) = O(1/2), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

из равенства (3.10) заключаем, что $P(z) = C$ (C – произвольная постоянная). Теперь решение (3.11) принимает вид

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z) + C}{zK^+(z)} \quad (3.13)$$

Сравнивая первое выражение (3.2) с (3.13), с помощью оценок (3.12) можем записать

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{iz\tau} d\tau = -Ci\sqrt{2\pi}(-iz)^{-1/2+\gamma} + O((-iz)^{-3/2-\gamma}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\operatorname{Im}z \geq 0)$$

Отсюда по лемме Ватсона [13]:

$$\int_0^{\infty} \tau^{\beta-1} f_1(\tau) e^{iz\tau} d\tau \sim \Gamma(\beta) f_1(0) (-iz)^{-\beta}, \quad |z| \rightarrow \infty$$

$$f_1(0) \neq 0, \quad \beta > 0, \quad 0 < \delta < \arg z \leq \pi - \delta < \pi$$

где функция $f_1(\tau)$ такая, что интеграл существует. Имеем

$$\varphi(\tau) = -Ci \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1/2 + \gamma)} \tau^{-1/2 + \gamma} + O(\tau^{1/2 + \gamma}), \quad \tau \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

С помощью представления (3.14) и замен (2.12), (2.5) находим поведение функции нормального давления на краю области контакта:

$$\sigma_y|_{y=0} = C(b-x)^{-1/2 + \gamma} \varphi_1(x) + (b-x)^{1/2 + \gamma} \varphi_2(x) \quad (3.15)$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – функции, регулярные в левой полукрестности точки $x = b$, причем $0 < |\varphi_k(b)| < \infty$ ($k = 1, 2$). Выявленные особенности функции $\sigma_y|_{y=0}$ на краю области контакта совпадают с соответствующими особенностями давления в задачах о скользящем контакте штампа [14] ($C \neq 0$) и жесткого диска [9] ($C = 0$) с упругой полуплоскостью.

Требуя ограниченность напряжений в точке $x = b$, $y = 0$ упругой полуплоскости, с привлечением соотношения (3.15) заключаем, что $C = 0$. Таким образом,

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z)}{zK^+(z)} \quad (3.16)$$

Обращая первое соотношение (3.2), с учетом выражения (3.16) находим плотность интегрального уравнения (2.13):

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^+(t)}{tK^+(t)} e^{-it\tau} dt \quad (3.17)$$

Заметим, что функция $zK^+(z)$, входящая в интеграл (3.17), имеет два простых нуля $z = 0$, $z = -i(1/2 - \gamma)$ в плоскости $\text{Im} z > -1$. Поэтому, чтобы контактные напряжения $\sigma_y|_{y=0}$, найденные с помощью интеграла (3.17) и замен (2.12), (2.5), были конечны в точке $x = a + 0$, необходимо поставить условия ограниченности напряжений (при $x \rightarrow a + 0$, $\tau \rightarrow \infty$):

$$f^+(0) = 0, \quad f^+(-i/2 + i\gamma) = 0 \quad (3.18)$$

или

$$\text{Re} e^{i\theta\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{k + 1/2 - i\theta} = 0, \quad \text{Re} e^{i\theta\alpha_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{k + \gamma - i\theta} = 0 \quad (3.19)$$

После подстановки в интеграл (3.17) выражений для $f^+(t)$ из (3.8) и $K^+(t)$ из (3.4) домножим равенство (3.17) на $(2\pi)^{-1} \exp(-(n + 1/2 - i\theta)\tau)$ и проинтегрируем его по τ до 0 до ∞ . Учитывая обозначение для z_n из (3.8), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$z_n = \frac{1}{2\pi D} \frac{\Gamma(n + 1/2 - i\theta)\Gamma(n + 1 - \gamma - i\theta)}{\Gamma(n + 1 - 2i\theta)n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(1/2 - i\theta)\alpha_0} \frac{L_k}{k + n + 1 - 2i\theta} + e^{-(1/2 + i\theta)\alpha_0} \frac{\bar{L}_k}{k + n + 1} \right) \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.20)$$

Система уравнений (3.20), (3.19) служит для определения неизвестных комплексных постоянных z_n ($n = 1, 1, \dots$) и действительных постоянных C_0 , C_2/a .

4. Распределение контактных напряжений. Вычисляя интеграл в (3.17) по теории вычетов с учетом дополнительных условий (3.18) и переходя от функции $\varphi(\tau)$ по

формулам (2.12), (2.5) к $\sigma_y|_{y=0}$, получаем контактные напряжения в зоне проскальзывания

$$\frac{\sigma_y}{2G}\Big|_{y=0} = -\frac{4(1-\nu)}{\pi^3-4\nu}(\operatorname{ch}\alpha-1)e^{-\alpha_0/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \frac{|\Gamma(k+1/2+i\theta)|^2}{\Gamma(k+1/2+\gamma)} e^{-k(\alpha-\alpha_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-k+1/2-i\theta} - \frac{(1-2\nu)^2(1+\mu_0^2)|\Gamma(k+1-\gamma+i\theta)|^2}{D^2 \Gamma(k+3/2-\gamma)} e^{-(k+1/2-\gamma)(\alpha-\alpha_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-k+\gamma-i\theta} \right\} \quad (4.1)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{2G}\Big|_{y=0} = \mu_0 \frac{\sigma_y}{2G}\Big|_{y=0}, \quad \alpha = \ln \frac{x+a}{x-a} \quad (a < x < b)$$

Выразим контактные напряжения (2.9) в зоне сцепления через решение системы алгебраических уравнений (3.20), (3.19). Интегралы

$$\int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch}\xi-1} \frac{e^{i\theta(\alpha\mp\xi)}}{\operatorname{ch}((\alpha\mp\xi)/2)} d\xi = \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch}\xi-1} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha\mp\xi)t}}{\operatorname{ch}\pi(t-\theta)} dt = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\alpha_0\mp\alpha)t}}{\operatorname{ch}\pi(t-\theta)} \Phi^{\pm}(t) dt$$

вычисляем по теории вычетов. После преобразований получим выражение для контактных напряжений в зоне сцепления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G}(\sigma_y + i\tau_{xy})\Big|_{y=0} &= -\frac{4(1-\nu)}{\pi^3-4\nu}(1+i\mu_0)(\operatorname{ch}\alpha+1)e^{-\alpha_0/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \times \\ &\times \left\{ \frac{|\Gamma(k+1/2+i\theta)|^2}{\Gamma(k+1/2+\gamma)} e^{-k(\alpha-\alpha_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-k+1/2-i\theta} + \frac{1-2\nu}{iD}(1-i\mu_0) \times \right. \\ &\times \left. \frac{|\Gamma(k+1-\gamma+i\theta)|^2}{\Gamma(k+3/2-\gamma)} e^{-(k+1/2-\gamma)(\alpha-\alpha_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-k+\gamma-i\theta} \right\}, \quad a = \ln \frac{a+x}{a-x} \end{aligned} \quad (4.2)$$

справедливое во внешней части $a^2/b < x < a$ ($\alpha > \alpha_0$) зоны сцепления.

Для $0 < \alpha < \alpha_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch}\xi-1} \frac{e^{i\theta(\alpha\mp\xi)}}{\operatorname{ch}((\alpha\mp\xi)/2)} d\xi &= \int_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{i\theta(\alpha\mp\alpha_0\mp\tau)} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1/2)(\alpha\mp\alpha_0\mp\tau)} \right) d\tau = \\ &= 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(k+1/2+i\theta)(\alpha_0\mp\alpha)} \begin{Bmatrix} \bar{z}_k \\ z_k \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Во внутренней части зоны сцепления из (2.9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G}(\sigma_y + i\tau_{xy})\Big|_{y=0} &= \frac{2}{\sqrt{3-4\nu}}(\operatorname{ch}\alpha+1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\Gamma(k+1-2i\theta)k!}{\Gamma(k+3/2-i\theta)\Gamma(k+1+\gamma-i\theta)} e^{k\alpha_0} L_k \times \right. \\ &\times e^{-(k+1/2-i\theta)\alpha} + 2(1-\nu)(1+i\mu_0)\bar{z}_k e^{-(k+1/2+i\theta)(\alpha_0-\alpha)} \left. \right\}, \quad \alpha = \ln \frac{a+x}{a-x} \quad \left(0 < x < \frac{a^2}{b} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Проводя асимптотический анализ выражения (4.3), получаем поведение контактных напряжений в окрестности вершины жесткого клина:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=0} &\sim \frac{4}{\pi} \frac{1-\nu}{3-4\nu} \operatorname{tg} \epsilon \ln \left| \frac{x}{b} \right|, \quad x \rightarrow 0 \\ \frac{\tau_{xy}}{2G} \Big|_{y=0} &\sim \mp \frac{1-2\nu}{3-4\nu} \operatorname{tg} \epsilon, \quad x \rightarrow \pm 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Нормальные контактные напряжения $\sigma_y|_{y=0}$ неограниченны в окрестности вершины клина и имеют при этом логарифмическую особенность. Касательные контактные напряжения $\tau_{xy}|_{y=0}$ ограничены и терпят конечный разрыв в точке $x = 0$.

Размер $2a$ зоны сцепления определяем из условия равновесия упругой полуплоскости:

$$2 \int_0^b \sigma_y \Big|_{y=0} dx = -P. \quad (4.5)$$

или

$$a \int_{-\infty}^a \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=0} \frac{d\alpha}{\operatorname{ch} \alpha + 1} - 2a \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha - 1} d\alpha = \frac{P}{2G}$$

С помощью соотношения (2.9) получаем, что условие равновесия (4.5) эквивалентно условию

$$C_2 = -P/(4\pi G) \quad (4.6)$$

Из условия (4.6) получаем

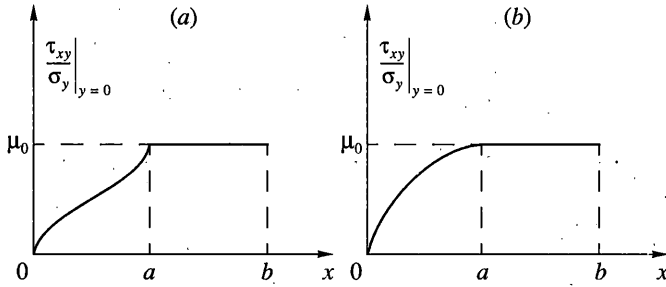
$$a = -\frac{P}{4\pi G C_2/a} \quad (4.7)$$

При этом постоянная C_2/a определяется решением системы уравнений (3.20), (3.19).

Для определения оставшегося пока неизвестным параметра α_0 имеется условие (1.3), показывающее, что абсолютное значение отношения касательных и нормальных напряжений в зоне сцепления, исключая ее крайние точки $x = \pm a$, должно быть меньше коэффициента трения.

Анализируя поведение выражения (4.2) в левой полуокрестности точки $x = a$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=0, 0 < x < a} &= -\sigma(\infty) - A_2 e^{-\alpha} + O(e^{-2\alpha}) \\ \frac{\tau_{xy}}{2G} \Big|_{y=0, 0 < x < a} &= -\mu_0 \sigma(\infty) - A_1 e^{-(1/2-\gamma)\alpha} - \mu_0 A_2 e^{-\alpha} - A_3 e^{-(3/2-\gamma)\alpha} + O(e^{-2\alpha}), \quad \alpha \rightarrow \infty \\ \sigma(\infty) &= 2p_1, \quad A_1 = 2q_1, \quad A_2 = 4p_1 - p_2, \quad A_3 = 4q_1 - q_2 \\ p_k &= \frac{1}{\pi} \frac{1-\nu}{3-4\nu} \frac{|\Gamma(k+1/2+i\theta)|^2}{\Gamma(k+1/2+\gamma)} e^{(k-1/2)\alpha_0} \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-k+1/2-i\theta} \\ q_k &= -\frac{1}{\pi} \frac{1-\nu}{3-4\nu} (1-2\nu)(1+\mu_0^2) \frac{|\Gamma(k+1-\gamma+i\theta)|^2}{\Gamma(k+3/2-\gamma)} e^{(k-\gamma)\alpha_0} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-k+\gamma-i\theta} \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (4.8)$$



Фиг. 3

Из асимптотических формул (4.8) следует, что

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_y} \Big|_{y=0, 0 < x < a} = \mu_0 + \frac{A_1}{\sigma(\infty)} e^{-(1/2-\gamma)\alpha} + \frac{A_3 - A_1 A_2}{\sigma(\infty)} e^{-(3/2-\gamma)\alpha} + O(e^{-2\alpha}), \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (4.9)$$

Поведение отношения τ_{xy}/σ_y при $y=0, x \rightarrow a-0$ ($\alpha \rightarrow \infty$) характеризуется множителями

$$e^{-k-(1/2-\gamma)\alpha} \sim \left(\frac{a-x}{2a}\right)^{k-1/2-\gamma} \quad (k=1, 2)$$

Ввиду того, что $\sigma(\infty) > 0$, с помощью соотношения (4.9) заключаем, что для выполнения условия (1.3) необходимо потребовать, чтобы либо $A_1 < 0$, (фиг. 3, а), либо $A_1 = 0, A_3 < 0$ (фиг. 3, в), т.е. должно выполняться одно из двух условий:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-1+\gamma-i\theta} > 0 \quad (A_1 < 0) \quad (4.10)$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-1+\gamma-i\theta} = 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta\alpha_0} L_m}{m-2+\gamma-i\theta} > 0 \quad (A_1 = 0, A_3 < 0) \quad (4.11)$$

Кроме того также должно выполняться условие

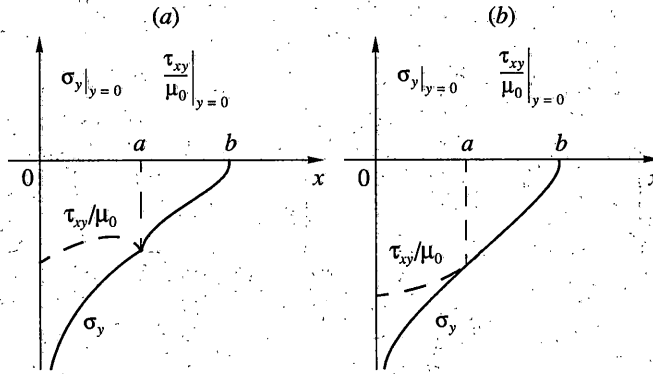
$$C_0 < 0 \quad (4.12)$$

Таким образом, параметр α_0 , а значит и отношение a/b размера зоны сцепления к размеру всей области контакта, в данной постановке задачи не могут быть определены однозначно. Условия (4.10) – (4.12) дают лишь определенный интервал ($a_{\min}/b; a_{\max}/b$) возможных значений для отношения a/b . Само же отношение a/b может быть определено только экспериментальным путем.

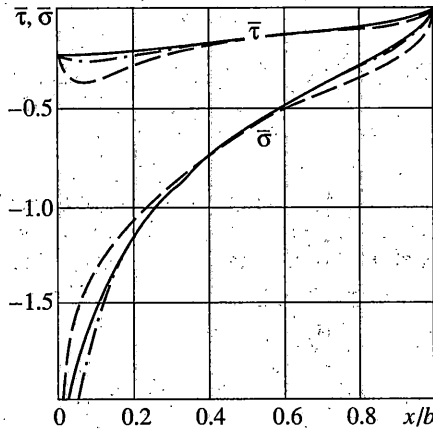
Анализируя поведение выражения (4.1) в правой полукрестности точки $x = a$, получаем

$$\frac{\sigma_y}{2G} \Big|_{y=0, a < x < b} = -\sigma(\infty) - \frac{1-2\nu}{D} A_1 e^{-(1/2-\gamma)\alpha} + A_2 e^{-\alpha} + O(e^{-(3/2-\gamma)\alpha}), \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

Особенности распределения контактных напряжений, соответствующие соотношениям (4.8), (4.13), показаны на фиг. 4; а ($A_1 = 0$) фиг. 4, в ($A_1 = 0, A_3 < 0$). При $A_1 < 0$ в граничной точке $x = a$ между зонами сцепления и проскальзывания контактные напряжения имеют бесконечный градиент. При $A_1 = 0$ графики контактных напряжений имеют гладкий характер.



Фиг. 4



Фиг. 5

5. Пример. Численные результаты получены для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ и коэффициента трения $\mu_0 = 0.25$. В этом случае $a_{\min}/b = 0.06996$, $a_{\max}/b = 0.5505$, причем $A_1 = 0$, $A_3 < 0$, если отношение a/b принимает граничные значения a_{\min}/b , a_{\max}/b . Распределение контактных напряжений показано на фиг. 5. Приведены графики безразмерных величин $\bar{\sigma} = (\sigma_y / (2G \operatorname{tg} \epsilon))|_{y=0}$, $\bar{\tau} = (\tau_{xy} / (2G \operatorname{tg} \epsilon))|_{y=0}$, соответствующих нормальным и касательным контактным напряжениям, в зависимости от относительной координаты x/b области контакта. Сплошные линии соответствуют отношению $a/b = 0.55$, штриховые – $a/b = 0.77$, штрих-пунктирные – $a/b = 0.31$. Нерегулярность контактных напряжений в граничной точке $x = a$ между зонами сцепления и проскальзывания при $a/b = 0.31$ графически не улавливается. Представленные графики показывают, что отношение a/b оказывает небольшое влияние на распределение нормальных контактных напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1: Love A.E.H. Boussinesq's problem for a rigid cone // Quart. J. Math. 1939. V. 10. P. 161–175.
- 2: Sneddon I.N. Boussinesq's problem for a rigid cone // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1948. V. 44. P. 492–507.
- 3: Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 667 с.

4. Улитко А.Ф., Качаловская Н.Е. Контактное взаимодействие жесткого и упругого клиньев при первоначальном точечном касании в их общей вершине // Докл. НАН Украины. 1995. № 1. С. 51–54.
5. Goodman L.E. Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1962. V. 29. № 3. P. 515–522.
6. Моссаковский В.И. Сжатие упругих тел в условиях сцепления // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 418–427.
7. Spence D.A. Self similar solutions to adhesive contact problem with incremental loading // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.V. 305. № 1480. P. 55–80.
8. Spence D.A. An eigenvalue problem for elastic contact with friction // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1973. V. 73. № 1. P. 249–268.
9. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
10. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука. 1967. 402 с.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 640 с.
12. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во Иностран. лит., 1962. 280 с.
13. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
14. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 264 с.

Сумы, Киев

Поступила в редакцию
15.09.2000